ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВОЛН

Лекция 1.

Введение: предмет курса.. **Тема I.Задачи для одномерного волнового уравнения.** **1**^{0}. Формула общего решения и ее графическая интерпретация. **2**^{0}. Вывод формулы Даламбера для решения задачи Коши однородного уравнения. Принцип конечной зависимости. **3**^{0}. Смешанная задача на полуоси для одномерного волнового уравнения с условием закрепления в начале. **4**^{0}. Смешанная задача на конечном отрезке для одномерного волнового уравнения с условием закрепления на краях.

Предметом настоящего специального курса служат волновые процессы самой разной природы, описываемые в рамках *математической теории волн* (МТВ). Понятие волны на интуитивном уровне у всех нас формируется в раннем возрасте из визуальных наблюдений за волнами на поверхности воды (реки, моря, океана). С опытом, расширяя горизонты наших представлений о природе, мы узнаем, что бывают и другие волны: *тепловые, акустические, световые, электромагнитные, упругие, взрывные* и т.д. Ситуации, в которых возникают волновые процессы, весьма многообразны, а методы их описания различны. В то же время в протекании волновых процессов различной физической природы имеется много общего. Именно это обстоятельство позволяет говорить о теории волн как об *отдельной научной дисциплине*.

Формальный язык, на котором записываются постулаты волновой теории и ее задачи, а также излагаются методы решения этих задач, — это язык дифференциальных уравнений с частными производными, интегро-дифференциальных уравнений, либо систем уравнений. Именно такого рода объекты служат основными компонентами сформировавшейся математической теории.

Все уравнения МТВ принято разделять на два класса: уравнения линейные и уравнения нелинейные. В каждом из этих классов выделяются несколько ключевых, или эталонных, уравнений, формульная запись которых достаточно компактна и проста. Именно для этих элементарных представителей класса исследуются затем различные постановки задач: начальных, краевых и т.п. Далее результаты проведенных исследований берутся в качестве первого приближения при рассмотрении уже более сложных для анализа уравнений.

Среди линейных уравнений в существующей к настоящему моменту теории наиболее известно и практически полностью исследовано волновое, имеющее следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = 0. \qquad (\mathbf{W})$$

Здесь Δ — хорошо известный оператор Лапласа по пространственным переменным. Далее в курсе рассматриваются задачи для волнового уравнения (**W**) в случае одной, двух и трех пространственных переменных. Отметим еще, что уравнение (**W**) имеет гиперболический тип. Еще два важных примера линейных математических моделей волновых процессов дают гиперболические *система уравнений акустики* и *система уравнений Максвелла*.

Часто моделирование реальных волновых процессов с необходимостью приводит к задачам для нелинейных дифференциальных уравнений или систем, важнейшими примерами которых служат *система уравнений гидродинамики и система уравнений газовой динамики*.

Далее будут рассматриваться нелинейные модели, в которых искомая функция $u(x,t)$ зависит, как правило, ровно от двух вещественных переменных, одна из которых — время t — всегда неотрицательна. В качестве простейшего нелинейного эталонного уравнения далее выступает следующее квазилинейное уравнение с частными производными первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{SW}$$

Будем ссылаться на уравнение (**SW**) как на *уравнение простых волн*.

Помимо уравнения (**SW**) далее рассматривается следующее нелинейное уравнение с частными производными третьего порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \tag{KdF}$$

В указанном виде (**KdF**) это уравнение известно как *уравнение Кортвега–де Фриза*, или (КдФ)-*уравнение*.

Еще одно ключевое уравнение нелинейного раздела теории волн — это *уравнение Бюргерса*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Параметр ν здесь строго положителен: $\nu > 0$. Уравнение простых волн (**SW**) удобно рассматривать как предел уравнения Бюргерса при $\nu \to 0$.

1^0. Известно, что для уравнений гиперболического типа к хорошо поставленным задачам относится задача с начальными условиями, называемая также *задачей Коши*. Выясним, как следует ставить и решать эту задачу на примере одномерного волнового уравнения. Само уравнение задано в полуплоскости:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0.$$

Преобразование $\xi = x - at$, $\eta = x + at$ приводит это уравнение к каноническому виду: $u_{\xi\eta} = 0$. Общее решение приведенного уравнения дается формулой

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta),$$

где f и g — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции одной переменной. Возвращаясь к переменным (x, t), получаем

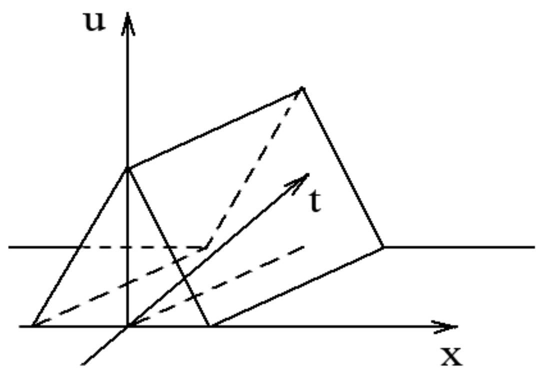
$$u(x, t) = f(x - at) + g(x + at). \qquad \textbf{(GS)}$$

Это — *формула общего решения одномерного волнового уравнения*. Исследуем ее более подробно.

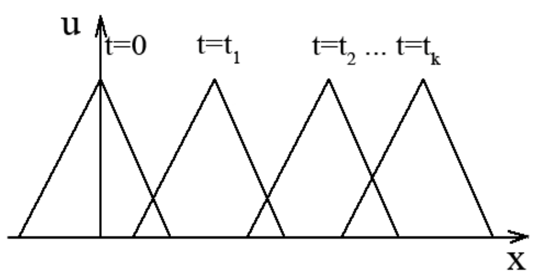
Предположим сначала, что $g \equiv 0$ и изобразим графически в пространстве (x, t, u) поверхность $u = f(x - at)$. Пусть профиль функции $f(x)$ задан, т.е. известна функция $u(x, 0)$. Чтобы получить все точки поверхности

$$u = f(x - at),$$

нужно, непрерывно изменяя t, перемещать этот профиль параллельно прямой $x - at = 0$. На рисунке изображена поверхность $u = f(x - at)$ в случае, когда $f(x)$ это “треугольник”.



Выбрав возрастающую последовательность положительных моментов времени: $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k < \ldots$, рассечем поверхность $u = f(x - at)$ плоскостями $t = t_k$ и спроецируем получившиеся сечения на плоскость (x, u). В результате придем к последовательности графиков, перемещающихся слева направо с увеличением времени t_k.



Найдем скорость перемещения указанных графиков. Точка $x = x(t)$, лежащая на графике, в разные моменты времени удовлетворяет уравнению вида $u_0 = f(x(t) - at)$, где $u_0 = f(x(0))$. Дифференцируя это соотношение по t, получаем

$$0 = \frac{du_0}{dt} = f'(x(t) - at)(\dot{x} - a).$$

Это равенство возможно лишь в случае, если $\dot{x}(t) = a$.

Имея в виду приведенную графическую интерпретацию, говорят, что формула $u = f(x - at)$ задает в пространстве (x, u) *бегущую волну*, распространяющуюся из $-\infty$ в $+\infty$ со скоростью a.

Аналогично рассматривается случай, когда $f = 0$, а g — задана. При этом профиль $g(x)$ будет перемещаться в плоскости (x, u) справа налево с постоянной скоростью a.

Формула общего решения (**GS**), таким образом, дает представление любого решения $u(x,t)$ одномерного волнового уравнения в виде *суперпозиции двух бегущих волн*, распространяющихся с одинаковой скоростью в разные стороны.

2^0. Будем теперь искать решения волнового уравнения, имеющие в начальный момент времени заданную форму и обладающие в тот же момент времени заданным распределением скорости:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{при } t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = \varphi(x) & \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) & \text{при } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{$\mathbf{CP}_{n=1}$}$$

Это — *задача Коши* для одномерного волнового уравнения. Решим ее в случае, когда на всей числовой оси $\varphi(x)$ имеет две непрерывные производные, а $\psi(x)$ — одну:

$$\varphi(x) \in C^{(2)}(\mathbb{R}), \quad \psi(x) \in C^{(1)}(\mathbb{R}).$$

Пусть задача ($\mathbf{CP}_{n=1}$) имеет гладкое, т.е. дважды непрерывно дифференцируемое решение $u(x,t)$. Тогда существуют такие дважды непрерывно дифференцируемые функции f и g одной переменной, что

$$u(x,t) = f(x-at) + g(x+at).$$

Найдем зависимость f и g от начальных данных задачи Коши, т.е. от функций φ и ψ.

Рассмотрим вместе с формулой (**GS**) общего решения равенство, получающееся из него дифференцированием по t:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = f'(x-at)\cdot(-a) + g'(x+at)\cdot a.$$

Полагая здесь и в исходной формуле (**GS**) t равным нулю, приходим к начальной системе поточечных равенств:

$$\left\{\begin{aligned} f(x)+g(x) &= \varphi(x) \\ -af'(x)+ag'(x) &= \psi(x) \end{aligned}\right. \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}. \tag{IS}$$

Дифференцируя по x первое из равенств начальной системы и разделив второе из них на a, получим

$$\left\{\begin{aligned} f'(x)+g'(x) &= \varphi'(x) \\ -f'(x)+g'(x) &= \frac{1}{a}\psi(x) \end{aligned}\right. \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

Вычитая из первого полученного равенства второе, находим:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\varphi'(x) - \frac{1}{2a}\psi(x) \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

Взяв от обеих частей первообразную, придем к соотношению

$$f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int\limits_0^x \psi(\xi)\,d\xi + C, \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

Здесь C — произвольная постоянная. Подставляя найденную формулу для $f(x)$ в первое из равенств системы (**IS**), находим

$$g(x) = \varphi(x) - f(x) =$$

$$= \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int\limits_0^x \psi(\xi)\,d\xi - C, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Найденные для $f(x)$ и $g(x)$ формулы приводят к равенствам

$$f(x-at) = \frac{1}{2}\varphi(x-at) - \frac{1}{2a}\int\limits_0^{x-at} \psi(\xi)\,d\xi + C,$$

$$g(x+at) = \frac{1}{2}\varphi(x+at) + \frac{1}{2a}\int\limits_0^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi - C.$$

Складывая их и пользуясь формулой общего решения (**GS**), получаем окончательно

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi. \tag{\textbf{DF}}$$

Полученное равенство называется *формулой Даламбера*.

Выражение f и g через φ и ψ, а с ним и формулу решения задачи Коши получил в 1748 году Леонард Эйлер.

Итог проведенных рассуждений: *если задача Коши* (**CP**$_{n=1}$) *имеет гладкое решение, то это решение — единственно и задается формулой Даламбера* (**DF**). Эта формулировка в свою очередь подсказывает как доказать существование решения рассматриваемой задачи Коши.

Теорема (существования и единственности для задачи Коши). *Пусть начальные данные φ и ψ задачи Коши для одномерного волнового уравнения непрерывно дифференцируемы два и один раз соответственно. Тогда решение $u(x,t)$ этой задачи существует, единственно и задается формулой Даламбера.*

Доказательство. Представимость решения формулой (**DF**) и тем самым его единственность уже обоснованы. Чтобы доказать существование, достаточно, взяв правую часть формулы Даламбера, т.е. сумму

$$\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi,$$

убедиться, что эта функция, имея две непрерывные производные (по известной теореме из математического анализа), удовлетворяет и заданным начальным условиям. То, что это решение волнового уравнения, вытекает из самого представления этой функции в виде суперпозиции вида (**GS**) двух бегущих волн. $\square$

Упражнение. *Пусть $\varphi(x)\equiv 0$ и $\psi\equiv|x|$, т.е.*

$$\psi(x)\in C(\mathbb{R}),\quad \textit{но}\quad \psi(x)\notin C^{(1)}(\mathbb{R}).$$

*В какой части верхней полуплоскости $t>0$ правая часть формулы Даламбера (**DF**) в этом случае будет решением волнового уравнения?*

Анализ формулы Даламбера показывает, что решение $u(x,t)$ задачи Коши ($\mathbf{CP}_{n=1}$) в точке (x_0,t_0) верхней полуплоскости

$t > 0$ зависит от значений начальных данных φ и ψ лишь на конечном отрезке $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ числовой оси. Этот отрезок выделяется на числовой оси x двумя характеристиками волнового уравнения, проходящими через точку (x_0, t_0). Подобное положение дел, т.е. зависимость решения от значений начальных данных в *ограниченной области* плоскости $t = 0$, или *принцип конечной зависимости*, характерно для всех уравнений гиперболического типа.

3^0. В приложениях редко встречаются задачи лишь с начальными данными, т.е. задачи в которых переменная x изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Гораздо чаще координата x, определяющая положение точки физического тела, изменяется на конечном промежутке $0 \leqslant x \leqslant L$. В этом случае начальные данные, т.е. функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, известны лишь при $0 \leqslant x \leqslant L$. Таким образом, чтобы однозначно найти решение необходимо иметь дополнительную информацию в виде граничных, или краевых условий, задаваемых при $x = 0$ и $x = L$ для всех $t \geqslant 0$.

Прежде чем ставить и решать задачу для одномерного волнового уравнения на конечном отрезке, рассмотрим простейшую *смешанную задачу* для этого уравнения на полуоси $x \geqslant 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{при } t > 0,\ x > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x) & \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) & \text{при} \quad x \geqslant 0, \\ u(0,t) = h(t) & \text{при} \quad t \geqslant 0. \end{cases} \qquad (\mathbf{MP}_+)$$

Предположим, что на положительной полупрямой функции $\varphi(x)$ и $h(t)$ имеют вторые непрерывные, а $\psi(x)$ — первую непрерывную производные:

$$\varphi(x) \in C^{(2)}(\mathbb{R}_+), \quad \psi(x) \in C^{(1)}(\mathbb{R}_+), \quad h(t) \in C^{(2)}(\mathbb{R}_+).$$

Кроме того, подчиним функции φ, ψ и h так называемым *условиям согласования*:

$$h(0) = \varphi(0),\ h'(0) = \psi(0),\ h''(0) = a^2\varphi''(0). \qquad (\mathbf{FC})$$

Теорема (о решении задачи в квадранте)**.** *Гладкое решение смешанной задачи* (**MP**$_+$) *в квадранте* $x \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, *при сделанных предположениях о гладкости ее данных* φ, ψ *и* h, *удовлетворяющих условиям согласования* (**FC**), *существует и единственно.*

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (**MP**$_+$), тогда найдутся такие функции $f(x)$ и $g(x)$ одной переменной, что для всех $x \geqslant 0$ и $t \geqslant 0$ имеет место равенство

$$u(x,t) = f(x - at) + g(x + at).$$

Подставив это разложение в начальные данные и граничные условия, придем к системе равенств

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi(x) & \text{при} \quad x \geqslant 0, \\ -af'(x) + ag'(x) = \psi(x) & \text{при} \quad x \geqslant 0, \\ f(-at) + g(at) = h(t) & \text{при} \quad t \geqslant 0. \end{cases} \qquad (\mathbf{IS}')$$

Из первых двух равенств этой системы получаем следующие пригодные при $x \geqslant 0$ выражения для $f(x)$ и $g(x)$:

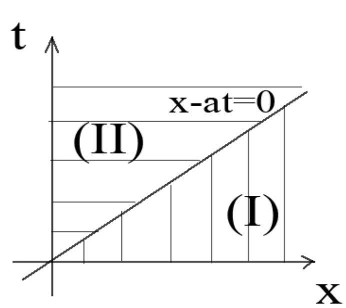
$$f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int\limits_0^x \psi(\xi)\,d\xi + C_1,$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int\limits_0^x \psi(\xi)\,d\xi - C_1.$$

Выводятся эти соотношения тем же способом, что и при получении формулы Даламбера. Положим здесь $C_1 = 0$, что не ограничит общности, ибо f и g в формуле для $u(x,t)$ складываются. Согласно третьему соотношению системы (**IS′**) при $t < 0$ имеем

$$f(t) = h\Big(-\frac{t}{a}\Big) - g(-t) = h\Big(-\frac{t}{a}\Big) - \frac{1}{2}\varphi(-t) + \frac{1}{2a}\int\limits_{-t}^{0} \psi(\xi)\,d\xi.$$

Подставляя эти выражения в формулу для $u(x,t)$, видим, что при $t \geqslant 0$ и $x - at \geqslant 0$, т.е. для точек (x,t) из угла (**I**), образованного положительной полуосью абсцисс и характеристикой $x - at = 0$ уравнения (см. рис.),



решение $u(x,t)$ выражается через начальные данные задачи с помощью обычной формулы Даламбера:

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi \qquad (1_{\mathbf{I}})$$

Если же $t\geqslant 0,\quad x\geqslant 0,\quad x-at\leqslant 0$, т.е. точка (x,t) лежит в угле (**II**) (см. рис.), то имеем

$$u(x,t)=h\Big(t-\frac{x}{a}\Big)+\frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{at-x}^{at+x}\psi(\xi)\,d\xi. \qquad (1_{\mathbf{II}})$$

Таким образом, решение $u(x,t)$ смешанной задачи ($\mathbf{MP}_+$) задано сложным образом. В каждом из двух углов, на которые квадрант разбивается характеристикой $x-at=0$, для решения справедлива своя формула.

Условия согласования (**FC**), как несложно убедиться, обеспечивают гладкую “склейку” двух способов задания решения $u(x,t)$ на характеристике $x-at=0$. Иными словами, в окрестности каждой точки прямой $x-at=0$ функция $u(x,t)$ имеет непрерывные вторые производные.

Проведенные рассуждения, во-первых, доказывают единственность решения смешанной задачи ($\mathbf{MP}_+$) и, во-вторых, позволяют выразить его аналитически через исходные данные. Пользуясь равенствами ($1_{\mathbf{I}}$) и ($1_{\mathbf{II}}$), а также условиями согласования (**FC**) несложно убедиться в существовании гладкого решения задачи ($\mathbf{MP}_+$). $\square$

Отдельно рассмотрим смешанную задачу для одномерного волнового уравнения на полуоси $x\geqslant 0$ с тождественно нулевым краевым условием:

$$h(t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad t \geqslant 0.$$

В этом случае гладкое при $x > 0$, $t > 0$ решение рассматриваемой смешанной задачи существует при выполнении условий гладкости начальных данных:

$$\varphi(x) \in C^{(2)}(\mathbb{R}_+), \quad \psi(x) \in C^{(1)}(\mathbb{R}_+)$$

и условий согласования

$$\varphi(0) = \psi(0) = \varphi''(0) = 0. \tag{$\mathbf{FC'}$}$$

Выведенная ранее явная формула для решения в случае $h \equiv 0$ принимает следующий вид:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{at-x}^{at+x} \psi(\xi)\,d\xi, \tag{$\mathbf{MP_{II}}$}$$

где $t \geqslant 0$, $x \geqslant 0$ и $x - at \leqslant 0$. В правой части равенства ($\mathbf{MP_{II}}$) аргумент именно $at - x$, а не $x - at$, как в формуле Даламбера.

То же самое представление ($\mathbf{MP_{II}}$) можно получить и по-другому. Поясним, как именно.

Продолжим начальные данные $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ задачи на полуось $x \leqslant 0$ нечетным образом, т.е. положим

$$\begin{cases} \varphi(-x) = -\varphi(x) \\ \psi(-x) = -\psi(x) \end{cases} \quad \text{при} \quad x \geqslant 0.$$

Найдем решение задачи Коши для одномерного волнового уравнения с таким образом заданными на всей оси начальными данными $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. При $t \geqslant 0$, $x \geqslant 0$ и $x - at \leqslant 0$ будем иметь для $u(x,t)$ в точности то же самое равенство ($\mathbf{MP_{II}}$). Функция $u(x,t)$ при этом задана при всех $t \geqslant 0$ и нечетна по x, т.е. удовлетворяет равенству $u(-x,t) = -u(x,t)$. Переходя здесь к пределу при $x \to 0$ и пользуясь непрерывностью $u(x,t)$ по x, приходим к равенству $u(0,t) = 0$. Говорят, что таким образом сконструированная функция $u(x,t)$ получена "отражением волны" от границы $x = 0$ квадранта.

4^0. Применим сформулированный прием "отражения" для отыскания решения смешанной задачи для волнового уравнения с начальными данными на отрезке $0 \leqslant x \leqslant L$. Постановка задачи следующая:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant L,\ t \geqslant 0, \\ u(x,0) = \varphi(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x),\ 0 \leqslant x \leqslant L, \\ u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t \geqslant 0. \end{cases} \qquad (\mathbf{MP}_0^L)$$

Отразим функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ относительно концов отрезка $x = 0$ и $x = L$, т.е. положим, что для всех вещественных x имеют место равенства

$$\begin{cases} \varphi(x) + \varphi(-x) = 0, \quad \varphi(x) + \varphi(2L - x) = 0, \\ \psi(x) + \psi(-x) = 0, \quad \psi(x) + \psi(2L - x) = 0. \end{cases} \qquad (\mathbf{RC})$$

Потребуем при этом, чтобы в точках $x = 0$ и $x = L$ выполнялись условия согласования:

$$\begin{cases} \varphi(0) = \psi(0) = \varphi''(0) = 0, \\ \varphi(L) = \psi(L) = \varphi''(L) = 0. \end{cases} \qquad (\mathbf{FC''})$$

Условия ($\mathbf{RC}$) и ($\mathbf{FC''}$) заведомо выполнены, если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ заданы в виде достаточно быстро сходящихся рядов по системе синусов:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{\pi n x}{L}, \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{L}.$$

Если эти ряды сходятся, то их суммы можно рассматривать не только при $0 \leqslant x \leqslant L$, но и при всех вещественных x.

Указанные ряды по синусам задают периодические продолжения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ с отрезка $0 \leqslant x \leqslant L$ на всю ось. Предполагается также, что выписанные разложения по синусам можно два раза почленно дифференцировать.

В этих предположениях задачу ($\mathbf{MP}_0^L$) решает следующая определяемая "формулой Даламбера" функция:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big(\sin\frac{\pi n(x+at)}{L} + \sin\frac{\pi n(x-at)}{L}\Big) -$$

$$-\frac{L}{2\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}\Big(\cos\frac{\pi n(x+at)}{L} - \cos\frac{\pi n(x-at)}{L}\Big).$$

Полученное представление $u(x,t)$ в виде суперпозиции бегущих волн легко преобразовать к более простой форме:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[a_n\cos\frac{\pi n a t}{L} + \frac{L}{\pi n a} b_n \sin\frac{\pi n a t}{L}\Big]\sin\frac{\pi n x}{L}.$$

Это равенство часто применяется на практике. В дальнейшем мы получим его еще одним способом — методом Фурье решения смешанных задач.

Лекция 2.

Тема II. Задачи для трехмерного и двумерного волновых уравнений. $\mathbf{1}^0$. Постановка задачи Коши для трехмерного волнового уравнения. Сферическое среднее. Дифференциальное уравнение сферических средних. $\mathbf{2}^0$. Сферическое среднее от решения задачи Коши как решение смешанной задачи. $\mathbf{3}^0$. Формула Кирхгофа. $\mathbf{4}^0$. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для трехмерного волнового уравнения. $\mathbf{5}^0$. Принцип Гюйгенса, передний и задний волновые фронты. $\mathbf{6}^0$. Сферические, цилиндрические и плоские волны.

$\mathbf{1}^0$. Перейдем к постановке и решению задачи Коши для волнового уравнения в случае трех пространственных переменных.

Задача. *Найти функцию* $u(x,t)$, *где* $x = (x_1, x_2, x_3)$, *удовлетворяющую условиям*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right), \ t \geqslant 0, \\ u(x,0) = f(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \ x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \qquad (\mathbf{CP}_{n=3})$$

Здесь $f(x)$ *и* $g(x)$ *— заданные функции, причем* $f(x)$ *имеет во всем пространстве три непрерывные производные, а функция* $g(x)$ *— две:* $f(x) \in C^{(3)}(\mathbb{R}^3)$, $g(x) \in C^{(2)}(\mathbb{R}^3)$.

Выведем формулу, дающую явное выражение решения $u(x,t)$ задачи Коши ($\mathbf{CP}_{n=3}$) через начальные данные f и g. С этой целью определим *сферическое среднее* от заданной непрерывной функции $h = h(x)$ и изучим его свойства.

Определение. *Сферическим средним от непрерывной функции* $h(x)$ *называется функция* $I(x,r)$ *четырех вещественных переменных* (x_1, x_2, x_3) *и* $r \geqslant 0$, *задаваемая равенством*

$$I(x,r) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|y|=1} h(x+ry)\, dS_1. \qquad (\mathbf{M}_d)$$

Здесь $y = (y_1, y_2, y_3)$, $|y|^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$, т.е. интегрирование ведется по единичной сфере S_1 в пространстве переменных y. Интегрирование по сфере S_1 легко сводится к интегрированию по прямоугольнику с помощью перехода к сферическим координатам

$$y_1 = \cos\theta, \quad y_2 = \sin\theta\cos\varphi, \quad y_3 = \sin\theta\sin\varphi.$$

Элемент площади $dS_r(y)$ в переменных (r, θ, φ), где $r = |y|$, имеет вид $dS_r(y) = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$.

- Из определения следует, что
$$\lim_{r\to 0} I(x, r) = I(x, 0) = h(x). \qquad (\mathbf{M}_1)$$

- Сферическое среднее от тождественной постоянной — сама эта постоянная:
$$h(x) \equiv \mathrm{C} \quad \Rightarrow \quad I(x, r) = \mathrm{C}. \qquad (\mathbf{M}_2)$$

- Если функция $h(x)$ имеет m непрерывных производных, то соответствующее сферическое среднее $I(x, r)$ также имеет m непрерывных производных, что следует из известных правил дифференцирования интеграла по параметрам:
$$h(x) \in C^{(m)}(\mathbb{R}^3) \quad \Rightarrow \quad I(x, r) \in C^{(m)}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+). \qquad (\mathbf{M}_3)$$

Важнейшее для нас свойство сферического среднего сформулируем в виде теоремы.

Теорема (уравнение сферических средних). *Сферическое среднее $I(x, r)$ от произвольной дважды непрерывно дифференцируемой функции $h(x)$ удовлетворяет следующему уравнению:*

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\big(rI(x, r)\big) = \Delta_x\big(rI(x, r)\big). \qquad (\mathbf{M}_4)$$

Доказательство. Запишем интеграл, взятый от функции $h(y)$ по шару $B_R(x)$ с центром в точке x и радиуса R, как суперпозицию интегралов от $h(y)$ по концентрическим сферам $S_r(x)$ с общим центром — точкой x и радиусами r, $0 \leqslant r \leqslant R$:

$$\int\limits_{|z|\leqslant R} h(x+z)\,dz = \int\limits_0^R \left(\int\limits_{|z|=r} h(x+z)\,dS_r \right) dr.$$

Сделав в правой части замену $z = ry$, учтя, что $dS_r = r^2 dS_1$, а также определение ($\mathbf{M}_d$) сферического среднего, получим

$$\int\limits_{|z|\leqslant R} h(x+z)\,dz = \int\limits_0^R 4\pi r^2 I(x,r)\,dr.$$

Действуя на обе части этого равенства оператором Лапласа Δ_x, получаем

$$\Delta_x \Big(\int\limits_0^R 4\pi r^2 I(x,r)\,dr \Big) = \int\limits_{|z|\leqslant R} \Delta_x h(x+z)\,dz =$$

$$= \int\limits_{|z|\leqslant R} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial h}{\partial x_i}(x+z) \right] dz.$$

Применяя к интегралу по шару в правой части формулу Гаусса — Остроградского, имеем далее

$$\Delta_x \Big(\int\limits_0^R 4\pi r^2 I(x,r)\,dr \Big) = \int\limits_{|z|=R} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial h}{\partial x_i}(x+z)\nu_i\,dS_R.$$

Здесь $(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \nu$ — единичная внешняя нормаль к сфере S_R в точке z. Ясно, что $\nu_i = z_i/R$, $i = 1, 2, 3$. Сделав в интеграле по сфере замену $z = Ry$, придем к соотношению

$$\Delta_x\Big(\int\limits_0^R 4\pi r^2 I(x,r)\,dr\Big) = \int\limits_{|y|=1} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial h}{\partial x_i}(x+Ry) y_i R^2\,dS_1.$$

С другой стороны, продифференцировав обе части ($\mathbf{M}_d$) по r, положив $r = R$ и домножив полученное равенство на R^2, придем к соотношению

$$R^2\frac{\partial I}{\partial R}(x,R) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|y|=1} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial h}{\partial x_i}(x+Ry) y_i R^2\,dS_1.$$

Сравнивая два последних равенства, заключаем, что

$$4\pi R^2\frac{\partial I}{\partial R}(x,R) = \Delta_x\Big(\int\limits_0^R 4\pi r^2 I(x,r)\,dr\Big). \qquad (\mathbf{M'}_4)$$

Поочередно продифференцируем по R обе части равенства ($\mathbf{M'}_4$). Тогда слева получим выражение

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(4\pi R^2\frac{\partial I}{\partial R}(x,R)\right) = 4\pi R\left(R\frac{\partial^2 I}{\partial R^2}(x,R) + 2\frac{\partial I}{\partial R}(x,R)\right),$$

или, по формуле Лейбница:

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(4\pi R^2\frac{\partial I}{\partial R}(x,R)\right) = 4\pi R\frac{\partial^2}{\partial R^2}\Big(RI(x,R)\Big).$$

Дифференцируя по R правую часть равенства ($\mathbf{M'}_4$) и меняя местами операторы $\frac{\partial}{\partial R}$ и Δ_x, получаем

$$\frac{\partial}{\partial R}\left\{\Delta_x\left[\int\limits_0^R 4\pi r^2 I(x,r)\,dr\right]\right\} = \\ = \Delta_x\left\{\frac{\partial}{\partial R}\left[\int\limits_0^R 4\pi r^2 I(x,r)\,dr\right]\right\} = \\ = 4\pi\Delta_x\Big\{R^2 I(x,R)\Big\}.$$

Приравнивая найденные выражения производных по R, заключаем, что

$$4\pi R\frac{\partial^2}{\partial R^2}\Big(RI(x,R)\Big) = 4\pi\Delta_x\Big(R^2 I(x,R)\Big).$$

Сокращая обе части этого равенства на $4\pi R$, приходим к нужному нам дифференциальному уравнению ($\mathbf{M}_4$) для сферических средних. $\square$

Перепишем уравнение ($\mathbf{M}_4$) в эквивалентном виде, введя обозначение

$$(\Omega_r h)(x) \equiv rI(x,r) = \frac{r}{4\pi}\int\limits_{|y|=1} h(x+ry)\,dS_1.$$

Имеем, очевидно:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \Delta_x\right)(\Omega_r h)(x) = 0. \qquad (\mathbf{M}_4)$$

Полагая здесь $r = at$, получаем соотношение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta_x\right)(\Omega_{at} h)(x) = 0. \qquad (\mathbf{M}_4'')$$

Следствие. *Любую два раза непрерывно дифференцируемую функцию* $h(x)$ *оператор* Ω_{at} *переводит в решение* $\Omega_{at}h(x)$ *волнового уравнения в пространстве переменных* (x,t).

Последнее замечание указывает нам вполне регулярный способ получения частных решений трехмерного волнового уравнения.

$\mathbf{2}^0$. Продолжим рассмотрение задачи Коши для трехмерного волнового уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right),\ t>0, \\ u(x,0)=f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x),\ x\in\mathbb{R}^3. \end{cases} \qquad (\mathbf{CP}_{n=3})$$

Здесь $f(x)$ и $g(x)$ — заданные функции, причем $f(x)\in C^{(3)}(\mathbb{R}^3)$, а $g(x)\in C^{(2)}(\mathbb{R}^3)$. Предположив, что у задачи ($\mathbf{CP}_{n=3}$) существует гладкое решение $u(x,t)$, получим явное его представление через варьируемые данные $f(x)$ и $g(x)$ задачи.

Зафиксировав точку x из $\mathbb{R}^3$, образуем функцию $\Omega_r u(x,t)$ двух переменных $r\geqslant 0$ и $t\geqslant 0$:

$$\Omega_r u(x,t) \equiv rI(x,r) = \frac{r}{4\pi}\int\limits_{|y|=1} u(x+ry,t)\,dS_1.$$

Покажем, что в переменных (r,t) эта функция является решением одномерного волнового уравнения:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\Omega_r u(x,t) = 0. \qquad (1)$$

Имеем, используя уже установленное соотношение ($\mathbf{M}_4$):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\Omega_r u(x,t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta_x\right)\Omega_r u(x,t).$$

Меняя местами операторы $\left(\partial^2/\partial t^2 - a^2\Delta_x\right)$ и Ω_r в правой части этого равенства, приходим к соотношению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\Omega_r u(x,t) = \Omega_r\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta_x\right)u\right\}.$$

Аргумент оператора Ω_r в правой части, согласно условию, что $u(x,t)$ является решением трехмерного волнового уравнения, является тождественно нулевой функцией. Учитывая это и пользуясь равенством $\Omega_r\{0\} = 0$, получаем уравнение (1).

Из начальных данных задачи (**CP**$_{n=3}$) и определения $\Omega_r u$ получаем данные Коши для функции $\Omega_r u(x,t)$ при $t = 0$:

$$\begin{cases} \Omega_r u(x,0) = \Omega_r f(x) \\ \dfrac{\partial(\Omega_r u)}{\partial t}(x,0) = \Omega_r g(x) \end{cases} \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^3. \tag{2}$$

Напомним, что параметр r здесь положителен. Пользуясь непрерывностью функции $u(x,t)$ имеем, очевидно:

$$\Omega_r u(x,t)\big|_{r=0} = \lim_{r\to 0}\frac{r}{4\pi}\int\limits_{|y|=1} u(x+ry,t)\,dS_1 = 0. \tag{3}$$

3^0. Уравнение (1) и условия (2)–(3) составляют вместе краевую задачу для $\Omega_r u(x,t)$ в квадранте $r \geqslant 0$, $t \geqslant 0$. Эта задача уже решена нами и полученная для ее решения формула имеет составной вид. В углах

$$\{0 \leqslant r < \infty,\ t \geqslant 0,\ at \leqslant r\} \quad \text{и} \quad \{0 \leqslant r < \infty,\ t \geqslant 0,\ at > r\}$$

функция $\Omega_r u(x,t)$ выражается через данные краевой задачи по-разному. При $0 \leqslant r \leqslant at$ в соответствии с формулой (**MP**$_{\mathbf{II}}$)

имеем

$$\Omega_r u(x,t) = \frac{1}{2}\Big[\Omega_{at+r}f(x) - \Omega_{at-r}f(x)\Big] + \frac{1}{2a}\int\limits_{at-r}^{at+r}\Omega_\xi g(x)\,d\xi. \qquad (4)$$

Согласно свойству (**M**$_1$) сферического среднего и непрерывности функции $u(x,t)$ выполняется равенство

$$u(x,t) = \lim_{r\to 0} I(x,r) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\Omega_r u(x,t). \qquad (5)$$

Заметим, что если момент времени $t>0$ фиксирован, то при достаточно малых r неравенство $r-at<0$ заведомо выполнено, т.е. для отыскания $\Omega_r u(x,t)$ применимо представление (4). Подставив его в правую часть равенства (5), вычислим соответствующий предел.

Учитывая, что $2r = (at+r)-(at-r)$, имеем

$$\lim_{r\to 0}\frac{\Omega_{at+r}f(x) - \Omega_{at-r}f(x)}{2r} = \frac{\partial}{\partial\zeta}\big(\Omega_\zeta f\big)(x)\Big|_{\zeta=at}. \qquad (6)$$

Аналогично:

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{2ar}\int\limits_{at-r}^{at+r}\Omega_\xi g(x)\,d\xi = \frac{1}{a}\,\Omega_\xi g(x)\Big|_{\xi=at}. \qquad (7)$$

Равенства (5)—(7) приводят в итоге к соотношению

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\Omega_\zeta f(x)\right)\Big|_{\zeta=at} + \frac{1}{a}\,\Omega_\xi g(x)\Big|_{\xi=at}.$$

Подставляя сюда выражения функций $\Omega_\zeta f(x)$ и $\Omega_\xi g(x)$ в соответствии с их определением, приходим к *формуле Кирхгофа*:

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{t}{4\pi}\int\limits_{|y|=1} f(x+aty)dS_1\Big) + \frac{t}{4\pi}\int\limits_{|y|=1} g(x+aty)dS_1. \qquad (\mathbf{KF})$$

Метод, использованный выше для ее вывода, был предложен Пуассоном. Отметим, что при $f \in C^{(3)}(\mathbb{R}^3)$ и $g \in C^{(2)}(\mathbb{R}^3)$ функция $u(x,t)$, получаемая по формуле Кирхгофа, имеет всюду в полупространстве $t > 0$ вторые непрерывные производные.

4^0. Сформулируем общую теорему о разрешимости задачи Коши для трехмерного волнового уравнения.

Теорема (существования и единственности решения)**.** *Если начальные данные $f(x)$ и $g(x)$ в задаче Коши (**CP**$_{n=3}$) достаточно гладкие, т.е. $f \in C^{(3)}(\mathbb{R}^3)$ и $g \in C^{(2)}(\mathbb{R}^3)$, то ее решение $u = u(x,t)$ существует, единственно и задается формулой Кирхгофа (**KF**).*

Доказательство. Если $u(x,t)$ — гладкое решение рассматриваемой задачи Коши, то уже доказано, что эта функция выражается через f и g по формуле (**KF**). Тем самым, решение задачи Коши единственно.

Чтобы доказать существование, достаточно установить, что правая часть формулы Кирхгофа удовлетворяет всем требуемым условиям, т.е. волновому уравнению и начальным данным. Проделайте это самостоятельно, опираясь на установленные выше свойства сферических средних. $\square$

Замечание. *В полупространстве $t > 0$ равенство (**KF**) можно рассматривать как формулу общего решения трехмерного волнового уравнения. В самом деле, если $u(x,t)$ — произвольное решение трехмерного волнового уравнения, и при этом $u(x,0) \in C^{(3)}(\mathbb{R}^3)$, а $\partial u/\partial t\,(x,0) \in C^{(2)}(\mathbb{R}^3)$, то, очевидно, равенство (**KF**) имеет место с данными*

$$f(x) \equiv u(x,0) \quad \text{и} \quad g(x) \equiv \frac{\partial u}{\partial t}(x,0).$$

5^0. Пользуясь формулой Кирхгофа, сделаем ряд заключений о распространении волн в трехмерном пространстве.

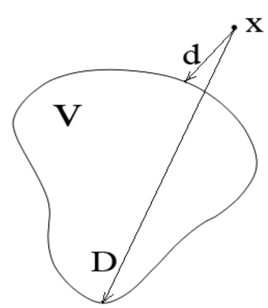
Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$ — точка из $\mathbb{R}^3$, V — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$, $S = \partial V$ — граница V. Предположим, что функция $u(x,t)$ — решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) \quad \text{при} \quad t > 0$$

и что в начальный момент времени значения $u(x,t)$ и ее производной по t сосредоточены в области V:

$$\begin{cases} f(y) \equiv u(y,0) = 0 \\ \\ g(y) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(y,0) = 0 \end{cases} \quad \text{для} \quad \forall\, y\colon y \notin V.$$

В этом случае говорят также, что носители функций $f(y)$ и $g(y)$ содержатся в V. Для точки $x = (x_1, x_2, x_3)$ вне V обозначим наименьшее и наибольшее расстояния от нее до $S = \partial V$ через d и D соответственно.



Выясним, как ведет себя функция $u(x,t)$ в выбранной точке x с изменением t. Чтобы найти $u(x,t)$, достаточно воспользоваться формулой Кирхгофа. Оба интеграла в формуле (**KF**) берутся по сфере $S_{at}(x)$ с центром в точке x и радиуса at.

Если $0 < t < d/a$, то сфера $S_{at}(x)$ не пересекается с областью V, и тем самым, оба упомянутых интеграла берутся от тождественно нулевой функции. Следовательно, при этих t значения $u(x,t)$ равны нулю. Иными словами, при $0 < t < d/a$ в точке x всякие возмущения отсутствуют.

Далее, при $d/a \leqslant t \leqslant D/a$ сфера $S_{at}(x)$ имеет с областью V непустое пересечение. Следовательно, значения $u(x,t)$ при этих t, вообще говоря, отличаются от нуля. Иными словами, в этот временной интервал "начальные возмущения доходят до точки x". Наконец, при $t > D/a$ сфера $S_{at}(x)$ с областью V снова не пересекается, т.е. при $t > D/a$ волны в точке x уже нет: $u(x,t) = 0$.

Подобное поведение волн принято описывать с помощью понятий "переднего" и "заднего" фронтов.

Определение. *В данный момент времени t_0 передним фронтом волны называется поверхность в $\mathbb{R}^3$, отделяющая точки пространства, которые еще не начали колебаться, от тех, которые уже колеблются.*

Из приведенных выше рассуждений вытекает, что все точки переднего фронта волны в момент времени t_0 отстоят от поверхности $S = \partial V$ на расстояние, равное at_0. Таким образом, передний фронт волны в момент времени t_0 образуют лежащие вне области V точки поверхности, огибающей семейство сфер с центрами на границе S и одинакового радиуса at_0.

Определение. *Задний фронт волны — это поверхность в $\mathbb{R}^3$, отделяющая точки пространства, которые уже перестали колебаться, от тех, которые еще колеблются.*

Скорость распространения волновых фронтов в рассмотренном нами случае постоянна и равна a. Наличие у волны в трехмерном пространстве переднего и заднего фронтов, называется *принципом Гюйгенса*.

Если в трехмерном пространстве, в котором распространяется волна, имеются препятствия, то принцип Гюйгенса не выполняется.

6^0. Среди всевозможных решений волнового уравнения принято выделять специальные классы *сферических, цилиндрических и плоских волн*. Дадим соответствующие определения.

Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — точка из $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $t > 0$.

Определение. *Решение* $u(x,t)$ *волнового уравнения*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right) = 0 \;\Leftrightarrow\; \Box_a u = 0$$

называется сферической волной, если оно имеет вид

$$u = u(r,t), \quad \text{где} \quad r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

В фиксированный момент времени поверхности уровня сферической волны, а значит, и ее фронты, совпадают с концентрическими сферами $|x| = R$.

Найдем общий вид сферической волны при $n = 3$. Сосчитаем дифференциальное выражение $\Box_a u(x,t)$, учтя равенство $u = u(|x|, t)$. Имеем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \frac{x_j}{r} \right),$$

и далее:

$$\Box_a u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \frac{x_j^2}{r^2} - a^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial r} \left(\frac{1}{r} - \frac{x_j^2}{r^3} \right) =$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - a^2 \frac{n-1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial u}{\partial r} \right).$$

Таким образом, уравнение $\Box_a u(x,t) = 0$ в случае сферической волны принимает вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0. \qquad (\mathbf{W}_{sc})$$

Пусть $n \geqslant 3$ и $w = r^{n-2} u$, тогда

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - (n-3) \frac{\partial w}{\partial r}.$$

Подставляя это равенство в уравнение ($\mathbf{W}_{sc}$) и домножая результат на r^{n-2}, получаем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + a^2 \frac{n-3}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = 0.$$

При $n = 3$ это уравнение сильно упрощается, принимая вид одномерного волнового уравнения в квадранте:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = 0 \quad \text{при} \quad t > 0, r > 0.$$

В соответствии с формулой общего решения для одномерного волнового уравнения существуют такие дважды непрерывно дифференцируемые функции f и g одной переменной, что

$$w(r,t) = f(r - at) + g(r + at).$$

Следствие. *Произвольная сферическая волна в трехмерном пространстве представима в виде*

$$u(|x|,t) = \frac{f(|x| - at) + g(|x| + at)}{|x|},$$

где f и g — некоторые дважды непрерывно дифференцируемые функции одной переменной.

Упражнение. *Для каких функций f и g существуют:*
а). конечный предел $u(|x|,t)$ при $|x| \to 0$?
б). конечные пределы $u_{x_j}(|x|,t)$, $u_t(|x|,t)$ при $|x| \to 0$?
в). конечные пределы $u_{x_jx_j}(|x|,t)$ при $|x| \to 0$?

Дадим определение *цилиндрической волны* в трехмерном пространстве.

Определение. *Решение $u(x_1, x_2, x_3, t)$ трехмерного волнового уравнения называется цилиндрической волной, если оно имеет вид*

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = u(\rho, t), \quad \text{где} \quad \rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

В фиксированный момент времени t поверхности уровня цилиндрической волны, а значит и ее фронты, совпадают с соосными цилиндрами $\rho = R$ в пространстве (x_1, x_2, x_3).

Цилиндрическая волна $u = u(\rho, t)$ является в переменных (ρ, t) решением следующего уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) = 0.$$

В качестве упражнения убедитесь в этом самостоятельно.

Лекция 3.

Тема II. Задачи для трехмерного и двумерного волновых уравнений. $\mathbf{6}^0$. Сферические, цилиндрические и плоские волны. $\mathbf{7}^0$. Вывод формулы Пуассона методом спуска. $\mathbf{8}^0$. Принцип Дюамеля для неоднородного волнового уравнения. $\mathbf{9}^0$. Запаздывающий потенциал.

$\mathbf{6}^0$. Еще один важный класс решений волнового уравнения образуют *плоские волны*. Дадим соответствующее определение в случае функций многих переменных и линейных уравнений более общего вида чем волновое, но прежде условимся об обозначениях.

Вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ с неотрицательными целыми координатами называют *мультииндексом*. Порядком мультииндекса α называют сумму его компонент:

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \geqslant 0.$$

Для любого вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ из $\mathbb{R}^n$ функция ξ^α, где α — мультииндекс, определяется равенством

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \ldots \xi_n^{\alpha_n}.$$

Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Частное дифференцирование по переменной x_i обозначим как D_i, т.е. положим

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Составим вектор $D = (D_1, \ldots, D_n)$, тогда $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \ldots D_n^{\alpha_n}$.

Если $|\alpha| = m > 0$, то для функции $u = u(x)$, обладающей непрерывными производными порядка m, определены смешанные производные порядка m:

$$D^\alpha u(x) \equiv \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \forall\, \alpha : \ |\alpha| = m.$$

Предположим, что всякому мультииндексу $\alpha\colon |\alpha| \leqslant m$ сопоставлена функция $a_\alpha = a_\alpha(x)$. Выражение вида

$$L(x, D) \equiv \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

называется *линейным дифференциальным оператором* с коэффициентами a_α, $|\alpha| \leqslant m$. Предполагается, что при всех x среди коэффициентов $a_\alpha(x)$, соответствующих мультииндексам старшего порядка m, имеется по крайней мере один ненулевой и тогда говорят, что оператор $L(x, D)$ имеет порядок m.

Старшей частью линейного дифференциального оператора $L(x, D)$ называют оператор

$$L_0(x, D) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) D^\alpha.$$

Если оператор $L(x, D)$ совпадает со своей старшей частью, то его называют *однородным*.

Если все коэффициенты a_α оператора $L(x, D)$ не зависят от x, то говорят об *операторе с постоянными коэффициентами*.

Заменяя в $L_0(x, D)$ операторы частного дифференцирования D_i на переменные ξ_i, получаем соответствующий $L(x, D)$ *характеристический полином*

$$P_m(\xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

Рассмотрим в пространстве переменных ξ поверхность $P_m(\xi) = 0$. Это — коническая поверхность, ибо вместе с вектором ξ, лежащим на ней, там же лежит и вектор $\lambda\xi$ для любого $\lambda > 0$. Последнее замечание сразу же следует из однородности характеристического полинома $P_m(\xi)$.

Ненулевой вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ называется *характеристической нормалью* (характеристическим направлением) для линейного уравнения $L(x, D)u = 0$, если ξ удовлетворяет равенству $P_m(\xi) = 0$. В этой связи равенство $P_m(\xi) = 0$ называют *уравнением конуса характеристических направлений* (нормалей).

Область определения оператора $L(x, D)$ порядка m— это множество функций $\vec{u} = \vec{u}(x)$, имеющих непрерывные производные порядка m. Область же его значений в этом случае содержится в пространстве непрерывных функций.

Пусть линейный дифференциальный оператор $L(x, D)$ однороден и имеет постоянные коэффициенты. Рассмотрим соответствующее ему дифференциальное уравнение

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha u = 0. \tag{$\mathbf{E}_m$}$$

Определение. *Функция $u = u(x_1, \dots, x_n)$, являющаяся решением уравнения ($\mathbf{E}_m$), называется решением типа плоской волны, если существуют такие вектор $N = (N_1, \dots, N_n) \not\equiv 0$ и функция $\psi = \psi(\xi)$ одной переменной, что $u(x)$ представима в виде*

$$u(x) = \psi(N_1 x_1 + \dots + N_n x_n) \equiv \psi(Nx). \tag{$\mathbf{PW}$}$$

При этом предполагается, что $\psi(\xi)$ не является полиномом степени $\leqslant m - 1$.

Заметим, что любой полином степени $\leqslant m - 1$ решением уравнения ($\mathbf{E}_m$) является, но этот вырожденный случай из определения плоских волн исключен.

Поверхности уровня плоской волны, а значит и ее фронты, совпадают с семейством параллельных плоскостей

$$N_1x_1 + N_2x_2 + \cdots + N_nx_n = C.$$

Выясним, при каких условиях функция (**PW**) решает уравнение ($\mathbf{E}_m$). После подстановки равенства $u(x) = \psi(Nx)$ в исходное уравнение ($\mathbf{E}_m$) получим

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha N_1^{\alpha_1} \dots N_n^{\alpha_n} \psi^{(m)}(Nx) = 0.$$

По условию найдется ненулевое вещественное число ξ такое, что $\psi^{(m)}(\xi) \neq 0$. Взяв в последнем равенстве $Nx = \xi$, заключаем, что оно может выполняться лишь при условии, что

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha N_1^{\alpha_1} \dots N_n^{\alpha_n} = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha N^\alpha = 0. \qquad (\mathbf{PW}')$$

Это означает, что *вектор N принадлежит конусу характеристических нормалей уравнения* ($\mathbf{E}_m$), который тем самым обязан содержать ненулевые векторы.

Обратно, *если вектор $N = (N_1, \dots, N_n)$ принадлежит конусу характеристических нормалей уравнения* ($\mathbf{E}_m$), *то функция $u(x) = \psi(Nx)$ является решением типа плоской волны* этого самого уравнения.

Замечание. *Если конус характеристических нормалей уравнения содержит единственный вещественный вектор — тождественный нуль, то уравнение не может иметь решений типа плоской волны.*

Пример. Многомерное волновое уравнение $\Box_a u = 0$ имеет следующие решения типа плоской волны:

$$u(x,t) = \psi(\omega t - kx), \quad \text{где} \quad kx = \sum_{j=1}^{n} k_j x_j,$$

а вектор $(k_1, \ldots, k_n, \omega)$ принадлежит конусу характеристических нормалей волнового уравнения:

$$\omega^2 = a^2|k|^2 = a^2 \sum_{j=1}^{n} k_j^2.$$

7^0. Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения в случае двух пространственных переменных $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) = 0, \ \ t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \qquad (\mathbf{CP}_{n=2})$$

Здесь $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные функции, причем $\varphi(x) \in C^{(3)}(\mathbb{R}^2)$, а $\psi(x) \in C^{(2)}(\mathbb{R}^2)$. Выразим функцию $u = u(x_1, x_2, t)$ явно через начальные данные задачи ($\mathbf{CP}_{n=2}$).

Продолжим решение $u = u(x_1, x_2, t)$ задачи ($\mathbf{CP}_{n=2}$) до функции $v(x_1, x_2, x_3, t)$, положив $v(x_1, x_2, x_3, t) = u(x_1, x_2, t)$. Ясно, что так определенная функция v является решением следующей задачи Коши для трехмерного волнового уравнения в пространстве переменных $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ и $t > 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} \right) = 0, \\ v(x_1, x_2, x_3, 0) = \varphi(x_1, x_2), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(x_1, x_2, x_3, 0) = \psi(x_1, x_2). \end{cases} \qquad (\mathbf{CP}'_{n=3})$$

Воспользовавшись для решения задачи ($\mathbf{CP}'_{n=3}$) формулой Кирхгофа, получим явное представление искомой функции:

$$u(x_1,x_2,t)=\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{t}{4\pi}\int\limits_{y_1^2+y_2^2+y_3^2=1}\varphi(x_1+aty_1,x_2+aty_2)\,dS_1\Big)+$$

$$+\frac{t}{4\pi}\int\limits_{y_1^2+y_2^2+y_3^2=1}\psi(x_1+aty_1,x_2+aty_2)\,dS_1.$$

Каждый из интегралов в правой части полученного равенства представим как сумму двух интегралов, первый из которых берется по верхней полусфере

$$\{y_3\geqslant 0,\quad y_1^2+y_2^2+y_3^2=1\}$$

единичной сферы, второй же — по ее нижней части

$$\{y_3<0,\quad y_1^2+y_2^2+y_3^2=1\}.$$

В случае, когда подынтегральные выражения не зависят от y_3, указанные интегралы по полусферам между собой равны. Таким образом, имеем

$$\int\limits_{y_1^2+y_2^2+y_3^2=1}h(x_1+aty_1,x_2+aty_2)\,dS_1=$$

$$=2\int\limits_{y_1^2+y_2^2+y_3^2=1,\ y_3\geqslant 0}h(x_1+aty_1,x_2+aty_2)\,dS_1.$$

Здесь $h=h(x_1,x_2)$ — это либо $\varphi(x_1,x_2)$, либо $\psi(x_1,x_2)$. Уравнение верхней полусферы запишем виде

$$y_3=\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}\equiv z(y_1,y_2).$$

Как известно из математического анализа, элемент площади dS при этом имеет вид

$$dS = \sqrt{1 + z_{y_1}^2 + z_{y_2}^2}\, dy_1 dy_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}}\, dy_1 dy_2.$$

Проекция верхней полусферы на плоскость $y_3 = 0$ представляет собой единичный круг $\{(y_1, y_2) \mid y_1^2 + y_2^2 \leqslant 1\}$. Поэтому

$$\int\limits_{|y|=1} h(x_1 + aty_1, x_2 + aty_2)\, dS = 2 \int\limits_{y_1^2 + y_2^2 \leqslant 1} \frac{h(x_1 + aty_1, x_2 + aty_2)}{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}}\, dy_1 dy_2.$$

Пользуясь этой формулой дважды, приходим в итоге к равенству

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big\{ \frac{t}{2\pi} \int\limits_{y_1^2 + y_2^2 \leqslant 1} \frac{\varphi(x_1 + aty_1, x_2 + aty_2)}{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}}\, dy_1 dy_2 \Big\} + \frac{t}{2\pi} \int\limits_{y_1^2 + y_2^2 \leqslant 1} \frac{\psi(x_1 + aty_1, x_2 + aty_2)}{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}}\, dy_1 dy_2. \qquad (\mathbf{PF})$$

Это — *формула Пуассона*, дающая решение задачи Коши для двумерного волнового уравнения. Метод, с помощью которого формула (**PF**) была получена, был предложен французским академиком Ж. Адамаром (1865–1963).

Из формулы Пуассона следует, в частности, что *в случае двух пространственных переменных распространение возмущений, сосредоточенных в начальный момент времени в ограниченной плоской области, происходит таким образом, что передний фронт волны существует, в то время как задний ее фронт отсутствует*.

Следовательно, в двумерном пространстве принцип Гюйгенса места не имеет. Вообще, в пространстве четной размерности принцип Гюйгенса несправедлив.

8^0. Рассмотрим задачу Коши для неоднородного волнового уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\Delta u = f(x,t) & \text{при} \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x) & \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) & \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \qquad (\mathbf{CP}_n)$$

Здесь $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а n принадлежит $\{1, 2, 3\}$. Функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x,t)$ таковы, что при $n = 2$ или $n = 3$ справедливы включения

$$\varphi(x) \in C^{(3)}(\mathbb{R}^n), \quad \psi(x) \in C^{(2)}(\mathbb{R}^n), \quad f(x,t) \in C^{(2)}(t \geqslant 0).$$

Если же $n = 1$, то требуется, чтобы

$$\varphi(x) \in C^{(2)}(\mathbb{R}), \quad \psi(x) \in C^{(1)}(\mathbb{R}), \quad f(x,t) \in C^{(1)}(t \geqslant 0).$$

Функцию $u(x,t)$ требуется найти при $t > 0$, начальные данные $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ заданы на всем пространстве.

Предположив сначала, что $\varphi(x) = \psi(x) = 0$, найдем решение $v(x,t)$ следующей задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\Delta v = f(x,t) & \text{при} \quad t > 0, \\ v(x,0) = \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0) = 0 & \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Решение такой задачи Коши получается с помощью *принципа Дюамеля*. Дадим его общую формулировку в виде леммы.

Лемма (принцип Дюамеля)**.** *Пусть коэффициенты линейного оператора* $L(x,D) \equiv \sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha$ *непрерывны на всем* $\mathbb{R}^n$*. Если функция* $w(x,t,\tau)$ *переменных* $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}_+$ *и* $\tau \in \mathbb{R}_+$ *является гладким решением задачи Коши*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = L(x,D)w, & t > 0,\ \tau > 0, \\ \quad w(x,0,\tau) = 0, & \\ \dfrac{\partial w}{\partial t}(x,0,\tau) = f(x,\tau), & x \in \mathbb{R}^n,\ \tau > 0, \end{cases} \qquad (\mathbf{CP}_0)$$

то задаваемый равенством $v(x,t) \equiv \int\limits_0^t w(x,t-\tau,\tau)\,d\tau$ *интеграл Дюамеля* $v(x,t)$ *является решением следующей задачи Коши для неоднородного уравнения:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = L(x,D)v + f(x,t) & t > 0, \\ v(x,0) = \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \qquad (\mathbf{CP}_f)$$

Доказательство. Покажем, что интеграл Дюамеля $v(x,t)$ решает задачу ($\mathbf{CP}_f$). Из непрерывности $w(x,t,\tau)$ следует, что $v(x,0) = 0$. Далее, пользуясь правилом дифференцирования интеграла по параметру, имеем:

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = w(x,t-\tau,\tau)\Big|_{\tau=t} + \int\limits_0^t \frac{\partial w}{\partial t}(x,t-\tau,\tau)\,d\tau.$$

По условию $w(x,0,t) = 0$, поэтому

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = \int\limits_0^t \frac{\partial w}{\partial t}(x,t-\tau,\tau)\,d\tau.$$

В частности, при $t = 0$ имеем $\frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = 0$. Продифференцировав $v(x, t)$ по t еще раз, получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial w}{\partial t}(x, t-\tau, \tau)\Big|_{\tau=t} + \int\limits_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t-\tau, \tau)\, d\tau.$$

Согласно условию, $\frac{\partial w}{\partial t}(x, 0, t) = f(x, t)$, а также

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t, \tau) = L(x, D)w(x, t, \tau).$$

Подставив эти соотношения в предыдущее равенство, получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, t) = f(x, t) + \int\limits_0^t L(x, D)w(x, t-\tau, \tau)\, d\tau.$$

Вынося оператор $L(x, D)$ за знак интеграла, что возможно в силу гладкости $w(x, t, \tau)$ и известных теорем математического анализа о дифференцировании интегралов, имеем

$$\int\limits_0^t L(x, D)w(x, t-\tau, \tau)\, d\tau =$$

$$= L(x, D)\Big[\int\limits_0^t w(x, t-\tau, \tau)\, d\tau\Big] = L(x, D)v(x, t).$$

Таким образом, функция $v(x, t)$ удовлетворяет всем условиям задачи Коши (**CP**$_f$). $\square$

Применим принцип Дюамеля к задаче Коши для одномерного волнового уравнения с нулевыми начальными данными. В этом случае находим по формуле Даламбера:

$$w(x,t,\tau) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} f(\xi,\tau)\,d\xi.$$

Подставляя это выражение в интеграл Дюамеля, получаем

$$v(x,t) = \int\limits_0^t w(x,t-\tau,\tau)\,d\tau = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

Определенная таким образом функция $v(x,t)$ дает частное решение одномерного неоднородного волнового уравнения.

Таким образом, решение задачи Коши для неоднородного одномерного волнового уравнения имеет вид:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} +$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

9^0. В случае трехмерного неоднородного волнового уравнения по формуле Кирхгофа имеем

$$w(x,t,\tau) = \frac{t}{4\pi}\int\limits_{y_1^2+y_2^2+y_3^2=1} f(x+aty,\tau)\,dS_1.$$

Таким образом, для интеграла Дюамеля получается следующее выражение:

$$v(x,t) = \int\limits_0^t \frac{(t-\tau)}{4\pi}\int\limits_{|y|=1} f(x+a(t-\tau)y,\tau)\,dS_1\,d\tau.$$

Во внутреннем интеграле по dS_1 сделаем замену

$$z = x + a(t-\tau)y \;\Leftrightarrow\; y = \frac{z-x}{a(t-\tau)}.$$

При этом единичная сфера $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$ переходит в сферу

$$\{z \in \mathbb{R}^3 \mid |z-x| = a(t-\tau)\},$$

а элемент площади dS_1 преобразуется к виду

$$dS_1 = \frac{1}{a^2(t-\tau)^2} dS_{a(t-\tau)}.$$

В соответствии с этим интеграл Дюамеля $v(x,t)$ запишется так:

$$\frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)} \int\limits_{|z-x|=a(t-\tau)} f(z,\tau)\, dS_{a(t-\tau)}\, d\tau.$$

Сделав в интеграле по $d\tau$ замену $\tau = t - r/a$, при которой $r = a(t-\tau)$, $d\tau = -dr/a$, приходим к следующей формуле для интеграла Дюамеля:

$$v(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_0^{at} \frac{1}{r} \int\limits_{|z-x|=r} f(z, t-\frac{r}{a})\, dS_r\, dr.$$

Учтем здесь равенство $dS_r dr = dz$, а также тот факт, что объединение семейства концентрических сфер с общим центром x по всем r от 0 до at представляет собой шар с центром в той же точке x:

$$\{z \in \mathbb{R}^3 : |z-x| \leqslant at\} = \bigcup_{r=0}^{at} \{z \in \mathbb{R}^3 : |z-x| = r\}.$$

В итоге получим следующее представление интеграла Дюамеля:

$$v(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_{|z-x|\leqslant at} \frac{f(z, t - \frac{|z-x|}{a})}{|z-x|}\, dz. \qquad (\mathbf{RP})$$

Выражение в правой части равенства (**RP**) называется *запаздывающим потенциалом*.

Упражнение. *Найдите интеграл Дюамеля в случае задачи Коши для двумерного волнового уравнения.*

Лекция 4.

ТЕМА: Решения уравнения Гельмгольца в сферических координатах. $\mathbf{1}^0$. Вид уравнения Гельмгольца в сферических координатах. Разделение переменных. $\mathbf{2^0}$. Уравнение трехмерных сферических гармоник в угловых переменных. $\mathbf{3^0}$. Теорема об ограниченных решениях уравнения Лежандра. Формула Родрига для полиномов Лежандра. $\mathbf{4^0}$. Присоединенные функции Лежандра. Базис пространства сферических гармоник в случае трех независимых переменных. $\mathbf{5^0}$. Уравнение для радиальной части решения. Сферические функции Бесселя.

$\mathbf{1}^0$. Предметом нашего внимания в настоящей лекции является однородное *уравнение Гельмгольца*:

$$\Delta u + \nu^2 u = 0, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3. \tag{\textbf{H}}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, $u = u(x)$ — искомая функция, ν^2 — положительное вещественное число. Нас будет интересовать решения этого уравнения, записанные в сферических координатах.

Сферические координаты (r, θ, φ) связаны с декартовыми соотношениями

$$\begin{cases} x_3 = & r\cos\theta, \\ x_1 = & r\sin\theta\cos\varphi, \\ x_2 = & r\sin\theta\sin\varphi, \end{cases}$$

где $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Сферические координаты ортогональны и при переходе к ним оператор Лапласа Δ_x преобразуется по формуле

$$\Delta_x = \Delta_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{(\theta,\varphi)}. \tag{$\boldsymbol{\Delta}_{r,\theta}$}$$

Здесь радиальная часть Δ_r оператора задается равенством

$$\Delta_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right), \tag{$\boldsymbol{\Delta}_r$}$$

а угловая его часть $\Delta_{(\theta,\varphi)}$ представляет собой сумму вида

$$\Delta_{(\theta,\varphi)} \equiv \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Таким образом, уравнение Гельмгольца в переменных (r,θ,φ) принимает следующий вид

$$\Delta_r u + \frac{1}{r^2}\Delta_{(\theta,\varphi)}u + \nu^2 u = 0. \qquad (\mathbf{H}_{r,\theta})$$

Задача. *Найти решения $u(x)$ однородного уравнения Гельмгольца, допускающие разложение вида $u(x) = R(r)Y(\theta,\varphi)$.*

Подставляя произведение $R(r)Y(\theta,\varphi)$ в уравнение ($\mathbf{H}_{r,\theta}$) вместо u, получим

$$\Delta_r(R)Y(\theta,\varphi) + \frac{1}{r^2}R(r)\Delta_{(\theta,\varphi)}(Y) + \nu^2 R(r)Y(\theta,\varphi) = 0.$$

Домножив обе части этого равенства на отношение $\dfrac{r^2}{R(r)Y(\theta,\varphi)}$ и произведя перегруппировку слагаемых, придем к равенству

$$-r^2\frac{\Delta_r(R)}{R} - \nu^2 r^2 = \frac{\Delta_{(\theta,\varphi)}Y}{Y}.$$

Левая его часть зависит только от радиальной переменной r, а правая — только от угловых переменных (θ,φ). Такое возможно лишь если найдется такая константа λ, с которой выполняются следующие два соотношения

$$\Delta_{(\theta,\varphi)}Y + \lambda Y = 0, \qquad (\mathbf{SH})$$

$$\left(r^2 R'\right)' + (\nu^2 r^2 - \lambda)R = 0. \qquad (\mathbf{RF})$$

Исследуем эти дифференциальные уравнения детально. Начнем с уравнения (**SH**) для угловой части искомого решения.

Определение. *Нетривиальное решение* $Y(\theta,\varphi)$ *уравнения* (**SH**), *определенное при всех*

$$(\theta,\varphi): \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi,$$

и принадлежащее пространству $C^{(2)}(S)$ *дважды непрерывно дифференцируемых на единичной сфере* S *функций, называется сферической гармоникой.*

Линейное дифференциальное уравнение (**SH**) имеет нетривиальное решение $Y(\theta,\varphi)$ класса $C^{(2)}(S)$ далеко не при всех значениях λ. Как будет доказано, сферические гармоники существуют лишь при условии, что $\lambda = k(k+1)$, где k — целое, $k \geqslant 0$. Решения уравнения (**SH**) при $\lambda = k(k+1)$, принято обозначать через $Y_k(\theta,\varphi)$. Параметр k при этом называют *порядком* сферической гармоники $Y_k(\theta,\varphi)$.

$\mathbf{2^0}$. В случае трехмерного пространства с декартовыми координатами (x_1,x_2,x_3) базис в пространстве сферических гармоник заданного порядка удается построить в явном виде методом разделения переменных.

Задача. *Найти общий вид сферической гармоники порядка* k *при* $n=3$.

Соответствующие угловой части собственные числа определяются соотношениями

$$\lambda_k = k(k+1), \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

а уравнение сферических гармоник порядка k записывается следующим образом

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + k(k+1)Y = 0. \tag{1}$$

Размерность $\sigma_3(k)$ пространства решений уравнения сферических гармоник (1), периодических по φ с периодом 2π и ограниченных по θ на замкнутом отрезке $[0, \pi]$, определяется при $n = 3$ следующей формулой:

$$\sigma_3(k) = (n + 2k - 2)\frac{(n + k - 3)!}{k!(n - 2)!}\bigg|_{n=3} = 2k + 1.$$

Таким образом, для построения искомого базиса в пространстве сферических гармоник порядка k достаточно найти $2k + 1$ линейно независимое решение уравнения (1), обладающее по переменным (θ, φ) требуемой гладкостью. Сделаем это методом разделения переменных.

Будем искать нетривиальные решения уравнения сферических гармоник в виде произведения $\Phi(\varphi)\Psi(\theta)$, предполагая, что

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \qquad \forall\, \varphi \in \mathbb{R},$$

а $\Psi(\theta)$ и ее первая производная $\Psi'(\theta)$ ограничены при $\theta \in [0, \pi]$:

$$\sup_{0 \leqslant \theta \leqslant \pi} |\Psi(\theta)| < +\infty, \qquad \sup_{0 \leqslant \theta \leqslant \pi} |\Psi'(\theta)| < +\infty.$$

После подстановки произведения $\Phi(\varphi)\Psi(\theta)$ в (1) вместо функции Y получаем

$$\frac{1}{\sin\theta}\Big(\sin\theta\Psi'(\theta)\Big)'\Phi(\varphi) + k(k + 1)\Psi(\theta)\Phi(\varphi) = -\frac{1}{\sin^2\theta}\Psi(\theta)\Phi''(\varphi).$$

Домножив обе части равенства на $-\sin^2\theta$, результат разделив на $\Phi(\varphi)\Psi(\theta)$, придем к соотношению

$$-\left[\frac{\sin\theta(\sin\theta\Psi'(\theta))'}{\Psi(\theta)} + k(k + 1)\sin^2\theta\right] = \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}.$$

Функция слева в этом равенстве зависит только от θ, функция же справа — только от φ. Равенство при этом возможно лишь в случае, когда обе упомянутые функции постоянны.

Таким образом, существует число μ такое, что

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + \mu\Phi(\varphi) = 0, \\ \dfrac{1}{\sin\theta}\big(\sin\theta\Psi'(\theta)\big)' + \left(k(k+1) - \dfrac{\mu}{\sin^2\theta}\right)\Psi(\theta) = 0. \end{cases}$$

При $\mu = m^2$, где m — целое неотрицательное число, любое нетривиальное решение уравнения $\Phi''(\varphi) + \mu\Phi(\varphi) = 0$ с условием периодичности

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \qquad \forall\,\varphi \in \mathbb{R}$$

имеет вид $\Phi(\varphi) = C_1\cos m\varphi + C_2\sin m\varphi$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные одновременно не равные нулю. Если же $\mu \neq m^2$, где m — целое неотрицательное число, то любое решение уравнения $\Phi''(\varphi) + \mu\Phi(\varphi) = 0$ с условием периодичности

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \quad \forall\,\varphi \in \mathbb{R},$$

обязано быть ортогональным всем функциям из множества

$$1, \quad \cos k\varphi, \quad \sin k\varphi, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Это означает, что функция $\Phi(\varphi)$ обязана быть тождественно нулевой, или, иными словами, что число $\mu \neq m^2$ не является собственным.

Уравнение для функции $\Psi(\theta)$ при $\mu = m^2$ принимает следующий вид

$$\frac{1}{\sin\theta}\big(\sin\theta\Psi'(\theta)\big)' + \left(k(k+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Psi(\theta) = 0.$$

Сделаем здесь замену независимой переменной $t = \cos\theta$, положив при этом

$$y(t) = \Psi(\arccos t) \quad \Leftrightarrow \quad \Psi(\theta) = y(\cos\theta).$$

После несложных выкладок получим для $y(t)$ следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\big((1-t^2)y'(t)\big)' + \left(k(k+1) - \frac{m^2}{1-t^2}\right) y(t) = 0. \tag{2}$$

Здесь $-1 \leqslant t \leqslant 1$, а функция $y(t) \in C^{(2)}(-1,1)$ и вместе со своей первой производной ограничена на отрезке $[-1,1]$:

$$\sup_{-1\leqslant t\leqslant 1} |y(t)| < +\infty, \quad y(t) \in C^{(1)}[-1,1].$$

Рассмотрим частный случай уравнения (2) при $m = 0$:

$$\big((1-t^2)y'(t)\big)' + k(k+1)y(t) = 0. \tag{3}$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение известно как *уравнение Лежандра*.

3⁰. Рассмотрим задачу о решениях уравнения (3), принадлежащих пересечению классов $C^{(1)}[-1,1]$ и $C^{(2)}(-1,1)$.

Теорема (об ограниченных решениях уравнения Лежандра). *При любом неотрицательном целом k существует единственное решение следующей задачи*

$$\begin{cases} \big((1-t^2)y'(t)\big)' + k(k+1)y(t) = 0, \quad |t| < 1, \\[2ex] \|y(t) \mid C^{(1)}[-1,1]\| < +\infty, \quad y(+1) = 1. \end{cases} \tag{4}$$

По переменной t это решение — полиномом степени k.

Доказательство. Пусть сначала $k = 0$. Уравнение в этом случае имеет вид $\big((1-t^2)y'(t)\big)' = 0$ и его общее решение задается формулой

$$y(t) = \frac{C_1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t} + C_2.$$

Функция $y(t)$ подобного вида может быть ограничена на отрезке $[-1, 1]$ лишь в случае, когда $C_1 = 0$. При этом $y(t)$ тождественно постоянна и условие $y(+1) = 1$ удовлетворяется лишь для тождественно единичной функции. Тем самым решение рассматриваемой задачи единственно и обязано быть тождественно единичной функцией, т.е. полиномом нулевой степени. В существовании решения легко убедиться, рассмотрев полином $P_0(t) \equiv 1$.

Далее, пусть $k \geqslant 1$, а $y(t)$ — решение уравнения Лежандра, $y(t) \in C^{(1)}[-1, 1]$. Из уравнения заключаем, что

$$y(t) = -\frac{1}{k(k+1)}\frac{d}{dt}\left((1-t^2)\frac{dy}{dt}(t)\right), \quad |t| < 1.$$

Проинтегрировав это равенство по отрезку $(-1, \tau)$, где $\tau < 1$, получим

$$\int\limits_{-1}^{\tau} y(t)\,dt = -\frac{1}{k(k+1)}\int\limits_{-1}^{\tau}\frac{d}{dt}\left((1-t^2)\frac{dy}{dt}(t)\right)\,dt =$$

$$= -\frac{1}{k(k+1)}(1-t^2)\frac{dy}{dt}(t)\Big|_{t=-1}^{t=\tau} = -\frac{(1-\tau^2)}{k(k+1)}y'(\tau).$$

Последнее равенство справедливо в силу условия, что производная $y'(t)$ имеет конечный предел при $t \to -1$. Таким образом, получаем равенство

$$y'(\tau) = -\frac{k(k+1)}{1-\tau^2} \int\limits_{-1}^{\tau} y(t)\, dt.$$

Из этого соотношения следует, в частности, что $y(t)$ принадлежит $C^{(\infty)}(-1,1)$, т.е. внутри интервала $(-1,+1)$ функция $y(t)$ имеет производные всех порядков. Обозначим их через $v_m(t) = y^{(m)}(t)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Продифференцировав m раз уравнение Лежандра, получим

$$\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} \left((1-t^2)\frac{dy}{dt}(t) \right) + k(k+1)\frac{d^m y}{dt^m}(t) = 0.$$

Применив для вычисления первого слагаемого в левой части этого равенства формулу Лейбница, придем к соотношению

$$(1-t^2)v_m'' - 2(m+1)tv_m' - m(m+1)v_m + k(k+1)v_m = 0. \quad (5)$$

Домножив обе части полученного уравнения на $(1-t^2)^m$ и введя обозначение $\mu_m^k = k(k+1) - m(m+1)$, получим

$$\left((1-t^2)^{m+1} v_m'(t)\right)' + \mu_m^k (1-t^2)^m v_m(t) = 0. \quad (6)$$

Учитывая, что $\mu_k^k = 0$, как это следует из определения μ_m^k, и полагая в (6) $m = k$, получаем $\left((1-t^2)^{k+1} v_k'(t)\right)' = 0$. Вспоминая, что $v_k(t) = y^{(k)}(t)$, имеем из полученного равенства:

$$y^{(k+1)}(t) = \frac{C_0}{(1-t^2)^{k+1}}, \quad (7)$$

где C_0 — некоторая постоянная.

Уравнение $y^{(k+1)}(t) = f(t)$ с непрерывной в окрестности нуля правой частью $f(t)$, как хорошо известно, имеет общим решением функцию вида

$$y(t) = \frac{1}{k!}\int\limits_0^t (t-\tau)^k f(\tau)\,d\tau + R_k(t),$$

где $R_k(t)$ — полином степени k. В применении к уравнению (7) эта формула дает следующее равенство

$$y(t) = \frac{C_0}{k!}\int\limits_0^t \frac{(t-\tau)^k}{(1-\tau^2)^{k+1}}\,d\tau + R_k(t). \tag{8}$$

Найдем предел интеграла в правой части (8) при стремлении t к единице слева. Заметим, что при $0 < t < 1$ имеют место соотношения

$$\int\limits_0^t \frac{(1-\tau)^k}{(1-\tau^2)^{k+1}}\,d\tau = \int\limits_0^t \frac{1}{(1+\tau)^{k+1}}\frac{1}{(1-\tau)}\,d\tau \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2^{k+1}}\int\limits_0^t \frac{1}{(1-\tau)}\,d\tau = -\frac{1}{2^{k+1}}\ln(1-t).$$

Таким образом,

$$\lim_{t\to 1-0}\int\limits_0^t \frac{(1-\tau)^k}{(1-\tau^2)^{k+1}}\,d\tau = +\infty.$$

Следовательно, интеграл в (8) при стремлении t к единице слева неограниченно возрастает:

$$\lim_{t\to 1-0}\int\limits_0^t \frac{(t-\tau)^k}{(1-\tau^2)^{k+1}}\,d\tau = \lim_{t\to 1-0}\int\limits_0^t \frac{(1-\tau)^k}{(1-\tau^2)^{k+1}}\,d\tau = +\infty.$$

Для обоснования последних двух равенств удобно использовать получаемое из формулы бинома Ньютона разложение:

$$(t-\tau)^k-(1-\tau)^k=\sum_{j=1}^{k} C_k^j (t-1)^j (1-\tau)^{k-j}.$$

Таким образом, задаваемая равенством (8) функция $y(t)$ будет ограничена на отрезке $[-1,1]$ лишь при $C_0=0$ и в этом случае имеет место равенство $y(t)=R_k(t)$. Следовательно, $y(t)$ действительно является полиномом степени k.

Уточним вид полинома $R_k(t)$. С этой целью установим при $j=1,2,\ldots k$ следующие соотношения

$$y(t)=\frac{(-1)^j}{\mu_0^k\mu_1^k\ldots\mu_{j-1}^k}\frac{d^j}{dt^j}\left[(1-t^2)^j v_j\right], \tag{9}$$

где $v_j(t)=d^jy/dt^j$ и $\mu_i^k=k(k+1)-i(i+1)$.

При $j=1$ соотношение (9) совпадает с исходным уравнением Лежандра, т.е. заведомо справедливо. Предположив выполнение (9) при некотором $j<k$, воспользуемся при $m=j$ установленным ранее тождеством (6), т.е. равенством

$$\frac{d}{dt}\left((1-t^2)^{j+1}\frac{dv_j}{dt}(t)\right)+\mu_j^k(1-t^2)^j v_j(t)=0.$$

Перепишем его в эквивалентном виде

$$v_j(t)=-\frac{1}{\mu_j^k}\frac{1}{(1-t^2)^j}\frac{d}{dt}\left((1-t^2)^{j+1}v_{j+1}(t)\right).$$

Подставляя это соотношение в (9), находим для $y(t)$ следующее представление

$$\frac{(-1)^{j+1}}{\mu_0^k \dots \mu_j^k} \frac{d^j}{dt^j} \left[\frac{(1-t^2)^j}{(1-t^2)^j} \frac{d}{dt} \left((1-t^2)^{j+1} v_{j+1} \right) \right],$$

или

$$y(t) = \frac{(-1)^{j+1}}{\mu_0^k \mu_1^k \dots \mu_j^k} \frac{d^{j+1}}{dt^{j+1}} \left[(1-t^2)^{j+1} v_{j+1} \right],$$

т.е. то же самое равенство (9), но уже для номера $j+1$. По индукции заключаем, что равенство (9) справедливо для всех допустимых значений j.

Заметим теперь, что $v_k(t) = d^k y/dt^k = d^k R_k/dt^k \equiv \mathrm{const}$. Последнее равенство справедливо в силу условия, что $R_k(t)$ — это полином степени k. Учитывая постоянство функции $v_k(t)$, возьмем в (9) $j = k$. Тогда получим

$$y(t) = B_k \frac{d^k}{dt^k} \left[(1-t^2)^k \right],$$

где B_k — некоторая константа. Выясним, каким должно быть значение B_k, чтобы выполнялось условие $y(+1) = 1$.

Имеем, пользуясь формулой Лейбница:

$$\frac{d^k}{dt^k} \left[(1-t^2)^k \right] = \frac{d^k}{dt^k} \left[(1-t)^k (1+t)^k \right] =$$
$$= \sum_{j=0}^{k} C_k^j \frac{d^j}{dt^j} \left[(1-t)^k \right] \frac{d^{k-j}}{dt^{k-j}} \left[(1+t)^k \right].$$

При $t = +1$ в правой части полученного равенства остается в точности одно слагаемое, соответствующее индексу $j = k$, т.е.

$$\frac{d^k}{dt^k} \left[(1-t^2)^k \right] \Big|_{t=+1} = 2^k (-1)^k k!.$$

Таким образом, условию $y(+1) = 1$ заведомо удовлетворяет полином

$$y(t) = P_k(t) \equiv \frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dt^k}\left[(t^2-1)^k\right]. \tag{10}$$

Полином $P_k(t)$, задаваемый равенством (10), называется *полиномом Лежандра* степени k. Сама же формула (10) называется *формулой Родрига* для полиномов Лежандра.

Таким образом, единственность решения уравнения Лежандра в классе $C^{(1)}[-1, 1]$ и его полиномиальный вид установлены.

Разложение полинома $P_k(t)$ по степеням t найдем, воспользовавшись формулами Родрига и бинома

$$(t^2-1)^k = \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j k!}{j!(k-j)!}\, t^{2k-2j}.$$

В итоге получаем равенство

$$P_k(t) = \sum_{j=0}^{[\frac{k}{2}]} \frac{(-1)^j (2k-2j)!}{2^k j!(k-j)!(k-2j)!}\, t^{k-2j}.$$

Это представление полинома Лежандра позволяет прямыми вычислениями[1] убедиться, что $P_k(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-t^2)P_k''(t) - 2tP_k'(t) + k(k+1)P_k(t) = 0,$$

т.е. уравнению Лежандра. Таким образом, существование решения краевой задачи (4) также установлено. $\square$

4^0. Вернемся к уравнению (2) на отрезке $-1 \leqslant t \leqslant 1$:

$$\left((1-t^2)y'(t)\right)' + \left(k(k+1) - \frac{m^2}{1-t^2}\right)y(t) = 0,$$

[1] В качестве упражнения проделайте их самостоятельно.

где функция $y(t)$ принадлежит $C^{(1)}[-1,1]$.

Уже установлено, что при $m=0$ искомые решения уравнения (2) имеют вид $y(t)=AP_k(t)$, где A — произвольная константа, а $P_k(t)$ — полином Лежандра степени k.

Пусть $m>0$, тогда сделаем замену $y(t)=(1-t^2)^{m/2}z(t)$. После несложных выкладок для $z(t)$ получаем уравнение

$$(1-t^2)z''(t)-2t(m+1)z'(t)+[k(k+1)-m(m+1)]z(t)=0.$$

Как легко заметить, это уравнение совпадает с рассмотренным ранее уравнением (5), переписанном в виде

$$(1-t^2)v_m''-2(m+1)tv_m'-m(m+1)v_m+k(k+1)v_m=0.$$

Решением уравнения (5), как это уже отмечалось, является функция $v_m(t)=\dfrac{d^m}{dt^m}P_k(t)$. Следовательно, в таком же виде представима и функция $z(t)$.

Тем самым при $m>0$ в качестве искомого решения уравнения (2) можно взять функцию $y(t)$ из $C^{(1)}[-1,1]$, задаваемую равенством

$$y(t)=(1-t^2)^{m/2}\frac{d^m}{dt^m}P_k(t),$$

где $P_k(t)$ — все тот же полином Лежандра степени k. Отметим, что так выбранная функция $y(t)$ нетривиальна лишь при условии, что $m\leqslant k$.

Определение. *Функции, задаваемые равенствами*

$$y(t)=(1-t^2)^{m/2}\frac{d^m}{dt^m}P_k(t),\quad m=1,2,\ldots,k,$$

называются присоединенными функциями Лежандра и обозначаются через $P_k^m(t)$.

Иногда употребляется термин “присоединенные полиномы” Лежандра, но следует иметь ввиду, что $P_k^m(t)$ будет полиномом по переменной t лишь при четных значениях m.

Возвращаясь к уравнению сферических гармоник порядка k, получаем следующее множество его решений

$$P_k(\cos\theta),\ \ P_k^m(\cos\theta)\cos m\varphi,\ \ P_k^m(\cos\theta)\sin m\varphi,$$

где $m = 1, 2, \ldots, k$. Всего здесь $(2k+1)$ линейно независимых функций, т.е. столько же, какова размерность $\sigma_3(k)$ пространства сферических гармоник порядка k. Это означает, что найденные сферические гармоники образуют в упомянутом пространстве базис. Отметим, что все функции найденного базиса ортогональны друг другу в скалярном произведении пространства $L_2(S)$.

5⁰. Вернемся к уравнению $\big(r^2R'\big)' + (\nu^2r^2 - \lambda)R = 0$ для радиальной части искомого решения однородного уравнения Гельмгольца. Взяв $\lambda = k(k+1)$, перепишем это уравнение в виде

$$\frac{1}{r^2}\left(r^2R'\right)' + \left(\nu^2 - \frac{k(k+1)}{r^2}\right)R = 0.$$

Сделаем здесь замену зависимой переменной: $R(r) = \frac{\varphi(r)}{\sqrt{r}}$. После несложных преобразований придем к следующему уравнению

$$r^2\varphi'' + r\varphi' + (\nu^2r^2 - \mu_k^2)\varphi = 0,$$

где $\mu_k = k + 1/2$. Нас интересуют лишь ограниченные в нуле решения этого уравнения. Сделав здесь замену $\rho = \nu r$, получим известное уравнение цилиндрических функций

$$\rho^2\frac{d^2\varphi}{d\rho^2} + \rho\frac{d\varphi}{d\rho} + (\rho^2 - \mu_k^2)\varphi = 0.$$

Лекция 5.

ТЕМА: Установившиеся колебания в трехмерном пространстве. $\mathbf{1}^0$. Неоднородное уравнение Гельмгольца и его связь с волновым уравнением. $\mathbf{2}^0$. Первая и вторая формулы Грина (вывод из формулы Гаусса — Остроградского). $\mathbf{3}^0$. Фундаментальные решения уравнение Гельмгольца. $\mathbf{4}^0$. Интегральное представление гладкой функции. $\mathbf{5}^0$. Решения однородного уравнения Гельмгольца убывающие к нулю на бесконечности. $\mathbf{6}^0$. Условия излучения Зоммерфельда. $\mathbf{7}^0$. Теорема единственности.

$\mathbf{1}^0$. Предметом нашего внимания в настоящей лекции послужит неоднородное *уравнение Гельмгольца*:

$$\Delta u + k^2 u = f(x), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3. \qquad (\mathbf{H})$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, $u = u(x)$ — искомая функция, k^2 — положительное вещественное число. Функция $f(x)$ в правой части предполагается известной и, если не оговорено противное, непрерывной во всем трехмерном пространстве. В ряде случаев удобно будет предполагать также, что $f(x)$ финитна.

Если функция $u = u(x)$ решает уравнение (**H**), то произведение $v(x,t) = u(x)e^{\pm ikt}$, где i — мнимая единица, удовлетворяет следующему неоднородному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v = -f(x)e^{\pm ikt}. \qquad (\mathbf{W})$$

Таким образом, умея решать уравнение (**H**), можно получать частные решения уравнения (**W**). В частности, к решению уравнения Гельмгольца сводится подсчет *запаздывающих потенциалов* для уравнения (**W**).

Особый интерес представляет случай, когда $f(x)$ совпадает с известной дельта функцией Дирака, т.е. случай уравнения

$$\Delta u + k^2 u = \delta(x), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3. \qquad (\mathbf{F})$$

Удовлетворяющие этому уравнению функции называются фундаментальными решениями уравнения Гельмгольца. Найдем такие фундаментальные решения, заметив что при $r = |x| > 0$ уравнение (**W**) превращается в однородное:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} > 0. \qquad (\mathbf{HH})$$

Задача. *Найти сферически симметричные решения* $u(x) = u(r)$ *однородного уравнения Гельмгольца.*

Решение. Перейдем в однородном уравнении Гельмгольца (**HH**) к сферическим координатам (r, ϑ, φ), где

$$x_1 = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad x_2 = r \sin\vartheta \sin\varphi, \quad x_3 = r\cos\vartheta.$$

В результате уравнение (**HH**) запишется в виде

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + k^2 u(r) = 0, \quad r > 0. \qquad (\mathbf{W}_{sc})$$

Пусть $w(r) = ru(r)$, тогда

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{w'}{r} - \frac{w}{r^2}, \quad r^2 \frac{\partial u}{\partial r} = rw'(r) - w, \quad \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) = rw''(r).$$

Подставляя это равенство в уравнение ($\mathbf{W}_{sc}$) и домножая результат на r, получаем

$$w''(r) + k^2 w(r) = 0 \Longrightarrow w(r) = C_1 e^{+ikr} + C_2 e^{-ikr}.$$

Следовательно, любое сферически симметричное решение $u(r)$ однородного уравнения Гельмгольца представимо линейной комбинацией вида

$$u(r) = C_1 \frac{e^{+ikr}}{r} + C_2 \frac{e^{-ikr}}{r}.$$

Отметим, что обе функции в правой части последнего равенства обращаются в нуль при стремлении r к бесконечности вдоль любого исходящего из начала координат луча. Это стремление к нулю равномерное по угловым переменным (ϑ, φ). □

В частности, решениями однородного уравнения Гельмгольца являются следующие две вещественнозначные функции

$$u_s(r) = \frac{\sin kr}{r} \quad \text{и} \quad u_c(r) = \frac{\cos kr}{r}. \qquad (\mathbf{usc})$$

Первая из них имеет в начале координат конечное значение, а вторая неограниченно возрастает при стремлении r к нулю.

Введем следующие обозначения

$$E_+(r) = -\frac{e^{+ikr}}{4\pi r} \quad \text{и} \quad E_-(r) = -\frac{e^{-ikr}}{4\pi r}. \qquad (\mathbf{Hfs})$$

Докажем, что обе эти функции являются фундаментальными решениями уравнения Гельмгольца, т.е. убедимся в справедливости следующих двух равенств

$$\Delta E_+ + k^2 E_+ = \delta(x), \ \ \Delta E_- + k^2 E_- = \delta(x). \qquad (\mathbf{F}_\pm)$$

Для их обоснования нам понадобятся *формулы Грина*.

$\mathbf{2}^0$. В изучении свойств гармонических функций важны *первая и вторая формулы Грина*. Выведем их, используя формулу Гаусса — Остроградского. Напомним ее вид.

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ — кусочно гладкая поверхность, ограничивающая Ω, а $\nu = \nu(x) = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ — это единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке x из $\partial\Omega$. Пусть также в замыкании области Ω определена непрерывная вектор-функция $w(x) = (w_1(x), \ldots, w_n(x))$, имеющая в Ω непрерывные производные первого порядка, допускающие непрерывное продолжение в $\overline{\Omega}$. Тогда справедлива формула

$$\int\limits_{\Omega} \operatorname{div} w\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} w \cdot \nu\, dS \quad \Longleftrightarrow$$

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w_i}{\partial x_i}\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{n} w_i \nu_i\, dS. \quad (\mathbf{GO})$$

Перейдем к выводу формул Грина. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ вместе с частными производными первого порядка непрерывны в замыкании области Ω, а частные производные от $u(x)$ и $v(x)$ второго порядка существуют и непрерывны внутри Ω:

$$u(x),\ v(x) \in C^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap C^{(2)}(\Omega).$$

Тогда имеют место равенства

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v\, dx = \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) - u \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \right] dx =$$

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx - \int\limits_{\Omega} u \Delta v\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu}\, dS - \int\limits_{\Omega} u \Delta v\, dx.$$

Здесь $\dfrac{\partial v}{\partial \nu} = \sum\limits_{i=1}^{n} \nu_i \dfrac{\partial v}{\partial x_i}$ — производная от $v(x)$ по единичной внешней нормали ν. Полученное равенство

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu}\, dS - \int\limits_{\Omega} u \Delta v\, dx \qquad (\mathbf{G_I})$$

называют *первой формулой Грина*.

Меняя в первой формуле Грина функции $u(x)$ и $v(x)$ местами, получим

$$\int\limits_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, dx = \int\limits_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS - \int\limits_{\Omega} v \Delta u \, dx.$$

Вычитая эту формулу из предыдущей, имеем в итоге

$$\int\limits_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) \, dx = \int\limits_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS. \qquad (\mathbf{G_{II}})$$

Это — *вторая формула Грина* (G. Green, 1828 г.).

В формулах ($\mathbf{G_I}$)–($\mathbf{G_{II}}$) область интегрирования Ω может быть ограничена не одной, а несколькими замкнутыми поверхностями (но таких поверхностей должно быть конечное число). В этом случае поверхностные интегралы следует брать по всем частям границы области Ω.

3^0. Найдем фундаментальные решения уравнения Гельмгольца в трехмерном пространстве.

Задача. *Доказать, что определенные равенствами* (**Hfs**) *функции $E_+(r)$ и $E_-(r)$ удовлетворяют уравнениям* ($\mathbf{F_\pm}$).

Решение. Убедимся, что $\Delta E_+ + k^2 E_+ = \delta(x)$. Воспользуемся определением обобщенного дифференцирования и, взяв произвольную бесконечно дифференцируемую и финитную функцию $\varphi(x)$, установим для нее справедливость равенства

$$\int E_+(x)\big(\Delta\varphi(x) + k^2\varphi(x)\big) \, dx = \varphi(0). \qquad (\mathbf{F_{+d}})$$

Это и будет означать выполнение первого из уравнений ($\mathbf{F_\pm}$). Заметим, что функция $E_+(r)$ локально суммируема. Чтобы в этом убедиться, достаточно сосчитать интеграл от модуля $E_+(r)$ по единичному шару трехмерного пространства. Переходя в интеграле к сферическим координатам, получим

$$\int\limits_{|x|\leqslant 1} |E_+(x)|\,dx = \int\limits_0^1 \int\limits_{|x|=r} \frac{1}{4\pi r}\,dS dr = \int\limits_0^1 r\,dr < \infty.$$

Выберем шар радиуса A, содержащий внутри себя носитель функции $\varphi(x)$, и взяв положительное ε, воспользуемся равенством

$$\int E_+(x)\Delta\varphi(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant A} E_+(x)\Delta\varphi(x)\,dx.$$

К интегралу под знаком предела применим вторую формулу Грина, что можно сделать в силу бесконечной гладкости функций $E_+(x)$ и $\varphi(x)$ в шаровом слое $\varepsilon \leqslant |x| \leqslant A$. В результате получим

$$\int\limits_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant A} E_+(x)\Delta\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant A} \varphi(x)\Delta E_+(x)\,dx -$$

$$- \int\limits_{|x|=\varepsilon} E_+(x)\frac{\partial\varphi}{\partial r}(x)\,dS + \int\limits_{|x|=\varepsilon} \varphi(x)\frac{\partial E_+}{\partial r}(x)\,dS.$$

Знак минус перед первым интегралом по сфере $|x| = \varepsilon$ поставлен потому, что в точках этой сферы внешняя нормаль к шаровому слою $\varepsilon \leqslant |x| \leqslant A$ направлена к началу координат.

Преобразуем объемный интеграл в правой части полученного равенства. Пользуясь тем, что в шаровом слое $\varepsilon \leqslant |x| \leqslant A$

функция $E_+(x)$ удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца, получаем

$$\int\limits_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant A} \varphi(x)\Delta E_+(x)\,dx = -k^2 \int\limits_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant A} E_+(x)\varphi(x)\,dx.$$

С учетом этого равенства имеем теперь

$$\int\limits_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant A} E_+(x)(\Delta\varphi(x)+k^2\varphi(x))\,dx =$$

$$-\int\limits_{|x|=\varepsilon} E_+(x)\frac{\partial\varphi}{\partial r}(x)\,dS + \int\limits_{|x|=\varepsilon} \varphi(x)\frac{\partial E_+}{\partial r}(x)\,dS. \qquad (1)$$

Сосчитаем оба поверхностных интеграла в правой части последнего равенства в пределе при $\varepsilon\to 0$. Имеем

$$-\int\limits_{|x|=\varepsilon} E_+(x)\frac{\partial\varphi}{\partial r}(x)\,dS = \varepsilon\frac{e^{+ik\varepsilon}}{4\pi\varepsilon^2}\int\limits_{|x|=\varepsilon} \frac{\partial\varphi}{\partial r}(x)\,dS.$$

Из теоремы о среднем для непрерывных функций получаем предельное равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\int\limits_{|x|=\varepsilon} \frac{\partial\varphi}{\partial r}(x)\,dS = \frac{\partial\varphi}{\partial r}(0).$$

Следовательно, справедливо соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|x|=\varepsilon} E_+(x)\frac{\partial\varphi}{\partial r}(x)\,dS = 0. \qquad (2)$$

Продолжая выкладки, получаем

$$-\frac{\partial E_+}{\partial r} = \frac{ike^{ikr}}{4\pi r} - \frac{e^{ikr}}{4\pi r^2}.$$

Следовательно, имеет место равенство

$$\int\limits_{|x|=\varepsilon} \varphi(x)\frac{\partial E_+}{\partial r}(x)\,dS = \frac{e^{ik\varepsilon}}{4\pi\varepsilon^2}\int\limits_{|x|=\varepsilon} \varphi(x)\,dS - \frac{ik\varepsilon e^{ik\varepsilon}}{4\pi\varepsilon^2}\int\limits_{|x|=\varepsilon} \varphi(x)\,dS.$$

Переходя в этом равенстве к пределу по $\varepsilon \to 0$, и снова пользуясь теоремой о среднем, приходим к соотношению

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|x|=\varepsilon} \varphi(x)\frac{\partial E_+}{\partial r}(x)\,dS = \varphi(0). \tag{3}$$

Переходя к пределу по $\varepsilon \to 0$ в равенстве (1) и используя при этом равенства (2)–(3), получим

$$\int\limits_{|x|\leqslant A} E_+(x)(\Delta\varphi(x) + k^2\varphi(x))\,dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi).$$

Заключаем теперь, учитывая что пробная функция $\varphi(x)$ обращается в нуль вне шара радиуса A, что соотношения ($\mathbf{F_{+d}}$) действительно имеют место.

Свойство функции $E_-(x)$ быть фундаментальным решением уравнения Гельмгольца проверяется аналогично. □

4^0. В исследовании решений однородного уравнения Гельмгольца в ограниченной области важную роль играет возможность представления этих решений в виде суммы двух поверхностных интегралов по границе.

Лемма (об интегральном представлении)**.** *Пусть Ω — ограниченная область в трехмерном пространстве, а функция $u(x)$, принадлежащая $C^{(2)}(\Omega) \cap C^{(1)}(\overline{\Omega})$, удовлетворяет внутри Ω однородному уравнению Гельмгольца. Тогда в любой лежащей* *строго внутри* Ω *точке* y *справедливо равенство*

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial E_+}{\partial \nu_x}(y-x)\,dS - \int_{\partial\Omega} E_+(y-x)\frac{\partial u}{\partial \nu_x}(x)\,dS. \qquad (\mathbf{S}_+)$$

Формулу ($\mathbf{S}_+$) также часто называют *формулой Грина*.

Доказательство. Предположим сначала, что $u(x)$ принадлежит $C^{(2)}(\overline{\Omega})$. Возьмем y строго внутри Ω и вырежем из Ω шар $B_\rho(y)$ с центром в y и радиуса ρ (достаточно малого, чтобы $B_\rho(y) \subset \Omega$). Обозначим $\Omega \setminus B_\rho(y)$ через Ω_ρ, а $\partial B_\rho(y)$ — через $S_\rho(y)$:

$$x \in S_\rho(y) \Leftrightarrow |x-y| = \rho.$$

Внутри Ω_ρ функция $E_+(x-y)$ является решением однородного уравнения Гельмгольца. Учитывая это и применяя к функциям $u(x)$ и $v(x) \equiv E_+(x-y)$ вторую формулу Грина ($\mathbf{G_{II}}$), получаем равенство

$$-\int_{\Omega_\rho} E_+(x-y)(\Delta u(x) + k^2 u(x))\,dx =$$

$$\int_{\partial\Omega}\Big(-E_+(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) + u(x)\frac{\partial E_+}{\partial \nu}(x-y)\Big)dS +$$

$$\int_{S_\rho(y)}\Big(E_+(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - u(x)\frac{\partial E_+}{\partial \nu}(x-y)\Big)dS. \qquad (4)$$

В первом справа поверхностном интеграле $\nu = \nu(x)$ — единичная нормаль к $\partial\Omega$, внешняя по отношению к области Ω. Во втором же поверхностном интеграле $\nu = \nu(x)$ — единичная нормаль к $S_\rho(y)$, внешняя по отношению к шару $B_\rho(y)$. Именно поэтому второй интеграл в правой части (4) взят со знаком, противоположным знаку первого.

Найдем предел при $\rho \to 0$ равенства (4). По условию существует постоянная K, которая не зависит от ρ и удовлетворяет неравенствам

$$\sup_{\overline{\Omega}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right| \leqslant K, \quad j = 1, 2, 3.$$

Следовательно, для любой точки x из $S_\rho(y)$ справедливы соотношения

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \right| \leqslant \left| \sum_{i=1}^{3} \nu_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| \leqslant$$

$$\left(\sum_{i=1}^{3} \nu_i^2(x) \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{3} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 (x) \right)^{1/2} \leqslant K\sqrt{3}.$$

Далее имеем

$$\Big| \int\limits_{S_\rho(y)} E_+(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\, dS \Big| \leqslant \frac{K\sqrt{3}}{4\pi\rho} \int\limits_{S_\rho(y)} dS = K\sqrt{3}\rho,$$

т.е. рассматриваемый интеграл по сфере $S_\rho(y)$ при $\rho \to 0$ стремится к нулю. Исследуем еще один интеграл по сфере $S_\rho(y)$:

$$I_\rho(y) = \int\limits_{S_\rho(y)} u(x) \frac{\partial E_+}{\partial \nu}(x-y)\, dS,$$

где $\nu = \nu(x)$ — единичная нормаль к $S_\rho(y)$, внешняя по отношению к шару $B_\rho(y)$. Из определения функции E_+ имеем

$$\frac{\partial E_+}{\partial \rho} = \frac{e^{ik\rho}}{4\pi\rho^2} - \frac{ike^{ik\rho}}{4\pi\rho} = \frac{e^{ik\rho}}{4\pi\rho^2}(1 - ik\rho).$$

Таким образом, справедливо равенство

$$I_\rho(y) = \frac{e^{ik\rho}}{4\pi\rho^2}(1 - ik\rho) \int\limits_{S_\rho(y)} u(x)\, dS.$$

По теореме о среднем, примененной к непрерывной в Ω функции $u(x)$, получаем теперь:

$$I_\rho(y) \to u(y) \quad \text{при} \quad \rho \to 0.$$

Переходя в равенстве (4) к пределу при $\rho \to 0$ и перенося в предельном равенстве $u(y)$ в левую, а интеграл по Ω в правую часть, получаем в итоге требуемую формулу ($\mathbf{S}_+$).

Если функция $u(x)$ принадлежит $C^{(1)}(\overline{\Omega})$, но $u(x) \notin C^{(2)}(\overline{\Omega})$, то рассуждения усложняются. В этом случае следует построить последовательность $\{\Omega_k\}$ вложенных друг в друга подобластей, лежащих строго внутри области Ω и стремящихся к ней в пределе при $k \to \infty$:

$$\Omega_k \subset \Omega_{k+1} \subset \Omega, \quad k = 1, 2, \ldots; \quad \Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k.$$

При этом $u(x) \in C^{(2)}(\overline{\Omega}_k)$ и для всех достаточно больших k точка y лежит внутри Ω_k. Применив для вычисления $u(y)$ в каждой из таких подобластей Ω_k формулу ($\mathbf{S}_+$), перейдём в полученном таким образом равенстве к пределу по $k \to \infty$. Воспользовавшись непрерывностью имеющихся в формуле интегралов относительно выбранных областей интегрирования Ω_k и поверхностей $\partial\Omega_k$, получим в пределе соотношение ($\mathbf{S}_+$). $\square$

Из равенства ($\mathbf{S}_+$) заключаем, что функция $u(y)$, удовлетворяющая условию леммы, внутри области Ω бесконечно дифференцируема.

5^0. Заметим, что функции $E_+(r)$ и $E_-(r)$ удовлетворяют на бесконечности следующим асимптотическим соотношениям

$$E_+(r) = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad E_-(r) = O\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{при} \quad r \to +\infty.$$

Если непрерывная функция $f(x)$ финитна, то существуют следующие интегралы

$$u_+(x) = \int E_+(x-y) f(y)\, dy = E_+ * f(x),$$

$$u_-(x) = \int E_-(x-y) f(y)\, dy = E_- * f(x).$$

Оба этих интеграла, называемых свертками, удовлетворяют неоднородному уравнению Гельмгольца:

$$\Delta u_\pm + k^2 u_\pm = f(x),$$

причем на бесконечности имеют место асимптотические соотношения

$$u_+(r) = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad u_-(r) = O\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{при} \quad r \to +\infty.$$

В частности, потенциалы $u_\pm(x)$ при $|x| \to +\infty$ исчезают. Их разность $u(x) = u_+(x) - u_-(x)$ при этом является решением следующей задачи

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad u(r) = O\left(\frac{1}{r}\right).$$

Таким образом, *существует бесконечно много решений однородного уравнения Гельмгольца во всем трехмерном пространстве, убывающих на бесконечности до нуля*.

Более простой пример нетривиального решения, исчезающего на бесконечности, нежели рассмотренная разность потенциалов дает ограниченная во всем пространстве функция

$$u_s(x) = \frac{\sin k|x|}{|x|} = k \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j k^{2j} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^j}{(2j+1)!}.$$

6^0. Чтобы обеспечить единственность решения однородного уравнения Гельмгольца во всем пространстве к условию убывания на бесконечности добавляют еще одно, получая в итоге так называемые *условия излучения Зоммерфельда* (при $r \to +\infty$):

$$u(r) = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{r}\right). \qquad (\mathbf{SRC}_+)$$

Как несложно проверить, этим условиям удовлетворяет функция $E_+(r)$:

$$\frac{\partial E_+}{\partial r} - ikE_+ = -\frac{ike^{+ikr}}{4\pi r} + \frac{e^{+ikr}}{4\pi r^2} + ik\frac{e^{+ikr}}{4\pi r},$$

или

$$\frac{\partial E_+}{\partial r} - ikE_+ = \frac{e^{+ikr}}{4\pi r^2} = o\left(\frac{1}{r}\right).$$

Для условий излучения при $r \to +\infty$ используется также иной вариант нежели соотношения (**SRC**$_+$):

$$u(r) = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial r} + iku = o\left(\frac{1}{r}\right) \qquad (\mathbf{SRC}_-)$$

В этом варианте, как несложно проверить, условиям излучения удовлетворяет функция $E_-(r)$. Чтобы различать эти два типа асимптотических соотношений, говорят что условия (**SRC**$_+$)

соответствуют *расходящимся волнам*, а условия (**SRC**$_-$) — *волнам сходящимся*.

7^0. Установим единственность решения однородного уравнения Гельмгольца во всем пространстве при выполнении условий излучения.

Теорема. *Пусть функция $u(x)$ удовлетворяет во всем пространстве однородному уравнению Гельмгольца*

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

*и условиям излучения (**SRC**$_+$) на бесконечности. Тогда функция $u(x)$ тождественно нулевая.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку x из $\mathbb{R}^3$ и рассмотрим шар B_R с центром в начале координат, содержащий эту точку, т.е. $R > |x|$. Функция $u(x)$ бесконечно дифференцируема во всем трехмерном пространстве и поэтому к ней применима лемма об интегральном представлении. Запишем $u(x)$ как сумму (**S**$_+$) двух поверхностных интегралов по границе шара B_R, а точнее в виде:

$$\int\limits_{|y|=R} u(y)\frac{\partial E_+}{\partial \nu_y}(x-y)\,dS - \int\limits_{|x|=R} E_+(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y)\,dS.$$

После подстановки в эти интегралы явного выражения для $E_+(x-y)$ получим

$$u(x) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|x|=R}\left(\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\frac{\partial u}{\partial |y|}(y) - u(y)\frac{\partial}{\partial |y|}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\right)dS. \qquad \textbf{(II)}$$

Сосчитаем производную $\frac{\partial}{\partial|y|}$ от $E_+(x-y)$ в явном виде. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial|y|}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}=\Big(ik\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}-\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|^2}\Big)\frac{\partial}{\partial|y|}|x-y|.$$

Чтобы найти производную $\frac{\partial}{\partial|y|}\big(|x-y|\big)$, воспользуемся равенством

$$|x-y|^2=(x-y,x-y)=|x|^2+|y|^2-2|x|\cdot|y|\cos\gamma,$$

где через γ обозначен угол между векторами x и y. Дифференцируя обе части последнего равенства, получим

$$2|x-y|\frac{\partial}{\partial|y|}\big(|x-y|\big)=2|y|-2|x|\cos\gamma.$$

Таким образом, справедливо соотношение

$$\frac{\partial}{\partial|y|}\big(|x-y|\big)\Big|_{|y|=R}=\frac{R-|x|\cos\gamma}{|x-y|}.$$

Далее имеем

$$u(y)\frac{\partial}{\partial|y|}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\Big|_{|y|=R}=u(y)\Big(\frac{ike^{ik|x-y|}}{|x-y|}-\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|^2}\Big)\cdot\frac{R-|x|\cos\gamma}{|x-y|}.$$

Подставив это равенство в (**II**), получим

$$u(x)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{|y|=R}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\Big(\frac{\partial u}{\partial|y|}(y)-iku(y)\Big)\,dS_y+$$

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{|y|=R}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}iku(y)\Big(1-\frac{R-|x|\cos\gamma}{|x-y|}\Big)\,dS_y+$$

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{|y|=R}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}u(y)\frac{R-|x|\cos\gamma}{|x-y|^2}\,dS_y. \qquad \textbf{(II}'\textbf{)}$$

Оценим поочередно все три интеграла в правой части (**II′**). Для первого из них I_1 имеем:

$$\frac{1}{4\pi}\Big|\int\limits_{|y|=R}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\Big(\frac{\partial u}{\partial|y|}(y)-iku(y)\Big)\,dS_y\Big|\leqslant$$

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{|y|=R}\frac{1}{|x-y|}\,dS_y\sup_{|y|=R}\Big|\frac{\partial u}{\partial|y|}(y)-iku(y)\Big|.$$

По условию излучения существует такая функция $\varepsilon(R)$, что выполнено неравенство

$$\Big|\frac{\partial u}{\partial|y|}(y)-iku(y)\Big|\leqslant\frac{\varepsilon(R)}{R}\quad\text{при}\quad|y|\geqslant R,$$

причем $\varepsilon(R)\to 0$ при $R\to+\infty$. Кроме того из неравенства $|x|<R$ и условия $|y|=R$ получаем

$$|x-y|\geqslant|y|-|x|=R-|x|\Longrightarrow\frac{1}{|x-y|}\leqslant\frac{1}{R-|x|}.$$

Таким образом, для интеграла $I_1=I_1(R)$ справедлива оценка

$$|I_1(R)|\leqslant\frac{1}{4\pi}\int\limits_{|y|=R}\frac{1}{R-|x|}\,dS_y\cdot\frac{\varepsilon(R)}{R}=\frac{R\varepsilon(R)}{R-|x|}.$$

Переходя здесь к пределу при $R\to+\infty$, получаем

$$\lim_{R\to+\infty}|I_1(R)|\leqslant\lim_{R\to+\infty}\varepsilon(R)=0.$$

Далее, для второго интеграла I_2 в правой части (**II′**) имеем:

$$|I_2(R)| \leqslant \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|y|=R} \frac{k|u(y)|}{R-|x|}\Big(\frac{|x-y|-R+|x|}{|x-y|}\Big)\,dS_y.$$

По условию существует такая постоянная C, что имеет место оценка

$$|u(y)| \leqslant \frac{C}{R} \quad \text{при} \quad |y| \geqslant R.$$

С учетом этого продолжим оценивать интеграл $I_2 = I_2(R)$:

$$|I_2(R)| \leqslant \frac{1}{4\pi}\frac{kC}{(R-|x|)R}\int\limits_{|y|=R} \frac{||x-y|-R|+|x|}{|x-y|}\,dS_y.$$

Используя неравенства $-|x| \leqslant |x-y|-|y| \leqslant |x|$ при $|y| = R$, имеем далее

$$|I_2(R)| \leqslant \frac{2kC|x|R}{(R-|x|)^2}.$$

Переходя здесь к пределу при $R \to +\infty$, получаем

$$\lim_{R\to+\infty} |I_2(R)| \leqslant 2kC|x| \lim_{R\to+\infty}\frac{R}{(R-|x|)^2} = 0.$$

Для третьего интеграла I_3 в правой части (**II′**) имеем:

$$|I_3(R)| \leqslant \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|y|=R} \frac{1}{(R-|x|)}\frac{C}{R}\frac{R}{|x-y|^2}\,dS_y \leqslant \frac{CR^2}{(R-|x|)^3}.$$

Устремляя здесь $R \to +\infty$, видим, что в пределе $I_3(R)$ равно нулю. Вспоминая оценку $|u(x)| \leqslant |I_1(R)|+|I_2(R)|+|I_3(R)|$ и устремляя в ней $R \to +\infty$, в пределе получим равенство $u(x) = 0$. Заметим, что точка x в трехмерном пространстве с самого начала была выбрана произвольно. Следовательно, функция $u(x)$ равна нулю всюду. □

Лекция 6.

Тема. Системы дифференциальных уравнений и их характеристические поверхности. **1**^{0}. Общий вид системы уравнений данного порядка. **2**^{0}. Характеристические поверхности систем. **3**^{0}. Системы уравнений первого порядка. **4**^{0}. Система уравнений акустики: вывод из системы уравнений гидродинамики, векторная форма записи. **5**^{0}. Система уравнений акустики: покомпонентная и матричная формы записи. Уравнения конуса характеристических нормалей и характеристических поверхностей. Постановка задачи на отыскание характеристических поверхностей, проходящих через заданную поверхность в начальный момент времени. **6**^{0}. Система уравнений одномерной газовой динамики: векторная, покомпонентная и матричная формы записи, уравнения конуса характеристических нормалей и характеристических поверхностей.

1^0. Условимся об обозначениях, используемых далее. Вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ с неотрицательными целыми координатами называют *мультииндексом*. Порядком мультииндекса α называют сумму его компонент:

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \geqslant 0.$$

Для любого вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ из $\mathbb{R}^n$ функция ξ^α, где α — мультииндекс, определяется равенством

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \ldots \xi_n^{\alpha_n}.$$

Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Частное дифференцирование по переменной x_i обозначим как D_i, т.е. положим

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Составим вектор $D = (D_1, \ldots, D_n)$, тогда

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \ldots D_n^{\alpha_n}.$$

Если $|\alpha| = m > 0$, то для функции $u = u(x)$, обладающей непрерывными производными порядка m, определены смешанные производные порядка m:

$$D^\alpha u(x) \equiv \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \forall\, \alpha: \ |\alpha| = m.$$

Предположим, что всякому мультииндексу $\alpha\colon |\alpha| \leqslant m$ сопоставлена матрица A_α размеров $l \times l$, где $l \geqslant 1$. Выражение вида

$$L(x, D) \equiv \sum_{|\alpha| \leqslant m} A_\alpha D^\alpha$$

называется *матричным дифференциальным оператором* с коэффициентами (матричными) A_α, $|\alpha| \leqslant m$.

Предполагается, что среди коэффициентов A_α, соответствующих мультииндексам старшего порядка m, имеется по крайней мере одна нетривиальная матрица.

Область определения оператора $L(x, D)$ — это множество вектор–функций $\vec{u} = \vec{u}(x)$ высоты l, скалярные компоненты которых имеют непрерывные производные порядка m.

Результат применения $L(x, D)$ к $\vec{u}(x)$ — это вектор–функция $\vec{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_l(x) \end{pmatrix}$ с непрерывными компонентами $f_j(x)$:

$$L(x, D)\vec{u}(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} A_\alpha D^\alpha \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ \vdots \\ u_l(x) \end{pmatrix} = \vec{f}(x).$$

Определение. *Векторное равенство* $L(x, D)\vec{u} = \vec{f}$ *называется системой дифференциальных уравнений* m*-го порядка.*

В частном случае, когда $l = 1$, т.е. матрицы A_α совпадают с числами a_α, говорят о *дифференциальном уравнении* m-го порядка. Если элементы матриц A_α и компоненты функции $\vec{f}$ зависят только от x, то систему $L(x, D)u = f$ называют *линейной*.

Если же элементы матриц A_α или вектор–функции $\vec{f}$ зависят не только от x, но и от компонент $(u_1, \ldots, u_l)$ искомого решения, то равенство $L(x, D)u = f$ называют *квазилинейной* системой или, в случае $l = 1$, *квазилинейным уравнением*.

2^0. Пусть заданы матричные коэффициенты $A_\alpha = A_\alpha(x, \vec{u})$ оператора $L(x, D)$. Рассмотрим следующую функцию переменной $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$\det\left[\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x, \vec{u})\xi^\alpha\right] = P_{m\times l}(\xi).$$

Суммирование здесь ведется лишь по мультииндексам порядка в точности равного m, т.е. старшего порядка.

Как следует из определения детерминанта, функция $P_{m\times l}(\xi)$ переменной ξ представляет собой однородный полином степени $m \times l$ (либо — в вырожденном случае — тождественный нуль. Условимся вырожденный случай не рассматривать).

Функцию $P_{m\times l}(\xi)$ называют *характеристическим полиномом* системы $L(x, D)u = f$.

Характеристический полином линейной системы с переменными коэффициентами зависит от x. Характеристический полином квазилинейной системы зависит также от искомого решения $\vec{u}$ системы.

В случае линейной системы характеристический полином не зависит от решения. Если линейная система имеет постоянные коэффициенты, т.е. элементы матриц A_α не зависят от x, то ее характеристический полином одинаков для всех точек x.

Старшей частью матричного дифференциального оператора $L(x, D)$ называют оператор

$$L_0(x, D) = \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha D^\alpha.$$

Заменяя в $L_0(x, D)$ операторы частного дифференцирования D_i на переменные ξ_i и вычисляя затем определитель найденной таким образом матрицы, получаем характеристический полином $P_{m\times l}(\xi)$.

Рассмотрим в пространстве переменных ξ поверхность, задаваемую уравнением $P_{m\times l}(\xi) = 0$. Это — коническая поверхность, ибо вместе с вектором ξ, лежащим на ней, там же лежат все векторы вида $\lambda\xi$, где $\lambda > 0$:

$$P_{m\times l}(\xi) = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{m\times l}(\lambda\xi) = 0 \quad \forall\, \lambda > 0.$$

Последнее замечание сразу же следует из однородности полинома $P_{m\times l}(\xi)$. Равенство $P_{m\times l}(\xi) = 0$ называют *уравнением конуса характеристических направлений* (нормалей) в связи со следующим определением.

Определение. *Ненулевой вектор* $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ *называется характеристической нормалью (характеристическим направлением) для линейной системы* $L(x, D)u = f$ *в точке* x, *если* ξ *удовлетворяет равенству* $P_{m\times l}(\xi) = 0$.

С уравнением конуса характеристических направлений тесно связаны специального типа поверхности в пространстве независимых переменных x, знание которых важно как для анализа структуры множества решений системы, так и для правильной постановки краевых задач.

Определение. *Поверхность* $\varphi(x) = 0$ *называется характеристической для линейной системы* $L(x, D)u = f$, *если в любой ее точке существует невырожденная нормаль, принадлежащая конусу характеристических направлений рассматриваемой системы.*

Нормаль $\vec{\nu}$ к поверхности $\varphi(x) = 0$ в точке x по направлению совпадает с градиентом функции φ, т.е.

$$\vec{\nu} = \vec{\nu}(x) = \frac{1}{|\nabla\varphi|}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\Big).$$

Следовательно, *уравнение характеристической поверхности* для рассматриваемой линейной системы имеет вид

$$\det\Big[\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x)\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\Big)^{\alpha_1}\ldots\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\Big)^{\alpha_n}\Big] = 0. \qquad (1)$$

Если же система квазилинейная, то уравнение характеристических поверхностей, вообще говоря, разное для разных ее решений u.

$\mathbf{3}^0$. Будем иметь дело либо с системами дифференциальных уравнений первого порядка, т.е. с системами вида

$$L_m(x, D)\vec{u} = \vec{f} \quad \text{при} \quad m = 1,$$

либо с одним дифференциальным уравнением порядка $m \geqslant 2$ (при этом $l = 1$).

Переформулируем данные выше определения конуса характеристических направлений и характеристических поверхностей применительно к этим частным случаям.

Пусть $m = 1$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $t \in \mathbb{R}$. В пространстве переменных (x, t) самый общий вид *системы линейных уравнений* *первого порядка* следующий:

$$A_0(x,t)\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} A_k(x,t)\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_k} + B(x,t)\vec{u} = \vec{f}. \qquad (2)$$

Упражнение. *Проверьте, что при $m = 1$ запись (2) эквивалентна прежней записи $L(x, D)u = f$.*

Если хоть какой-нибудь один элемент матриц A_0, A_k, B или хотя бы одна компонента f_j вектор–функции f зависят от решения u, то система (2) квазилинейная.

Переменные $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $x = (x_1, \ldots, x_n)$, связанные между собой уравнением $P_{m\times l}(\xi) = 0$, называют *двойственными* друг другу переменными.

Переменные, двойственные вектору (x, t), принято обозначать как (ξ, τ):

$$(x,t) \leftrightarrow (\xi,\tau).$$

Если независимые переменные — это (x, y, t), то двойственные к ним обозначаются как (ξ, η, τ):

$$(x,y,t) \leftrightarrow (\xi,\eta,\tau).$$

В двойственных переменных уравнение конуса характеристических нормалей для системы первого порядка (2) имеет вид

$$P_l(\xi,\tau) = \det\Big[A_0\tau + \sum_{k=1}^{n} A_k\xi_k\Big] = 0.$$

Поверхность $\varphi(x, t) = 0$ является характеристической для системы первого порядка (2), если градиент функции $\varphi(x, t)$ в любой точке рассматриваемой поверхности невырожден и при этом

$$\det\Big[A_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}A_k\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\Big]=0.$$

Определение. *Система уравнений первого порядка* (2) *называется симметрической t-гиперболической при условии, что, во-первых, матрицы A_0 и A_k, $k=1,2,\ldots,n$, симметрические и, во-вторых, матрица A_0 положительно определена, т.е. $(A_0u,u)>0$ для любого $u\neq 0$.*

4^0. В качестве примера системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка рассмотрим систему уравнений акустики, которую выведем из уравнений гидродинамики.

В предположении, что уравнение состояния — это "адиабатический закон", система уравнений гидродинамики имеет вид

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\vec v}{\partial t}+(\vec v\cdot\nabla)\vec v=-\dfrac{1}{\rho}\nabla p,\\[2ex] \dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\vec v)=0,\\[2ex] p=p_0\Big(\dfrac{\rho}{\rho_0}\Big)^{\gamma}.\end{cases}$$

Постоянные γ, p_0 и ρ_0 здесь заданы. Физический смысл p_0 и ρ_0 — давление и плотность среды в равновесном состоянии.

Сделаем дополнительные предположения о малости некоторых рассматриваемых переменных и их градиентов. Именно, преобразуя уравнения системы гидродинамики, будем пренебрегать степенями компонент вектора скорости $\vec v$, степенями градиентов этих компонент, степенями изменения плотности ρ, а также градиентов изменения плотности при условии, что все эти степени выше первой. Для краткости условимся называть все перечисленные переменные малыми. Условимся также пренебрегать в выкладках любым выражением, имеющим вид однородного полинома от малых переменных степени выше первой.

Переходя к выводу уравнений акустики, перепишем уравнение состояния в эквивалентной форме

$$p = c_0^2 \rho^\gamma, \quad \text{где} \quad c_0^2 = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} > 0.$$

Изменение плотности ρ относительно равновесного состояния ρ_0 характеризуется функцией

$$s = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \iff \rho = \rho_0(1+s) \quad \Rightarrow \nabla\rho = \rho_0 \nabla s.$$

Учитывая это, преобразуем уравнение состояния следующим образом

$$p = c_0^2 \rho^\gamma = c_0^2 \rho_0^\gamma (1+s)^\gamma = \rho_0^\gamma c_0^2 (1 + \gamma s + O(s^2)).$$

Величиной $O(s^2)$ в соответствии с соглашением о малости колебаний пренебрежем, т.е. далее используем следующее соотношение

$$p = \rho_0^\gamma c_0^2 (1 + \gamma s) = p_0(1 + \gamma s).$$

Используя последнее равенство, преобразуем уравнение неразрывности:

$$\operatorname{div}(\rho\vec{v}) = \rho \operatorname{div}\vec{v} + \vec{v}\cdot\nabla\rho = \rho_0(1+s)\operatorname{div}\vec{v} + \vec{v}\cdot\nabla\rho,$$

или, после перегруппировки слагаемых:

$$\operatorname{div}(\rho\vec{v}) = \rho_0 \operatorname{div}\vec{v} + (\rho_0 s \operatorname{div}\vec{v} + \rho_0 \vec{v}\,\nabla s).$$

Слагаемое в скобках в полученном выражении — это однородный полином второй степени относительно малых переменных

$$(s, \nabla s, \vec{v}, \nabla\vec{v}).$$

Пренебрегаем им, получая в результате следующее равенство

$$\operatorname{div}(\rho\vec{v}) \cong \rho_0 \operatorname{div}\vec{v}.$$

Далее из уравнения состояния и определения s имеем

$$\frac{\partial p}{\partial t} = c_0^2 \frac{\partial}{\partial t}(\rho^\gamma) = c_0^2 \gamma \rho^{\gamma-1} \frac{\partial \rho}{\partial t} = c_0^2 \gamma \rho_0^{\gamma-1} (1+s)^{\gamma-1} \frac{\partial \rho}{\partial t} =$$

$$= \rho_0^{\gamma-1} c_0^2 \gamma \big(1 + (\gamma-1)s + O(s^2)\big) \frac{\partial \rho}{\partial t} \cong c_0^2 \gamma \rho_0^{\gamma-1} \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Последнее равенство имеет место в силу малости колебаний, ибо произведение $s\frac{\partial\rho}{\partial t}$ — это однородный полином второй степени относительно малых переменных $(s, \frac{\partial\rho}{\partial t})$. Таким образом, имеем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \cong \frac{\rho_0^{1-\gamma}}{\gamma c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t}$$

и далее:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) \cong \frac{\rho_0^{1-\gamma}}{\gamma c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}\vec{v}.$$

Следовательно, в сделанных предположениях о малости колебаний уравнение неразрывности принимает вид:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \gamma p_0 \operatorname{div}\vec{v} = 0, \quad \text{где} \quad p_0 = c_0^2 \rho_0^\gamma.$$

Преобразуем уравнения движения. Имеем при $s \to 0$:

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{1}{\rho_0(1+s)}\nabla p, \quad \frac{1}{1+s} = 1 - s + O(s^2).$$

Пренебрегая величиной $O(s^2)$, получаем $\frac{1}{1+s} \cong 1 - s$ и далее

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} + \frac{1}{\rho}\nabla p \cong \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}(1-s)\nabla p \cong \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\nabla p = 0.$$

Здесь мы пренебрегли выражениями $(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}$ и $\frac{1}{\rho_0}s\nabla p$, ибо и то, и другое представляют собой однородный полином второй степени относительно обозначенных выше малых переменных.

Таким образом, система уравнений гидродинамики преобразована к виду

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial t} + \gamma p_0 \operatorname{div}\vec{v} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \dfrac{1}{\rho_0}\nabla p = 0. \end{cases}$$

Взяв $\gamma = 1$, получаем записанную в векторной форме *систему уравнений акустики*:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial t} + p_0 \operatorname{div}\vec{v} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \dfrac{1}{\rho_0}\nabla p = 0. \end{cases} \qquad (\mathbf{AQ})$$

5^0. Запишем систему уравнений акустики (**AQ**) покомпонентно, предположив, что *движение* среды *плоское*. Это означает, что векторы скорости любой частицы среды находятся в одной и той же плоскости в любой момент времени.

Для определенности предположим, что плоскость, в которой находятся скорости, совпадает с координатной плоскостью $z = 0$. Тогда имеем $\vec{v} =\uparrow (v_1, v_2, v_3)$, где $v_3 \equiv 0$. Символ $\uparrow$ означает, что речь идет о вектор-столбце. Переобозначим v_1 через u, v_2 через v и запишем исходную систему в этих обозначениях:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \Big(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\Big) = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial y} = 0. \end{cases} \qquad (\mathbf{AQ}')$$

Учитывая, что $v_3 \equiv 0$, последнее из уравнений движения запишем в виде $\partial p/\partial z = 0$. Это означает, что функция p не зависит от z. Система ($\mathbf{AQ}'$) представляет собой покомпонентную запись системы уравнений акустики.

Положив $\vec{u} =\uparrow (p, u, v)$, запишем систему ($\mathbf{AQ}'$) в матричном виде. В результате получим однородную систему линейных уравнений с частными производными первого порядка:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A_0'} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \rho_0 c_0^2 & 0 \\ \frac{1}{\rho_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A_1'} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho_0 c_0^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho_0} & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A_2'} \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} = 0. \qquad (\mathbf{AQ}'')$$

Матрицы A_1' и A_2' в системе ($\mathbf{AQ}''$) не симметрические, однако несложно найти эквивалентную форму записи с симметрическими матрицами A_0, A_1 и A_2.

С этой целью разделим первое уравнение системы ($\mathbf{AQ}''$) на $\rho_0 c_0^2$, а второе и третье ее уравнения домножим на ρ_0. Соответствующие матрицы A_0, A_1 и A_2 при этом примут следующий вид

$$A_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho_0 c_0^2} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Все эти три матрицы симметричны, причем матрица A_0 положительно определена, ибо по условию $\rho_0 > 0$ и $c_0^2 > 0$.

Следовательно, система уравнений акустики, записанная в виде $A_0\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + A_1\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + A_2\frac{\partial \vec{u}}{\partial y} = 0$, представляет собой симметрическую t-гиперболическую систему.

Уравнение конуса характеристических нормалей для системы (**AQ″**) имеет следующий вид $\det\left[A_0'\tau + A_1'\xi + A_2'\eta\right] = 0$, или, что то же самое:

$$\begin{vmatrix} \tau & \rho_0 c_0^2 \xi & \rho_0 c_0^2 \eta \\ \frac{1}{\rho_0}\xi & \tau & 0 \\ \frac{1}{\rho_0}\eta & 0 & \tau \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, имеем $\tau(\tau^2 - c_0^2(\xi^2 + \eta^2)) = 0$. Таким образом, конус характеристических нормалей системы уравнений акустики образуют три части:

1. плоскость $\tau = 0$.

2. граница $\tau - c_0\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = 0$, $\tau > 0$, верхней полости прямого кругового конуса с вершиной в начале и осью τ.

3. граница $\tau + c_0\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = 0$, $\tau < 0$, нижней полости прямого кругового конуса с вершиной в начале и осью τ.

Таким образом, поверхность $\varphi(x, y, t) = 0$ является для системы уравнений акустики характеристической, если градиент

$|\nabla\varphi| \neq 0$ ни в одной точке этой поверхности и при этом функция φ является решением одного из следующих трех уравнений

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} \mp c_0\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2} = 0.$$

Если нужно найти характеристические поверхности системы (**AQ′**), проходящие в начальный момент времени через заданную кривую $\varphi_0(x, y) = 0$, к каждому из записанных уравнений следует добавить начальные данные: $\varphi(x, y, 0) = \varphi_0(x, y)$. В результате получаем три задачи Коши.

Решение первой из них — это функция $\varphi_0(x, y)$, т.е. цилиндрическая поверхность $\varphi_0(x, y) = 0$ в пространстве переменных (x, y, t) является характеристической для системы уравнений акустики. Оставшиеся две задачи

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} \mp c_0\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2} = 0, \quad \varphi\big|_{t=0} = \varphi_0(x, y),$$

представляют собой *задачи Коши для уравнения Гамильто́на — Якóби*.

6^0. Приведем пример системы квазилинейных уравнений с частными производными первого порядка. Возьмем в системе уравнений гидродинамики $n = 1$, т.е.

$$\vec{v} = (v), \quad v = v(x, t), \quad p = p(x, t), \quad \rho = \rho(x, t).$$

Кроме того, предположим, что уравнение состояния имеет вид

$$p = f(\rho), \quad \text{где} \quad f'(\rho) = c^2 > 0,$$

т.е. функция $f(\rho)$ монотонно возрастает, обеспечивая выполнение принципа “чем выше плотность, тем больше давление”.

Тогда имеем

$$\operatorname{div}(\rho v) = \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = \rho \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial x},$$

и далее:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \dfrac{\partial v}{\partial x} + v \dfrac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t} + v \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Из равенства $p = f(\rho)$ следует, что

$$\frac{\partial p}{\partial x} = f'(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

Подставив это соотношение во второе уравнение полученной системы, затем запишем ее в матричном виде

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ v \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} v & \rho \\ \frac{f'(\rho)}{\rho} & v \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Домножив первое уравнение на $\frac{1}{\rho}$, а второе — на $\frac{\rho}{f'(\rho)}$, получим:

$$A_0 \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ v \end{pmatrix} + A_1 \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho \\ v \end{pmatrix} = 0,$$

где $A_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & \frac{\rho}{f'(\rho)} \end{bmatrix}$ и $A_1 = \begin{bmatrix} \frac{v}{\rho} & 1 \\ 1 & \frac{\rho v}{f'(\rho)} \end{bmatrix}$.

Матрицы A_0 и A_1 симметричны, а производная $f'(\rho)$ и плотность ρ строго положительны. Поэтому полученная система симметричная t-гиперболическая. Эта система к тому же квазилинейная и называется *системой уравнений одномерной газодинамики*.

Уравнение конуса характеристических нормалей системы уравнений газовой динамики имеет вид $\det\bigl[A_0\tau + A_1\xi\bigr] = 0$, или

$$\begin{vmatrix} (\tau + v\xi)\frac{1}{\rho} & \xi \\ \xi & (\tau + v\xi)\frac{\rho}{f'(\rho)} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, имеем:

$$(\tau + v\xi)^2\frac{1}{c^2} - \xi^2 = 0, \quad \text{где} \quad c^2 = f'(\rho) > 0.$$

Кривая $x - x(t) = 0$ будет характеристической для системы уравнений одномерной газодинамики и ее решения $\uparrow (\rho, v)$, если выполняются соотношения

$$\left(\frac{dx}{dt} - v\right)^2\frac{1}{c^2} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dx}{dt} = v \pm c.$$

По условию $c > 0$ и поэтому через любую точку плоскости (x, t), в которой определены значения $v(x, t)$ и $\rho(x, t)$, проходит ровно две различных характеристики системы.

Системы с подобным свойством называются *строго* t*-гиперболическими*.

Лекция 7.

ТЕМА: Области единственности для систем дифференциальных уравнений первого порядка. **1**^{0}. Постановка задачи на область единственности. **2**^{0}. Разбиение двойственного пространства ассоциированное с уравнением конуса характеристических нормалей. **3**^{0}. Уравнение границы компоненты, содержащей положительную полуось τ . **4**^{0}. Теорема о дифференциальном уравнении границы области единственности. **5**^{0}. Примеры решения задач на область единственности.

1^0. Предметом нашего внимания в настоящей лекции служит *система линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка* в пространстве независимых переменных (t, x, y). Общий вид систем такого типа задается следующим векторным равенством

$$A\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + B\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + C\frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + Q\vec{u} = \vec{f}. \qquad (\mathbf{LS})$$

Здесь $A(t, x, y)$, $B(t, x, y)$, $C(t, x, y)$ и $Q(t, x, y)$ — это квадратные матрицы размеров $n \times n$, элементы которых гладким образом зависят от независимых переменных. Вектор-функция $\vec{u} = \vec{u}(t, x, y)$ — искомая; $\vec{u}$ — это вектор-столбец с один раз непрерывно дифференцируемыми компонентами:

$$\vec{u} = (u_1(t, x, y), u_2(t, x, y), \ldots, u_n(t, x, y)).$$

Вектор-столбец $\vec{f}(t, x, y)$ в правой части (**LS**) предполагается известным:

$$\vec{f} = (f_1(t, x, y), f_2(t, x, y), \ldots, f_n(t, x, y)).$$

Если не оговорено противное, то скалярные компоненты $f_j(t, x, y)$ предполагаются непрерывными во всем трехмерном пространстве.

Матрицы A, B и C в старшей части системы (**LS**) симметричны, т.е.

$$A = A^*, \quad B = B^*, \quad C = C^*.$$

При этом матрица A положительно определена, т.е. $(A_0\vec{u}, \vec{u}) > 0$ для $\forall\, \vec{u} \neq 0$. Иными словами, система (**LS**) симметрическая и t-гиперболическая. Множество ее решений рассматриваем далее в полупространстве $t > 0$.

Отметим, что пример системы указанного типа дает система уравнений акустики.

Предположим, что *в начальный момент времени функция* $u(0, x, y)$ *известна лишь в некоторой ограниченной плоской области* G:

$$u(0, x, y) = u_0(x, y) \quad \text{при} \quad \forall\, (x, y) \in G. \qquad \textbf{(ID)}$$

Далее нас интересует ответ на следующий важный вопрос:

в какой части полупространства $t > 0$ решение $u(t, x, y)$ однозначно определяется по своим начальным данным (**ID**)?

Определение. *Ограниченное подмножество* $E = E(G)$ *полупространства* $t > 0$*, в точках которого решение* $u(t, x, y)$ *системы* (**LS**) *однозначно определяется по своим начальным значениям* (**ID**) *в области* G*, называется областью единственности.*

С учетом этого определения интересующий нас вопрос переформулируем следующим образом.

Задача. *Найти для данных линейной системы уравнений* (**LS**) *и ограниченной плоской области* G *соответствующую им область единственности* $E(G)$.

Если $E(G)$ — область единственности, то совокупность всех ее предельных точек, лежащих в плоскости $t = 0$, в точности совпадает с исходной областью G.

Граница начальной области G — это кривая в плоскости переменных (x, y). Пусть уравнение этой кривой имеет вид $\varphi_0(x, y) = 0$, причем внутри области G функция $\varphi_0(x, y)$ строго отрицательна, а вне — строго положительна, т.е. при переходе через границу ∂G функция $\varphi_0(x, y)$ возрастает. Тем самым градиент $\nabla\varphi_0(x, y)$ в любой точке границы ∂G направлен во внешность области G.

Пусть уравнение поверхности, ограничивающей область единственности $E(G)$, имеет вид $\varphi(t, x, y) = 0$. Тогда при $t = 0$ функция $\varphi(t, x, y)$ должна совпадать с функцией $\varphi_0(x, y)$:

$$\varphi(0, x, y) = \varphi_0(x, y) \quad \text{при} \quad \forall\,(x, y) \in G. \qquad (\mathbf{G_0})$$

Найти область единственности $E(G)$, т.е. решить поставленную выше задачу, это значит найти функцию $\varphi(t, x, y)$.

В итоге внутренность области $E(G)$ полностью будет охарактеризована парой неравенств:

$$E(G) = \big\{(t, x, y) \mid \varphi(t, x, y) < 0, \quad t > 0\big\}.$$

$\mathbf{2}^0$. Предположим, что область единственности $E(G)$ существует и ограничена в полупространстве $t > 0$ поверхностью $\varphi(t, x, y) = 0$.

Выясним при каких дополнительных ограничениях на функцию $\varphi(t, x, y)$ эта поверхность на самом деле может служить границей области $E(G)$. Как окажется, функция $\varphi(t, x, y)$ обязана быть решением некоторого нелинейного дифференциального уравнения.

С целью это уравнение получить, рассмотрим в пространстве двойственных к (t, x, y) переменных множество точек (τ, ξ, η), удовлетворяющих уравнению

$$\det\left[A\tau + B\xi + C\eta\right] = 0. \qquad (\mathbf{CE})$$

Здесь $A(t,x,y)$, $B(t,x,y)$, $C(t,x,y)$ — матрицы исходной системы (**LS**), а само равенство (**CE**) называется *уравнением конуса характеристических нормалей* для той же системы.

Преобразуем уравнение (**CE**). По условию матрица A положительно определена и по этой причине невырождена. Следовательно, имеет место равенство

$$p_n(\tau) = \det\left[\tau + A^{-1}B\xi + A^{-1}C\eta\right] = 0. \qquad (\mathbf{CE}')$$

При фиксированных (ξ,η) определитель в левой части (**CE′**) представляет собой полином $p_n(\tau)$ от τ степени n. Разложим его на линейные по τ множители:

$$p_n(\tau) = (\tau + h_1(\xi,\eta)) \cdot (\tau + h_2(\xi,\eta)) \ldots (\tau + h_n(\xi,\eta)).$$

Будем предполагать далее, что все корни $-h_j(\xi,\eta)$ в этом разложении вещественны и, воспользовавшись (**CE′**), получим

$$(\tau + h_1(\xi,\eta)) \cdot (\tau + h_2(\xi,\eta)) \ldots (\tau + h_n(\xi,\eta)) = 0. \qquad (\mathbf{CE}'')$$

С функциями $-h_j(\xi,\eta)$ из этого разложения свяжем еще одну, определяемую соотношением

$$H(\xi,\eta) = -\max\left\{-h_1(\xi,\eta), -h_2(\xi,\eta), \ldots, -h_n(\xi,\eta)\right\},$$

или, что то же самое:

$$H(\xi,\eta) = \min\left\{h_1(\xi,\eta), h_2(\xi,\eta), \ldots, h_n(\xi,\eta)\right\}. \qquad (\mathbf{H}_d)$$

Иными словами, функция $\tau_*(\xi,\eta) = -H(\xi,\eta)$ — это наибольший вещественный корень уравнения (**CE″**). Отметим, что введенная равенством ($\mathbf{H}_d$) функция $H(\xi,\eta)$ по своим аргументам нелинейна. Докажем, что *задающая границу области* $E(G)$

функция $\varphi(t,x,y)$ *удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению первого порядка*:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + H\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = 0.$$

Точнее, установим справедливость следующего утверждения.

Теорема. *Пусть функция* $\varphi(t,x,y)$ *удовлетворяет следующим двум условиям*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + H\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = 0, \quad \varphi(0,x,y) = \varphi_0(x,y).$$

Тогда внутри области, задаваемой неравенствами

$$\varphi(t,x,y) < 0, \quad t > 0, \tag{$\mathbf{E}(\mathbf{G})$}$$

решение задачи Коши (**LS**)–(**ID**) *определено однозначно.*

Иными словами, условия (**E**(**G**)) задают область единственности для задачи (**LS**)–(**ID**).

Отметим сразу же, что условие

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + H\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = 0$$

влечет за собой выполнение равенства

$$\det\left[A\varphi_t + B\varphi_x + C\varphi_y\right] = 0.$$

Это по определению означает, что поверхность $\varphi(t,x,y) = 0$ является характеристической для системы (**LS**).

Доказательству теоремы единственности предпошлем более детальное исследование множества K всех тех точек (τ,ξ,η), для которых матрица $(A\tau + B\xi + C\eta)$ неотрицательно определена:

$$K = \Big\{(\tau, \xi, \eta) \mid \big((A\tau + B\xi + C\eta)u, u\big) \geqslant 0 \quad \forall\, u\Big\}.$$

Заметим, что множество K, во-первых, не пусто: ему принадлежит точка $(1, 0, 0)$, как это следует из положительной определенности матрицы A.

Во-вторых, заметим, что множество K коническое, т.е. вместе с лежащей в K точкой (τ, ξ, η) ему же принадлежит весь проходящий через эту точку луч с центром в начале координат:

$$(\tau, \xi, \eta) \in K \Longrightarrow (\lambda\tau, \lambda\xi, \lambda\eta) \in K \quad \text{для} \quad \forall\, \lambda > 0.$$

В-третьих, заметим, что конус K — это выпуклое множество, т.е. вместе с любыми двумя точками (τ_1, ξ_1, η_1) и (τ_2, ξ_2, η_2) из K ему же принадлежит любая их выпуклая комбинация: $\alpha(\tau_1, \xi_1, \eta_1) + (1-\alpha)(\tau_2, \xi_2, \eta_2) \in K$ для всех $\alpha : 0 < \alpha < 1$.

Выведем уравнение границы конуса K. Пусть точка (τ_0, ξ_0, η_0) лежит на границе ∂K конуса. Тогда в силу непрерывности квадратичной формы $((\tau A + \xi B + \eta C)u, u)$ относительно переменных (τ, ξ, η) и ее же положительной определенности внутри K на его границе получаем предельное неравенство:

$$((\tau_0 A + \xi_0 B + \eta_0 C)u, u) \geqslant 0 \quad \forall\, (\tau_0, \xi_0, \eta_0) \in \partial K.$$

С другой стороны, *ни для какой лежащей на границе ∂K точки (τ_0, ξ_0, η_0) квадратичная форма $((\tau_0 A + \xi_0 B + \eta_0 C)u, u)$ не может быть положительно определенной*. Докажем это.

Предположим противное. Тогда для всех u с условием $(u, u) = 1$ справедливо неравенство

$$\big((\tau_0 A + \xi_0 B + \eta_0 C)u, u\big) \geqslant \varkappa > 0. \tag{1}$$

Матрица $(\tau_0 A + \xi_0 B + \eta_0 C)$ симметрична и в качестве $\varkappa$ в оценке (1) можно взять минимальное собственное число этой матрицы. Но собственные числа матрицы $\tau A + \xi B + \eta C$ от переменных (τ, ξ, η) зависят непрерывно. По этой причине неравенство (1) должно сохраняться и в некоторой окрестности точки (τ_0, ξ_0, η_0), что противоречит условию принадлежности (τ_0, ξ_0, η_0) границе ∂K.

Симметричная матрица положительно определена тогда и только тогда, когда все ее собственные числа строго положительны. Матрица же $(\tau_0 A + \xi_0 B + \eta_0 C)$ симметрична, не является положительно определенной и в то же время неотрицательно определена. Это возможно лишь в случае, если *у нее есть хотя бы одно нулевое собственное значение*. Следовательно, матрица $(\tau_0 A + \xi_0 B + \eta_0 C)$ обязана быть вырожденной:

$$\det\left[A\tau_0 + B\xi_0 + C\eta_0\right] = 0.$$

Пользуясь разложением определенного равенством (**CE′**) полинома $p_n(\tau_0)$ на линейные по τ_0 множители, приходим к эквивалентной форме записи предыдущего условия

$$(\tau_0 + h_1(\xi_0, \eta_0)) \ldots (\tau_0 + h_n(\xi_0, \eta_0)) = 0. \tag{2}$$

Следовательно, найдется номер j, для которого выполнено равенство $\tau_0 + h_j(\xi_0, \eta_0) = 0$. Если все функции $h_k(\xi_0, \eta_0)$ в разложении (2) различны, то номер j с указанным свойством единствен. Для фиксированных (ξ_0, η_0) нужный номер j определяется из условия, что

$$h_j(\xi_0, \eta_0) = \min\left\{h_1(\xi_0, \eta_0), h_2(\xi_0, \eta_0), \ldots, h_n(\xi_0, \eta_0)\right\}.$$

Иными словами, функция $h_j(\xi, \eta)$ совпадает с введенной ранее функцией $H(\xi, \eta)$. Таким образом, граница ∂K задается уравнением

$$\tau + H(\xi, \eta) = 0.$$

Перейдем к *доказательству сформулированной выше теоремы об области единственности*.

Пусть есть два решения $u_1(t,x,y)$ и $u_2(t,x,y)$ задачи Коши (**LS**)–(**ID**). Функция $\vec{u}(t,x,y) = \vec{u_1}(t,x,y) - \vec{u_2}(t,x,y)$ удовлетворяет однородной линейной системе

$$A\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + B\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + C\frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + Q\vec{u} = 0 \qquad (\mathbf{LS_0})$$

и однородным же начальным данным

$$u(0,x,y) = 0 \quad \text{при} \quad \forall\,(x,y) \in G. \qquad (\mathbf{ID_0})$$

Предположив, что матрицы A, B и C постоянны, домножим обе части системы ($\mathbf{LS_0}$) скалярно на вектор функцию $2\vec{u}(t,x,y)$. Тогда получим

$$2(A\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \vec{u}) + 2(B\frac{\partial \vec{u}}{\partial x}, \vec{u}) + 2(C\frac{\partial \vec{u}}{\partial y}, \vec{u}) + 2(Q\vec{u}, \vec{u}) = 0. \qquad (3)$$

Преобразуем выражение в левой части. Имеем

$$2\left(A\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \vec{u}\right) = \left(\frac{\partial (A\vec{u})}{\partial t}, \vec{u}\right) + \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, A^*\vec{u}\right) =$$

$$\left(\frac{\partial (A\vec{u})}{\partial t}, \vec{u}\right) + \left(A\vec{u}, \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(A\vec{u}, \vec{u}).$$

Аналогичные равенства справедливы для матриц B и C:

$$2\left(B\frac{\partial \vec{u}}{\partial x}, \vec{u}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(B\vec{u}, \vec{u}), \quad 2\left(C\frac{\partial \vec{u}}{\partial y}, \vec{u}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(C\vec{u}, \vec{u}).$$

Используем кроме того следующее представление квадратичной формы с матрицей Q:

$$2(Q\vec{u},\vec{u}) = (Q\vec{u},\vec{u}) + (\vec{u},Q^*\vec{u}) =$$

$$((Q+Q^*)\vec{u},\vec{u}) = -(D\vec{u},\vec{u}).$$

Здесь и далее через D обозначена матрица $-(Q+Q^*)$. Подставляя найденные представления квадратичных форм в равенство (3), приходим к следующему дифференциальному тождеству

$$\frac{\partial}{\partial t}(A\vec{u},\vec{u}) + \frac{\partial}{\partial x}(B\vec{u},\vec{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(C\vec{u},\vec{u}) = (D\vec{u},\vec{u}). \tag{$\mathbf{EI_d}$}$$

Матрицы A, B, C и D здесь симметричны, т.е.

$$A = A^*, \quad B = B^*, \quad C = C^*, \quad D = D^*.$$

Тождество (**EI_d**) называется *интегралом энергии для системы* (**LS**), записанным *в дифференциальной форме*.

Возьмем два различных значения t, подчинив их условиям $0 < t_1 < t_2 < T$, где $T = \max\limits_{x,y,t} \varphi(t,x,y)$.

Рассмотрим объемный слой $V(t_1,t_2)$, заключенный между сечениями поверхности $\varphi(t,x,y) = 0$ плоскостями $t = t_1$ и $t = t_2$ внутри области $\varphi(t,x,y) < 0$. Проинтегрировав тождество (**EI_d**) по $V(t_1,t_2)$, получим

$$\int\limits_{V(t_1,t_2)} \left[\frac{\partial}{\partial t}(A\vec{u},\vec{u}) + \frac{\partial}{\partial x}(B\vec{u},\vec{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(C\vec{u},\vec{u})\right] dtdxdy =$$

$$= \int\limits_{V(t_1,t_2)} (D\vec{u},\vec{u})\, dtdxdy. \tag{$\mathbf{EI}$}$$

Объемный интеграл слева преобразуем по формуле Гаусса—Остроградского:

$$\int\limits_{V(t_1,t_2)} \left[\frac{\partial}{\partial t}(A\vec{u},\vec{u}) + \frac{\partial}{\partial x}(B\vec{u},\vec{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(C\vec{u},\vec{u})\right] dtdxdy =$$

$$= \int\limits_{\partial V(t_1,t_2)} \left[\tau(A\vec{u},\vec{u}) + \xi(B\vec{u},\vec{u}) + \eta(C\vec{u},\vec{u})\right] dS.$$

Здесь (τ,ξ,η) — единичная внешняя нормаль к границе $\partial V(t_1,t_2)$ в соответствующей точке.

Поверхность $\partial V(t_1,t_2)$ состоит из трех частей: плоскости $t = t_1$, где $(\tau,\xi,\eta) = (-1,0,0)$, плоскости $t = t_2$, где $(\tau,\xi,\eta) = (1,0,0)$, и части $S(t_1,t_2)$ поверхности $\varphi(t,x,y) = 0$ между плоскостями $t = t_1$ и $t = t_2$, где

$$(\tau,\xi,\eta) = \frac{1}{|\nabla\varphi|}(\varphi_t,\varphi_x,\varphi_y).$$

После подстановки преобразованного интеграла в левую часть равенства (**EI**) приходим к соотношению

$$I(t_2) - I(t_1) +$$

$$\int\limits_{S(t_1,t_2)} \left[\varphi_t(A\vec{u},\vec{u}) + \varphi_x(B\vec{u},\vec{u}) + \varphi_y(C\vec{u},\vec{u})\right] \frac{1}{|\nabla\varphi|}\, dS =$$

$$= \int\limits_{V(t_1,t_2)} (D\vec{u},\vec{u})\, dtdxdy.$$

Здесь через $I(t)$ обозначен следующий интеграл

$$I(t) = \int\limits_{\varphi(t,x,y)<0} (A\vec{u},\vec{u})\, dxdy.$$

В силу положительной определенности матрицы A интеграл $I(t)$ при всех $t \geqslant 0$ неотрицателен, в начальный же момент времени этот интеграл берется по области G и, в силу совпадения в этой области функций $u_1(0,x,y)$ и $u_2(0,x,y)$, этот интеграл равен нулю:

$$I(0) = \int\limits_{\varphi(0,x,y)<0} (A\vec{u},\vec{u})\,dxdy = \int\limits_{G} (A\vec{u},\vec{u})\Big|_{t=0} dxdy = 0.$$

По условию вектор нормали $(\tau,\xi,\eta) = \frac{1}{|\nabla\varphi|}(\varphi_t,\varphi_x,\varphi_y)$. лежит на границе конуса K характеристических направлений. Следовательно, на поверхности $S(t_1,t_2)$ матрица

$$\frac{1}{|\nabla\varphi|}\left[\varphi_t(A\vec{u},\vec{u}) + \varphi_x(B\vec{u},\vec{u}) + \varphi_y(C\vec{u},\vec{u})\right]$$

неотрицательно определена. Таким образом, имеем неравенство

$$I(t_2) \leqslant I(t_1) + \int\limits_{V(t_1,t_2)} (D\vec{u},\vec{u})\,dtdxdy =$$

$$= I(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t_2} \left\{ \int\limits_{\varphi(\tau,x,y)<0} (D\vec{u},\vec{u})\,dxdy \right\} d\tau.$$

Из определения матрицы D и положительной определенности матрицы A следует, что существует такая постоянная M, с которой имеет место оценка $|(D\vec{u},\vec{u}) \leqslant M(A\vec{u},\vec{u})$. Подставляя ее в предыдущее неравенство, получаем

$$I(t_2) \leqslant I(t_1) + M\int\limits_{t_1}^{t_2} I(\tau)\,d\tau.$$

Переходя здесь к пределу при $t_1 \to t_2$, получаем в итоге следующее дифференциальное неравенство

$$I'(t) \leqslant MI(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Домножая обе части полученного неравенства на положительную функцию e^{-Mt} и производя перегруппировку слагаемых, приходим к оценке

$$e^{-Mt}I'(t) - Me^{-Mt}I(t) \leqslant 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

или, в эквивалентном виде

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-Mt}I(t)\right) \leqslant 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Таким образом, функция $e^{-Mt}I(t)$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$ монотонно не возрастает, принимая в любой рассматриваемый момент времени значение, не превосходящее начального:

$$I(t) \leqslant e^{Mt}I(0), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{$\mathbf{EI}_+$}$$

Как уже отмечалось выше, в условиях теоремы интеграл $I(0)$ равен нулю. Следовательно, в силу априорной оценки ($\mathbf{EI}_+$) неотрицательная функция $I(t)$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$ обязана равняться нулю тождественно. Учитывая еще положительную определенность матрицы A, заключаем, что вектор-функция

$$\vec{u}(t,x,y) = \vec{u_1}(t,x,y) - \vec{u_2}(t,x,y)$$

в области ($\mathbf{E}(\mathbf{G})$) также равна нулю тождественно. Теорема об области единственности доказана.

Лекция 8.

ТЕМА: Предмет и эффекты теории нелинейных волн. $\mathbf{1}^0$. Примеры нелинейных уравнений теории волн. Эффекты, характерные для теории нелинейных волн. $\mathbf{2}^0$. Дисперсия волн: дисперсионное соотношение для линейных уравнений и систем, примеры, размывание профиля волны в среде с дисперсией, нелинейный случай. $\mathbf{3}^0$. Разрушение волны: задача Коши для уравнения простых волн, ее решение методом характеристик. Обобщенное решение уравнения простых волн. Условия на разрыве и поиск точки разрыва.

$\mathbf{1}^0$. Моделирование реальных волновых процессов зачастую приводит к задачам для нелинейных дифференциальных уравнений или систем. В простейших нелинейных моделях искомая функция $u = u(x,t)$ зависит ровно от двух вещественных переменных, одна из которых t всегда неотрицательна, $t \geqslant 0$. Общий вид уравнения, решением которого в этом случае является искомая функция $u = u(x,t)$, задается следующим равенством

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x-s)\frac{\partial u}{\partial s}(s,t)\,ds = 0. \qquad (\mathbf{U})$$

Ядро $K(\cdot)$ интегрального оператора в (**U**) может быть как гладкой функцией, так и функцией из $L_2(\mathbb{R})$, а в ряде случаев — даже сингулярной обобщенной функцией. Равенство (**U**) в общем случае представляет собой интегродифференциальное нелинейное уравнение.

В случае тождественно нулевого ядра $K(\cdot)$ уравнение (**U**) становится квазилинейным уравнением с частными производными первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \qquad (\mathbf{SW})$$

Далее будем ссылаться на уравнение (**SW**) как на *уравнение простых волн*. Если ядро $K(\cdot)$ принадлежит $L_2(\mathbb{R})$, то уравнение (**U**) называют *уравнением Уизема*.

Решение уравнения (**U**), если не оговаривается иное, будем искать в классе непрерывно дифференцируемых функций $v(x,t)$, имеющих непрерывные по x производные вплоть до заданного порядка m и удовлетворяющих для любого $T > 0$ условию

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+|x|)|v(x,t)|\,dx < +\infty. \tag{FD}$$

Функции с условием (**FD**) будем называть *быстроубывающими*. Если это необходимо, то и производные по x вплоть до заданного порядка m также будем предполагать быстроубывающими.

Отметим, что если решение $u(x,t)$ уравнения (**U**) быстроубывающая функция, то для функции $\varphi(x) = u(x,0)$ справедлива оценка

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+|x|)|\varphi(x)|\,dx < +\infty.$$

В частности, этому соотношению удовлетворяет любая финитная бесконечно дифференцируемая функция $\varphi(x)$ одной переменной, а также производная любого порядка от такой функции.

Если $K(y) = \delta'(y)$, где $\delta(y)$ — это известная дельта функция Дирака, то уравнение (**U**) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Это квазилинейное уравнение с частными производными второго порядка известно как *уравнение Бюргерса*.

Если $K(y) = -\delta''(y)$, то уравнение (**U**) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

Это нелинейное уравнение с частными производными третьего порядка с помощью подходящей замены переменных приводится к эквивалентной форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \qquad (\mathbf{KdF})$$

В виде (**KdF**) уравнение известно как *уравнение Кортвега–де Фриза*, или (КдФ)-*уравнение*.

Уравнения простых волн, Кортвега–де Фриза и Бюргерса служат элементарными базовыми моделями нелинейной теории волн. Конечно же, этими уравнениями не исчерпывается все многообразие математических моделей, примеры важных нелинейных уравнений дают *кубическое уравнение Шредингера*:

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu|u|^2 u = 0,$$

а также уравнение *синус–Гордона*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sin u = 0.$$

Мы же, в основном, будем рассматривать далее задачу Коши для уравнения простых волн, уравнения (КдФ), а также уравнения Бюргерса. Такая задача получается добавлением к уравнению начального условия вида $u(x, 0) = \varphi(x)$, где гладкая функция $\varphi(x)$ задана и быстро убывает вместе со своими производными вплоть до нужного порядка.

При изучении нелинейных волн в средах принято выделять некоторые характерные для таких волн эффекты. К такого рода эффектам относят, в частности, *дисперсию волн*, а также *разрушение, или опрокидывание, волны* с образованием разрывов. Особое внимание уделяется поиску специальных частных решений нелинейных уравнений, называемых солитонами. По определению, *солитон* — это такая уединенная волна (локализованное в пространстве решение нелинейного эволюционного уравнения), которая взаимодействует с другими локальными возмущениями упругим образом, т.е. подобно частице всегда восстанавливает свою первоначальную форму.

Уединенную волну — солитон — впервые наблюдал в 1834 г. Дж. Рассел (J. Russell). Он дал ее научное описание в 1838 г., назвав волной переноса. В 1895 г. Д.Кортевег (D.Korteweg) и де Г.Фрис (G. de Vries) получили приближенное уравнение распространения волн в одном направлении по поверхности мелкого канала, позже и получившее название уравнения (КдФ).

2^0. Понятие *дисперсии* исторически появилось в связи с рассмотрением линейных моделей, соответствующих дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами. Общий вид такого уравнения в случае двух переменных (x, t) следующий:

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha D^\alpha u = 0,$$

где $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1)$, a_α — постоянные, $D = (\partial/\partial t, \partial/\partial x)$. Образуем следующий полином

$$L[\tau, \xi] = \sum_{0\leqslant\alpha_0+\alpha_1\leqslant m} a_{(\alpha_0,\alpha_1)} \tau^{\alpha_0} \xi^{\alpha_1}.$$

Тогда исходное линейное уравнение можно записать в операторном виде

$$L[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}]u = 0. \qquad \textbf{(LE)}$$

Рассмотрим теперь *плоскую гармоническую волну*, т.е. функцию вида

$$u(x,t) = Ae^{ikx - i\omega t}. \qquad \textbf{(PW)}$$

Здесь A — *амплитуда*, k — *волновое число*, ω — *угловая частота*, $\Phi = kx - \omega t$ — *фаза* волны.

Выясним, когда рассматриваемая функция $u(x,t)$ будет решением дифференциального уравнения (**LE**). Подставив (**PW**) в (**LE**), получим

$$L[-i\omega, ik]Ae^{ikx - i\omega t} = 0 \;\Leftrightarrow\; L[-i\omega, ik] = 0. \qquad \textbf{(DR)}$$

Полученное уравнение (**DR**) называется *дисперсионным соотношением* для уравнения (**LE**).

Таким образом, плоская гармоническая волна (**PW**) решает уравнение (**LE**) тогда и только тогда, когда угловая частота ω связана с волновым числом k дисперсионным соотношением (**DR**).

Разрешим дисперсионное соотношение (**DR**) относительно угловой частоты ω, т.е. определим переменную ω как функцию $\omega = \omega(k)$ вещественного волнового числа k. Тогда скорость распространения плоской гармонической волны (**PW**) вдоль оси x определится равенством

$$C_\Phi = \frac{\omega(k)}{k}.$$

Величину C_Φ называют *фазовой скоростью*.

Если фазовая скорость C_Φ не зависит от k, т.е. постоянна, то говорят, что *волна распространяется без дисперсии*. В противном случае говорят о *дисперсии волны*, или, что то же самое, о распространении волны в диспергирующей среде.

Рассмотрим несколько примеров. Волновому уравнению (**W**) соответствует дисперсионное соотношение $\omega^2 = a^2k^2$, откуда следует, что фазовая скорость в этом случае равна $\pm a$, т.е. дисперсия в этом случае отсутствует. Далее, уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2\Delta^2 u = 0$$

соответствует дисперсионное соотношение $-\omega^2 + c^2k^4 = 0$, откуда следует, что $C_\Phi = \pm ck$, т.е. уравнение описывает распространение волны в среде с дисперсией.

Для линеаризованного уравнения Кортвега–де Фриза

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_0\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{h_0^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

дисперсионное соотношение имеет вид

$$-i\omega + ic_0k + i\frac{h_0^2}{6}k^3 = 0,$$

откуда следует, что $C_\Phi = c_0 + \frac{h_0^2}{6}k^2$, т.е. и в этом случае уравнение описывает волны в среде с дисперсией.

Волновые процессы при наличии дисперсии и без таковой существенно отличаются друг от друга. Поясним, почему так происходит.

Пусть профиль волны $u(x,t)$ в начальный момент времени задается соотношением $u(x,0) = u_0(x)$. Тогда искомая функция решает следующую задачу Коши

$$L[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}]u = 0 \quad \text{при} \quad t > 0, \quad u(x,0) = u_0(x).$$

При известных из математического анализа условиях функцию $u_0(x)$ можно представить как суперпозицию плоских гармонических волн:

$$u_0(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A(k)e^{ikx}\, dk. \qquad (\widehat{\mathbf{A}})$$

Такое разложение имеет место, например, если функция $u_0(x)$ принадлежит $L_2(\mathbb{R})$. В среде без дисперсии все составляющие профиль гармоники $A(k)e^{ikx}$ под интегралом в правой части ($\widehat{\mathbf{A}}$) с увеличением t распространяются вдоль оси x с одной и той же скоростью. Тем самым и в силу линейности уравнения *форма начального волнового профиля с течением времени не изменяется*.

В среде же с дисперсией разные составляющие гармоники $A(k)e^{ikx}$ имеют различные в зависимости от волнового числа k скорости распространения. В результате *начальная волна со временем растекается по всему пространству*.

Определить дисперсию волны в случае нелинейного дифференциального уравнения или же линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами по рассмотренной выше схеме не получится. В этих случаях уравнение может попросту не иметь решений типа плоских гармонических волн. Чтобы преодолеть это затруднение, используют линеаризованные уравнения, а переменные коэффициенты заменяют на постоянные. Если полученное в результате линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами описывает диспергирующие волны, то и к исходному уравнению применяют тот же термин.

3^0. С явлением разрушения, или опрокидывания, волны познакомимся на примере уравнения простых волн

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{\textbf{SW}}$$

Пусть $u = u(x,t)$ — решение этого уравнения, удовлетворяющее в начальный момент времени условию $u(x,0) = g(x)$. Как вам известно из теории уравнений с частными производными первого порядка, решение этой задачи Коши неявным образом задается равенством

$$u = g(x - ut).$$

Взяв его за отправную точку, исследуем поведение решения $u(x,t)$ при увеличении t.

На плоскости (x,t) рассмотрим семейство кривых, задаваемое дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = u(x,t). \tag{1}$$

Заметим, что вдоль каждой кривой семейства (1) функция $u(x(t),t)$ от времени никак не зависит:

$$\frac{d}{dt}\big(u(x(t),t)\big) = \frac{\partial u}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

В частности, имеют место соотношения

$$u(x(t),t) = u(x(0),0) = g(x(0)) \qquad \forall\, t \geqslant 0.$$

Следовательно, любое решение уравнения (1) представляет собой прямую вида

$$x - g(x_1)t = x_1, \tag{\textbf{L}}$$

где через x_1 обозначена точка пересечения прямой (**L**) с осью x. Наклон этой прямой полностью определяется значением функции $g(\cdot)$ в точке пересечения (**L**) с осью $t = 0$.

Вдоль прямой (**L**) решение $u(x, t)$ рассматриваемой задачи Коши постоянно. Пользуясь этим замечанием, покажем как найти значение $u(x, t)$ при данном $t > 0$.

Предположим, что функция $g(x)$ равна нулю вне конечного отрезка $[a, b]$ числовой оси, т.е. финитна, а ее график в плоскости (x, u) имеет вид гладкого выпуклого горба.

Выберем точку x_1 из $[a, b]$ и построим в плоскости (x, t) прямую $x - g(x_1)t = x_1$ с углом наклона $\operatorname{tg}\varphi = 1/g(x_1)$.

В той же плоскости (x, t) проведем прямую $t = t_*$ и определим затем абсциссу x_* ее точки пересечения с прямой

$$x - g(x_1)t = x_1.$$

Затем, вернувшись в плоскость (x, u), отметим на ней точку $(x_*, g(x_*))$. Изменяя теперь x_1 от a до b, получим на (x, u) параметрически заданную кривую

$$\big(x_*(x_1), g(x_*(x_1))\big) \qquad \forall\, x_1 \in [a, b].$$

Эта кривая задает в плоскости (x, u) график решения $u(x, t)$ в момент времени $t = t_*$. При $t = 0$ он совпадает с графиком функции $g(\cdot)$.

График $u = u(x, t_*)$ при непрерывном изменении t_* в полуокрестности нуля на полупрямой $t > 0$ также непрерывно деформируется. *Начиная с некоторого момента* $t = t_d$ *отвечающие различным* x_1 *прямые вида*

$$x - g(x_1)t = x_1$$

начнут пересекаться друг с другом. В результате значению $x = x^*$ будет соответствовать не одно, а несколько возможных значений решения $u = u(x, t_d)$. Это означает, что при $t = t_d$ *прямая $x = x_*$ пересекает график решения более чем в одной точке*. Явление потери решением однозначности называют его *разрушением*, или *опрокидыванием волны*.

Причину опрокидывания волны можно понять если вспомнить, что параметр a в равенстве $v = g(x - at)$ задает скорость распространения волны на плоскости (x, v). Тем самым из равенства $u = g(x - ut)$ вытекает, что чем больше амплитуда $g(x_1)$ точки x_1, тем выше скорость u распространения волны $g(x - ut)$. Иначе говоря, *точки вершины волнового профиля в каждый момент времени движутся вдоль оси быстрее чем точки его подошвы*.

Неоднозначность решения противоречит самой сути физического процесса, описываемого дифференциальным уравнением: согласно исходным предположениям решение $u = u(x, t)$ этого уравнения обязано быть функцией со вполне определенными значениями в каждый момент времени.

Чтобы справиться с возникшим противоречием, понятие решения расширяют, рассматривая в качестве допустимых решений уравнения простых волн разрывные функции. Выясним, в каком смысле разрывная функция может выступать как решение уравнения простых волн.

Определение. *Будем говорить, что функция $u = u(x, t)$ удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

в обобщенном смысле, если для любого прямоугольника

$$\Pi_{x,t} = \{(x,t) \mid x_1 < x < x_2, 0 < t_1 < t < t_2\}$$

и любой бесконечно дифференцируемой и финитной в $\Pi_{x,t}$ *функции* $\varphi = \varphi(x,t)$ *выполняется интегральное соотношение*

$$\int\limits_{\Pi_{x,t}} \left(u\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}u^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) dxdt = 0. \tag{2}$$

Докажем, что *если обобщенное решение уравнения простых волн непрерывно дифференцируемо, то оно удовлетворяет этому уравнению в обычном поточечном смысле.*

Учитывая тождество $u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(u^2)$, а также пользуясь формулой интегрирования по частям и финитностью φ, получаем

$$\int\limits_{\Pi_{x,t}} \left(u\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}u^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) dxdt = - \int\limits_{\Pi_{x,t}} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right)\varphi\, dxdt = 0. \tag{3}$$

Интегралы по границе $\partial\Pi_{x,t}$ здесь равны нулю в силу финитности φ в $\Pi_{x,t}$.

Учитывая, что функция φ и прямоугольник $\Pi_{x,t}$ в (3) произвольны, по лемме дю Буа–Реймонда получаем для функции u искомое уравнение простых волн во всей полуплоскости $t > 0$.

Как следует из (3), верно и обратное утверждение: *обычное решение уравнения простых волн удовлетворяет этому уравнению и в обобщенном смысле*.

Далее, обобщенное решение $u = u(x,t)$ уравнения (**SW**) будем называть *простейшим*, если выполняются следующие два условия.

1). Функция $u = u(x,t)$ является обычным поточечным решением уравнения (**SW**) над и под некоторой кривой $x = s(t)$ в полуплоскости $t > 0$.

2). Функция $u = u(x,t)$ является обобщенным решением уравнения (**SW**) и терпит разрыв на кривой $x = s(t)$.

Оказывается, что *любое простейшее обобщенное решение уравнения* (**SW**) *на кривой разрывов* $x = s(t)$ *удовлетворяет некоторым условиям*, которые мы сейчас и получим.

Рассмотрим прямоугольник $\Pi_{x,t}$, содержащий внутри себя кривую разрывов γ. Эта кривая разбивает $\Pi_{x,t}$ на две части: верхнюю $\Pi^+_{x,t}$ и нижнюю $\Pi^-_{x,t}$. Пусть φ финитна в $\Pi_{x,t}$, а u — обобщенное решение уравнения (**SW**). Проинтегрировав по $\Pi^+_{x,t}$ функцию $u\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, и применив к получившемуся интегралу формулу интегрирования по частям, получим

$$\int\limits_{\Pi^+_{x,t}} \Big(u\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big)\,dxdt = \int\limits_{\partial\Pi^+_{x,t}} \Big(u_+\varphi\cos\widehat{\nu t} + \frac{(u_+)^2}{2}\varphi\cos\widehat{\nu x}\Big)\,dS -$$

$$-\int\limits_{\Pi^+_{x,t}} \Big(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{u^2}{2}\big)\Big)\varphi\,dxdt.$$

С учетом уравнения (**SW**)имеем далее:

$$\int\limits_{\Pi^+_{x,t}} \Big(u\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big)\,dxdt = \int\limits_{\partial\Pi^+_{x,t}} \Big(u_+\cos\widehat{\nu t} + \frac{(u_+)^2}{2}\cos\widehat{\nu x}\Big)\varphi\,dS. \tag{4}$$

В (4) через $\nu = \nu^+ = (\cos\widehat{\nu x}, \cos\widehat{\nu t})$ обозначена единичная внешняя нормаль к $\partial\Pi^+_{x,t}$, а через u_+ — предельные значения функции u при стремлении внутренних точек области $\Pi^+_{x,t}$ к ее граничным точкам. Аналогичное соотношение имеет место в нижней части $\Pi^-_{x,t}$ прямоугольника:

$$\int\limits_{\Pi^-_{x,t}} \left(u\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) dxdt = \int\limits_{\partial\Pi^-_{x,t}} \left(u_-\cos\widehat{\nu t} + \frac{(u_-)^2}{2}\cos\widehat{\nu x}\right)\varphi\, dS. \tag{4'}$$

В (4') через $\nu = \nu^- = (\cos\widehat{\nu x}, \cos\widehat{\nu t})$ обозначена единичная внешняя нормаль к $\partial\Pi^-_{x,t}$, а через u_- — предельные значения функции u при стремлении внутренних точек области $\Pi^-_{x,t}$ к ее граничным точкам.

Пользуясь финитностью функции φ в прямоугольнике, заменим в (4)–(4') интегралы по $\partial\Pi^+_{x,t}$ и $\partial\Pi^-_{x,t}$ на интеграл по общей части γ этих кривых, разделяющей $\Pi^+_{x,t}$ и $\Pi^-_{x,t}$. Учитывая, что $\nu^- = -\nu^+$ и складывая равенства (4) и (4'), получим

$$\int\limits_{\Pi_{x,t}} \left(u\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) dxdt =$$

$$\int\limits_{\gamma} \left[(u_+ - u_-)\cos\widehat{\nu t} + \frac{(u_+)^2 - (u_-)^2}{2}\cos\widehat{\nu x}\right]\varphi\, dS.$$

Здесь через $\nu = \nu^+ = (\cos\widehat{\nu x}, \cos\widehat{\nu t})$ обозначена единичная внешняя нормаль к $\partial\Pi^+_{x,t}$.

Учитывая, что u — это обобщенное решение уравнения (**SW**), заключаем из последнего равенства, что интеграл

$$\int\limits_{\gamma} \left[(u_+ - u_-)\cos\widehat{\nu t} + \frac{(u_+)^2 - (u_-)^2}{2}\cos\widehat{\nu x}\right]\varphi\, dS$$

равен нулю. Функция φ здесь произвольна и по этой причине всюду на кривой γ должно выполняться соотношение

$$(u_+ - u_-)\left[\cos\widehat{\nu t} + \frac{u_+ + u_-}{2}\cos\widehat{\nu x}\right] = 0. \tag{5}$$

Далее, на кривой γ, задаваемой уравнением $x = s(t)$, имеем соотношения

$$\cos\widehat{\nu t} = \frac{\dot{s}(t)}{\sqrt{1+\dot{s}^2(t)}}, \quad \cos\widehat{\nu x} = -\frac{1}{\sqrt{1+\dot{s}^2(t)}}.$$

Подставляя эти соотношения в (5) и производя очевидные упрощения, получаем искомые *условия на разрыве*:

$$\dot{s}(t) = \frac{u_+ + u_-}{2}.$$

Полученное равенство задает скорость распространения разрыва и называется *формулой Гюгонио–Ренкина*.

Вернемся теперь к появлению многозначности в определении решения $u(x,t)$ уравнения простых волн при $t > t_d$. Получим в этом случае *однозначное обобщенное решение* уравнения (**SW**).

Введем на $[a,b]$ точку разрыва $x_* = s(t)$ искомого обобщенного решения. Для $a \leqslant x < x_*$ полагаем функцию $u(x,t)$ равной верхней части волнового профиля:

$$u(x,t) = u_+(x,t).$$

Если же $x_* < x \leqslant b$, то функцию $u(x,t)$ возьмем совпадающей с нижней частью того же волнового профиля:

$$u(x,t) = u_-(x,t).$$

Построенная таким образом составная функция $u(x,t)$ однозначна и разрывна.

Оказывается, что при правильном выборе точки $x_* = s(t)$ эта составная функция $u(x,t)$ представляет собой простейшее обобщенное решение уравнения (**SW**).

Способ правильного выбора точки $x_* = s(t)$ основан на следующем замечании. Проинтегрировав в данный момент времени уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{u^2}{2}\Big) = 0$$

по всей оси абсцисс, получим

$$\int \Big[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{u^2}{2}\Big)\Big]\,dx = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\int u(x,t)\,dx\Big) + \frac{u^2}{2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

Пользуясь быстрым убыванием функции $u(x,t)$, заключаем теперь, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\int u(x,t)\,dx\Big) = 0.$$

Следовательно, интеграл $I(t) = \int u(x,t)\,dx$ постоянен во времени.

Геометрический смысл интеграла $I(t)$ в случае, когда функция $u(x,t)$ однозначна, известен: это площадь, заключенная между кривой $u = u(x,t)$ и прямой $u = 0$ на плоскости (x,u). Это замечание и предлагается брать за основу при выборе точки $x_* = s(t)$. Сформулируем соответствующее правило точно.

Точку x_* следует выбирать так, чтобы площадь фигуры, заключенной между частью профиля многозначной волны, лежащей слева от прямой $x = x_*$, и отрезком $u_-(x_*,t) \leqslant u \leqslant u_+(x_*,t)$ самой прямой $x = x_*$ совпадала бы с площадью аналогичной фигуры, ограниченной частью профиля многозначной волны, лежащей справа от прямой $x = x_*$, и тем же самым отрезком на прямой $x = x_*$.

ТЕМА: Обобщенные функции. **1**^{0}. Незамкнутость пространства решений линейного однородного уравнения по равномерной норме. Пример. **2**^{0}. Пространства $L_{loc}(\Omega)$, $L_p(\Omega)$. **3**^{0}. Иллюстрация принципа двойственности на примере пространств $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Omega)^*$. **4**^{0}. Классы $C^\infty(\Omega)$ и $C_0^\infty(\Omega)$. Отображение пространства $L_{loc}(\Omega)$ в пространство линейных функционалов на $C_0^\infty(\Omega)$. Однозначность этого отображения как следствие леммы дю Буа-Реймонда. **5**^{0}. Лемма дю Буа-Реймонда — формулировка и доказательство.

1^0. Решения линейного дифференциального уравнения

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha u = 0, \quad x \in \Omega, \tag{LE}$$

образуют в совокупности линейное пространство. Элементы этого пространства — суть функции из $C^{(m)}(\Omega)$, т.е. имеют в области определения Ω по крайней мере m непрерывных производных.

Однако предел последовательности решений уравнения (**LE**), взятый по норме $C(\overline{\Omega})$, т.е. по равномерной норме, пространству $C^{(m)}(\Omega)$, вообще говоря, не принадлежит.

Пример. Покажем, что *равномерный предел последовательности решений дифференциального уравнения первого порядка, пространству* $C^{(1)}(\overline{\Omega})$, *вообще говоря, не принадлежит*. С этой целью рассмотрим на плоскости (x, t) уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Гладким его решением будет любая функция вида $f(x-t)$, где $f(\xi)$ принадлежит $C^{(1)}(\mathbb{R})$. В частности, решениями уравнения являются тригонометрические суммы вида

$$u_N(x-t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{N} \frac{\cos(2m-1)\pi(t-x)}{(2m-1)^2}, \quad N = 1, 2, \ldots.$$

При $N \to \infty$ последовательность $\{u_N(\xi)\}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$ к функции $u_0(\xi)$, определяемой следующим образом:

$$u_0(\xi) = |\xi| \quad \text{при} \quad -1 \leqslant \xi \leqslant 1,$$

и далее:

$$u_0(\xi \pm 2m) = u_0(\xi) \quad \text{при} \quad m = \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Функция $u_0(\xi)$ непрерывна и периодична с периодом 2 на всей числовой оси. При этом $u_N(\xi)$ — это частичная сумма ряда Фурье для $u_0(\xi)$, т.е.

$$u_0(\xi) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2m-1)\pi\xi}{(2m-1)^2} \quad \text{при} \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Каждая из функций $u_N(x-t)$ бесконечно дифференцируема, в то время как равномерный предел $\{u_N\}_{N=1}^{\infty}$ — это функция $u_0(x-t)$, частные производные которой терпят разрывы на любой прямой вида $x - t = m$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Отметим, что функция $u_0(x-t)$ непрерывна на всей плоскости (x,t), являясь в любой полосе вида

$$\{(x,t) \mid m < x - t < m + 1\}, \quad m = \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

классическим решением уравнения $u_t + u_x = 0$. В то же время ее первые производные терпят разрывы на прямых $x - t = m$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Рассмотрение целого ряда задач, соответствующих реальным физическим процессам, с необходимостью приводит к операциям не только над последовательностями “классических” решений уравнения (**LE**), но и над их равномерными, и даже слабыми, пределами. Это обстоятельство явилось важной причиной для создания специального математического аппарата, в рамках которого упомянутые операции (в частности, дифференцирование) возможны и естественны. При этом значение дифференциального оператора

$$L[D] \equiv \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

удается определить не только на функциях из класса $C^{(m)}(\overline{\Omega})$, но и на функциях, в обычном смысле не дифференцируемых. Соответствующий раздел математики называется *теорией обобщенных функций* (иногда — *теорией распределений*).

В настоящее время теория обобщенных функций весьма обширна и многогранна. Последующие лекции затрагивают лишь некоторые ее аспекты, непосредственно относящиеся к задачам математической физики.

2^0. Перед формулировкой основных постулатов теории дадим определение пространства *локально суммируемых* функций $L_{loc}(\Omega)$, а также напомним определение пространства $L_p(\Omega)$, где $1 \leqslant p < +\infty$.

Определение. *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, где $n \geqslant 1$. Функция $f(x)$ называется локально суммируемой в Ω, если для любого компакта $K \subset \Omega$ справедливо неравенство*

$$\int_K |f(x)|\, dx < +\infty,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

Совокупность всех локально суммируемых функций обозначается через $L_{loc}(\Omega)$.

Определение. *Пусть* $1 \leqslant p < +\infty$. *Множество измеримых в ограниченной области* Ω *функций* $f(x)$, *для которых конечен интеграл*

$$\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p \, dx,$$

образуют линейное пространство $L_p(\Omega)$.

Пространства $L_p(\Omega)$ ввел в математический обиход венгерский математик Ф.Рисс в 20-х годах прошлого века.

При $p = 2$ пространство $L_2(\Omega)$ является гильбертовым со скалярным произведением

$$(f, \varphi)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} f(x)\varphi(x) \, dx \quad \forall\, f, \varphi \in L_2(\Omega).$$

В частности, любая функция $f(x)$ из $L_p(\Omega)$ локально суммируема в Ω.

$\mathbf{3}^0$. В построении теории обобщенных функций основой служит идея двойственности. Поясним на примере, что принято понимать под *двойственностью* функциональных пространств.

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Каждому элементу $f(x)$ из $L_2(\Omega)$ соответствует линейный функционал, определяемый равенством

$$l(\varphi) = (f, \varphi)_{L_2(\Omega)} \quad \forall\, \varphi \in L_2(\Omega).$$

Функционал $l(\cdot) = l_f(\cdot)$ ограничен на $L_2(\Omega)$. Совокупность всех линейных и непрерывных на гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$ функционалов принято обозначать $L_2(\Omega)^*$.

Обратно, всякому функционалу $l(\cdot)$ из $L_2(\Omega)^*$ соответствует некоторая функция $f = f(x)$ из $L_2(\Omega)$ с тем свойством, что действие $l(\cdot)$ на произвольный элемент φ из $L_2(\Omega)$ представимо как скалярное произведение $(f,\varphi)_{L_2(\Omega)}$:

$$\forall\, l \in L_2(\Omega)^* \quad \exists f(x) \in L_2(\Omega) :$$

$$l(\varphi) = (f,\varphi)_{L_2(\Omega)} \qquad \forall\, \varphi \in L_2(\Omega).$$

Эту взаимосвязь $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Omega)^*$ называют *двойственностью* этих пространств. Символически отношение двойственности принято записывать в виде:

$$L_2(\Omega) \longleftrightarrow L_2(\Omega)^*, \quad \text{или} \quad \underbrace{\varphi \longleftrightarrow f}_{(f,\varphi)_{L_2(\Omega)}},$$

где φ из $L_2(\Omega)$ и f из $L_2(\Omega)^*$. В частности, для всякого функционала $l_f(\cdot)$ из $L_2(\Omega)^*$ определено его *действие* на функцию φ из $L_2(\Omega)$, результат которого — это число $(f,\varphi)_{L_2(\Omega)}$.

Между пространствами $L_2(\Omega)^*$ и $L_2(\Omega)$ установлено взаимно однозначное соответствие. В этой связи *предлагается эти пространства полностью друг с другом отождествлять*. Тем самым для описания элементов пространства $L_2(\Omega)^*$ оказывается достаточно аппарата, изобретенного для описания пространства $L_2(\Omega)$, никаких новых структур вводить не нужно.

Это решение, однако, носит *компромиссный характер*: не учитывается то принципиальное различие, что аргументом $f(x)$ из $L_2(\Omega)$ служит точка арифметического пространства, в то время как аргументом функционала $l_f(\cdot)$ из $L_2(\Omega)^*$ служит функция.

При переходе от гильбертовых пространств типа $L_2(\Omega)$ к негильбертовым принцип двойственности усложняется.

4^0. Рассмотрим класс $C_0^{(\infty)}(\Omega)$ финитных и бесконечно дифференцируемых в области Ω функций.

Определение. *Непрерывная функция называется финитной в области Ω, если она равна нулю вне некоторого компакта K, лежащего строго внутри Ω.*

Возьмем произвольный элемент f из $L_{loc}(\Omega)$ и определим действие функционала $l \equiv l_f$ на произвольный элемент из $C_0^{(\infty)}(\Omega)$ следующим образом:

$$(l, \varphi) = \int\limits_{\Omega} f(x)\varphi(x)\, dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^{(\infty)}(\Omega). \tag{1}$$

Интеграл в правой части (1) заведомо существует, ибо для заданной φ из $C_0^{(\infty)}(\Omega)$ всегда найдется такой компакт $K \subset \Omega$, что

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\varphi(x)\, dx = \int\limits_{K} f(x)\varphi(x)\, dx,$$

а интеграл справа конечен, ибо по условию функция $f(x)$ локально суммируема.

Замечание. *Если f_1 и f_2 принадлежат $L_{loc}(\Omega)$, $f_1 \neq f_2$, то соответствующие им по формуле (1) функционалы $l_1 \equiv l_{f_1}$ и $l_2 \equiv l_{f_2}$ также различны.*

Это замечание следует из важной *леммы дю Буа-Реймонда*. играющей в построении теории обобщенных функций исключительную роль.

5^0. Справедливо следующее утверждение.

Лемма (дю Буа-Реймонда). *Локально суммируемая в области Ω функция $f(x)$ равна нулю почти всюду в Ω тогда и* *только тогда, когда для всякой функции* $\varphi(x)$ *из* $C_0^{(\infty)}(\Omega)$ *имеет место равенство*

$$\int\limits_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx = 0. \tag{2}$$

Доказательство. Необходимость очевидна из свойств интеграла Лебега. Докажем достаточность.

В качестве $\varphi(x)$ в (2) используем функции из специальной последовательности, которую сейчас построим. Порождающую последовательность функцию определим следующим образом:

$$\psi(\eta) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0 \leqslant \eta \leqslant \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}\Big[1 + \operatorname{th}\frac{\eta - 3/4}{(\eta-\frac{1}{2})(\eta-1)}\Big] & \text{при} \quad \frac{1}{2} < \eta < 1, \\ 0 & \text{при} \quad \eta \geqslant 1, \end{cases} \tag{3}$$

здесь th — гиперболический тангенс. Функция $\psi(\eta)$ бесконечно дифференцируема и монотонна при $\eta \geqslant 0$ (докажите это в качестве упражнения).

Пусть $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, тогда функция

$$\varphi_k(x) = e^{ikx}\psi\Big(\frac{|x|}{\varepsilon}\Big) \tag{4}$$

бесконечно дифференцируема, финитна, обращается в нуль вне шара радиуса ε и совпадает с экспонентой e^{ikx} внутри шара радиуса $\varepsilon/2$:

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad |x| \geqslant \varepsilon, \\ e^{ikx} & \text{при} \quad |x| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \end{cases}$$

Определение. *Если функция* $\varphi = \varphi(x)$ *непрерывна в* $\mathbb{R}^n$, *то ее носителем* $\operatorname{supp}\varphi$ *называется замкнутое множество*

$$\operatorname{supp}\varphi = \overline{\mathbb{R}^n \setminus \{x \mid \varphi(x) = 0\}}.$$

Фиксируем точку y внутри Ω, тогда расстояние $\varepsilon_0(y)$ от y до границы области Ω строго положительно. *Носитель функции* $\varphi_k(x-y)$ переменной x при $0<\varepsilon<\varepsilon_0(y)$ лежит строго внутри Ω:

$$\operatorname{supp}\varphi_k(x-y)\subset\{x\in\mathbb{R}^n\mid |x-y|\leqslant\varepsilon\}\subset\Omega.$$

Таким образом, при $0<\varepsilon<\varepsilon_0(y)$ функция $\varphi_k(x-y)$ переменной x финитна в Ω и бесконечно дифференцируема. В соответствии с условием (2) имеем

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\varphi_k(x-y)\,dx=0.$$

Интегрирование в левой части распространим на все $\mathbb{R}^n$, что возможно из-за финитности $\varphi_k(x-y)$ в Ω. Получим в результате:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_k(x-y)\,dx=0.$$

Делая замену переменной $z=x-y$ и подставляя явное выражение для $\varphi_k(\cdot)$, получаем равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(z+y)\varphi_k(z)\,dz=\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(z+y)e^{ikz}\psi\left(\frac{|z|}{\varepsilon}\right)dz=0. \tag{5}$$

Здесь k принадлежит $\mathbb{R}^n$, $0<\varepsilon<\varepsilon_0(y)$, а произведение функций $\psi(|x|/\varepsilon)f(x+y)$, будучи по x финитным, принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R}^n_x)$. Нам понадобятся следующие утверждения, известные из курса математического анализа:

1. Для любой функция $g(x)$ из $L_2(\mathbb{R}^n_x)$ определено ее преобра-

зование Фурье

$$(\mathcal{F}g) \equiv \widehat{g}(k) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)e^{-i2\pi k\cdot x}\,dx,$$

также принадлежащее пространству $L_2(\mathbb{R}^n)$:

$$\int |\widehat{g}(k)|^2\,dk < +\infty.$$

2. Справедлива следующая *формула Планшереля* (равенство Парсеваля в $L_2(\mathbb{R}^n)$):

$$\int |g(x)|^2\,dx = \int |\widehat{g}(k)|^2\,dk \qquad \forall\, g \in L_2(\mathbb{R}^n).$$

Таким образом, равенство (5) означает, что *преобразование Фурье по x от произведения $\psi(|x|/\varepsilon)f(x+y)$ тождественно равно нулю*.

Учитывая это и применяя к указанному произведению формулу Планшереля, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big|\psi\Big(\frac{|x|}{\varepsilon}\Big)f(x+y)\Big|^2\,dx = 0.$$

Следовательно, функция $\psi(|x|/\varepsilon)f(x+y)$ для почти всех x из $\mathbb{R}^n$ равна нулю.

Учитывая, что при $|x| < \varepsilon/2$ произведение $\psi(|x|/\varepsilon)f(x+y)$ совпадает со сдвигом $f(x+y)$:

$$\psi(|x|/\varepsilon)f(x+y) = f(x+y) \quad \text{при} \quad |x| < \varepsilon/2,$$

заключаем, что *функция f равна нулю почти всюду в некоторой окрестности исходной точки y* из Ω. В силу произвольности y имеем: $f(y) = 0$ почти всюду в Ω. □

Лекция 9.

ТЕМА: Обобщенные функции. **6**^{0}. Определение пространства $\mathfrak{D}(\Omega)$ основных функций. Определение множества $\mathfrak{D}'(\Omega)$ линейных непрерывных на $\mathfrak{D}(\Omega)$ функционалов. Вложение $L_{\mathrm{loc}}(\Omega) \subset \mathfrak{D}'(\Omega)$. **7**^{0}. Дельта функция Дирака $\delta(x)$. **8**^{0}. Дополнение множества $L_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ до множества $K'(\Omega)$. Отождествление $K'(\Omega)$ и $\mathfrak{D}'(\Omega)$. **9**^{0}. Определение на $\mathfrak{D}'(\Omega)$ структуры векторного пространства и сходимости. Полнота $\mathfrak{D}'(\Omega)$. Дельта функция Дирака как предел последовательности локально суммируемых функций. **10**^{0}. Равенство обобщенных функций в области. Носитель обобщенной функции. Финитные обобщенные функции. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. **11**^{0}. Линейная замена независимой переменной в обобщенных функциях, сдвиг обобщенной функции, умножение на бесконечно дифференцируемую функцию. **12**^{0}. Дифференцирование обобщенных функций. Свойства оператора обобщенного дифференцирования. **13**^{0}. Дифференциальные операторы на пространстве $\mathfrak{D}'$. Фундаментальное решение дифференциального оператора.

6^0. Любая линейная комбинация функций из $C_0^{(\infty)}(\Omega)$ также является элементом $C_0^{(\infty)}(\Omega)$. Иными словами, $C_0^{(\infty)}(\Omega)$ *представляет собой линейное пространство*.

В дополнение к линейной структуре введем на нем понятие сходимости.

Определение. *Будем говорить, что последовательность функций $\varphi_k(x)$ из $C_0^{(\infty)}(\Omega)$ сходится к функции $\varphi_0(x)$ при $k \to \infty$, если выполнены следующие два условия:*

1. *Существует ограниченное множество Ω', лежащее строго внутри Ω, $\overline{\Omega}' \subset \Omega$, и такое, что*
$$\operatorname{supp} \varphi_k(x) \subset \overline{\Omega}', \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$
2. *На любом компакте $\omega\colon \overline{\omega} \subset \Omega$ справедливы предельные соотношения*
$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in\overline{\omega}} \Big|(D^\alpha \varphi_k - D^\alpha \varphi_0)(x)\Big| = 0, \quad \forall\, \alpha.$$

Пространство $C_0^{(\infty)}(\Omega)$, снабженное указанной сходимостью, называют *пространством основных функций* и обозначают через $\mathfrak{D}(\Omega)$. Если $\Omega = \mathbb{R}^n$, то вместо $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ пишут $\mathfrak{D}$.

Вместе с пространством основных функций рассмотрим совокупность действующих на нем линейных функционалов. Значение функционала l на основной функции φ условимся обозначать через $l(\varphi)$ или (l, φ).

Определение. *Линейный функционал $l(\cdot)$ назовем непрерывным на $\mathfrak{D}(\Omega)$, если для всякой последовательности $\varphi_k(x)$ основных функций, сходящейся в $\mathfrak{D}(\Omega)$ к $\varphi_0(x)$, справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{k\to\infty} (l, \varphi_k) = (l, \varphi_0).$$

Множество всех линейных непрерывных на $\mathfrak{D}(\Omega)$ функционалов обозначим через $\mathfrak{D}'(\Omega)$. Это множество заведомо не пусто: для любой локально суммируемой в области Ω функции $f(x)$ интеграл вида

$$(l_f, \varphi) = \int\limits_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \qquad \forall\,\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

задает элемент из $\mathfrak{D}'(\Omega)$ (докажите это в качестве упражнения). По этой причине говорят о вложении пространства $L_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ в $\mathfrak{D}'(\Omega)$. Однако интегралами указанного вида с локально суммируемым весом $f(x)$ все множество $\mathfrak{D}'(\Omega)$ не исчерпывается:

$$L_{\mathrm{loc}}(\Omega) \subset \mathfrak{D}'(\Omega), \quad \text{но} \quad L_{\mathrm{loc}}(\Omega) \neq \mathfrak{D}'(\Omega).$$

Иными словами, *существуют линейные функционалы из $\mathfrak{D}'(\Omega)$, значения которых на элементах φ из $\mathfrak{D}(\Omega)$ невозможно представить интегралом вида*

$$\int\limits_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx, \quad \text{где} \quad f(x) \in L_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

7^0. Приведем пример, явно подтверждающий различие множеств $L_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ и $\mathfrak{D}'(\Omega)$.

Пусть начало координат лежит строго внутри исходной области Ω. Определим на $\mathfrak{D}(\Omega)$ линейный функционал δ, положив

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0) \quad \forall\, \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega). \qquad (\mathbf{Dir})$$

Функционал δ непрерывен на $\mathfrak{D}(\Omega)$ — докажите это в качестве упражнения.

Элемент $\delta \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ называют *дельта функцией Дирака*.

Лемма (сингулярность дельта функции)**.** *Не существует функции $f(x)$ из $L_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, для которой имели бы место равенства*

$$(\delta, \varphi) = \int\limits_{\Omega} f(x)\varphi(x)\, dx \quad \forall\, \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega). \qquad (1)$$

Доказательство. В справедливости леммы убедимся методом от противного. Предположим, что равенства (1) выполнены с некоторой функцией $f(x)$ из $L_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, и рассмотрим вспомогательное семейство функций

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-|x|^2}} & \text{при} \quad |x| \leqslant a, \\ 0 & \text{при} \quad |x| > a. \end{cases}$$

Здесь a — положительное число. Функция $\varphi_a(x)$ бесконечно дифференцируема (докажите это самостоятельно) и финитна. При этом

$$0 \leqslant \varphi_a(x) \leqslant 1/e.$$

Если $a_0 = \operatorname{dist}(0, \partial\Omega)$, то при всех a: $0 < a < a_0$ носитель функции $\varphi_a(x)$ содержится внутри области Ω:

$$0 < a < a_0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{supp} \varphi_a(x) \subset \Omega.$$

Следовательно, к любой из функций $\varphi_a(x)$, $0 < a < a_0$, применимы формулы (**Dir**) и (1), дающие в результате равенства

$$\varphi_a(0) = (\delta, \varphi_a) = \int\limits_{\Omega} f(x)\varphi_a(x)\,dx = \int\limits_{|x|\leqslant a} f(x)\varphi_a(x)\,dx.$$

Таким образом, имеют место соотношения

$$|\varphi_a(0)| = \Big|\int\limits_{|x|\leqslant a} f(x)\varphi_a(x)\,dx\Big| \leqslant \int\limits_{|x|\leqslant a} |f(x)|\,dx < +\infty. \qquad (2)$$

Последний интеграл конечен в силу условия, что $f(x) \in L_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. По этой же причине, а также в силу известного свойства непрерывности интеграла по отношению к объему области интегрирования, справедливо предельное равенство

$$\lim_{a\to 0} \int\limits_{|x|\leqslant a} |f(x)|\,dx = 0.$$

Отсюда и из (2) заключаем, что $\lim\limits_{a\to 0} |\varphi_a(0)| = 0$. Но, как это следует из определения функции $\varphi_a(x)$, ее значение в нуле от a не зависит и строго положительно: $\varphi_a(0) = 1/e > 0$. Полученное противоречие опровергает сделанное предположение о существовании $f(x)$ из $L_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ со свойством (1). $\square$

Таким образом, дельта функция Дирака $\delta(x)$ принадлежит $\mathfrak{D}'(\Omega)$ и в то же время $\delta(x)$ не является локально суммируемой функцией. Элементы из $\mathfrak{D}'(\Omega) \setminus L_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ называют *сингулярными* функционалами. Как доказано в предыдущей лемме, дельта функция Дирака сингулярна. Элементы из $\mathfrak{D}'(\Omega)$, не являющиеся сингулярными, называют *регулярными* функционалами.

8^0. Как показывает пример дельта функции Дирака, установить взаимно однозначное соответствие между линейными функционалами из $\mathfrak{D}'(\Omega)$ и объектами, которые в математическом анализе принято называть "функциями", невозможно. По этой причине вводится понятие, расширяющее упомянутую категорию "функций".

Иначе говоря, класс $L_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, состоящий из обычных функций, дополняется некоторыми новыми "идеальными элементами", которые принято называть *обобщенными функциями*. Понятие обобщенной функции появилось в середине 30-х годов прошлого века в работах академика С.Л.Соболева (1908–1989).

Множество всех обобщенных функций обозначается через $K'(\Omega)$ и *находится во взаимно однозначном соответствии с множеством* $\mathfrak{D}'(\Omega)$.

Регулярным функционалам из $\mathfrak{D}'(\Omega)$ соответствуют обычные локально суммируемые функции из $L_{\mathrm{loc}}(\Omega) \subset K'(\Omega)$, и для всякой регулярной обобщенной функции $f(x)$ из $L_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ единственный сопоставляемый ей функционал l_f из $\mathfrak{D}'(\Omega)$ задается интегралом:

$$\langle f, \varphi \rangle = \int\limits_{\Omega} f(x)\varphi(x)\,dx = (l_f, \varphi), \quad \varphi(x) \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

Пример введения "идеальных элементов" хорошо известен в классическом математическом анализе. Именно, пополняя множество рациональных чисел с помощью специальной конструкции дедекиндовых сечений приходят к понятию вещественного числа.

По определению *каждому элементу* $f = f(x)$ *множества* $K'(\Omega)$ *обязан соответствовать единственный линейный непре-*

рывный функционал l_f из $\mathfrak{D}'(\Omega)$.

Это позволяет рассматривать обобщенную функцию $f(x)$ из $K'(\Omega)$ в качестве линейного непрерывного функционала на $\mathfrak{D}(\Omega)$, определив действие $f(x)$ на $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ равенством $\langle f, \varphi\rangle = (l_f, \varphi)$.

Если f — сингулярная обобщенная функция, $f \in K'(\Omega)$, то ее уже невозможно представить себе как функцию точки евклидова пространства, т.е. запись

$$f = f(x), \quad x \in \Omega,$$

требует существенных дополнительных пояснений. В случае сингулярной f эта запись означает,

во-первых, что для любой функции $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ определено число $\langle f, \varphi\rangle$ — действие обобщенной функции $f(x)$ на основную функцию φ;

во-вторых, что множество всех полученных таким образом чисел обладает свойством линейности:

$$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{D}(\Omega) \quad \Rightarrow$$

$$\langle f, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2\rangle = \alpha\langle f, \varphi_1\rangle + \beta\langle f, \varphi_2\rangle,$$

и, **в-третьих**, это же самое числовое множество замкнуто в том смысле, что для любой сходящейся в $\mathfrak{D}(\Omega)$ последовательности φ_k, $\varphi_k \to \varphi_0$, справедливо предельное соотношение

$$\lim_{k\to\infty} \langle f, \varphi_k\rangle = \langle f, \varphi_0\rangle.$$

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ локально суммируемы в области Ω, то из системы равенств

$$\langle f, \varphi\rangle = \langle g, \varphi\rangle \quad \forall\, \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

и леммы дю Буа-Реймонда следует совпадение $f(x)$ и $g(x)$ почти всюду в Ω.

9^0. Условимся всюду в дальнейшем *отождествлять элементы множества обобщенных функций в области* Ω *с элементами множества функционалов* $\mathfrak{D}'(\Omega)$, т.е. предполагать, что любая обобщенная функция f и соответствующий ей линейный функционал l_f из $\mathfrak{D}'(\Omega)$ — *это одно и то же*: $f \equiv l_f$.

Введем на множестве $\mathfrak{D}' = \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$ структуру векторного пространства, определив для любой пары f и g из $\mathfrak{D}'$ и произвольных чисел λ, μ функционал $\lambda f + \mu g$ посредством равенства

$$(\lambda f + \mu g, \varphi) = \lambda(f, \varphi) + \mu(g, \varphi) \qquad \forall\, \varphi \in \mathfrak{D}.$$

В качестве сходимости в $\mathfrak{D}'$ будем рассматривать *слабую сходимость*:

Определение. *Будем говорить, что последовательность* l_k *функционалов из* $\mathfrak{D}'$ *сходится, если и только если для любой основной функции* φ *из* $\mathfrak{D}$ *сходится числовая последовательность* (l_k, φ).

Пусть последовательность l_k функционалов из $\mathfrak{D}'$ сходится в $\mathfrak{D}'$. Тогда определен предельный функционал:

$$(l, \varphi) = \lim_{k\to\infty} (l_k, \varphi) \qquad \forall\, \varphi \in \mathfrak{D}.$$

Ясно, что этот функционал l линеен. Оказывается, что он к тому же и непрерывен на $\mathfrak{D}$, т.е. $l \in \mathfrak{D}'$.

Пример. *Дельта функция Дирака* $\delta(x)$ *представляет собой слабый предел последовательности локально суммируемых функций*

$$\omega_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_n k^{-n}} & \text{при} \quad |x| \leqslant \frac{1}{k}, \\ 0 & \text{при} \quad |x| > \frac{1}{k}, \end{cases}$$

где σ_n — *объем единичного шара в* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Имеем для произвольной функции φ из $\mathfrak{D}$:

$$\lim_{k\to\infty}\int \omega_k(x)\varphi(x)\,dx = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sigma_n k^{-n}}\int\limits_{|x|\leqslant 1/k}\varphi(x)\,dx = \varphi(0).$$

Последнее равенство справедливо в силу теоремы о среднем, примененной к непрерывной функции φ. Учитывая, что по определению $\varphi(0) = (\delta, \varphi)$, получаем требуемое. □

Свойство пространства $\mathfrak{D}'$ содержать в себе все пределы сходящихся в $\mathfrak{D}'$ последовательностей называют его *полнотой*.

В соответствии с принятым нами соглашением полнота $\mathfrak{D}'$ означает также и полноту пространства $K' = K'(\mathbb{R}^n)$ обобщенных функций. Следовательно, пополнение пространства K' слабыми пределами последовательностей обобщенных функций к появлению каких-либо новых идеальных элементов, отличных от уже имеющихся в K', не приводит.

10^0. Рассмотрим простейшие *свойства пространства обобщенных функций*.

В общем случае говорить об обращении обобщенной функции в нуль в заданной точке некорректно, ибо понятие такого значения попросту не определено. Тем не менее можно говорить о *равенстве обобщенной функции нулю в заданной области* (в частности — в окрестности точки).

Определение. *Обобщенная функция* $f = f(x)$ *из* $\mathfrak{D}'(\Omega)$ *обращается в нуль в области* Ω, *если выполняются равенства*

$$(f, \varphi) = 0 \qquad \forall\, \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

В этом случае применяется обычная в математическом анализе форма записи:

$$f(x) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Таким образом, *две обобщенные функции* $f = f(x)$ *и* $g = g(x)$ *из* $\mathfrak{D}'(\Omega)$ *равны в области* Ω, если в Ω обращается в нуль их разность:

$$(f, \varphi) = (g, \varphi) \qquad \forall\, \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

Если обобщенная функция равна нулю в некоторой области, то она же обращается в нуль в какой-либо окрестности произвольной точки этой области. Верно и обратное.

Пусть имеется обобщенная функция $f = f(x)$ из $\mathfrak{D}'$. *Нулевым множеством* $\mathcal{O}_f$ для f называется объединение всевозможных областей в $\mathbb{R}^n$, в которых f обращается в нуль. Ясно, что нулевое для f из $\mathfrak{D}'$ множество $\mathcal{O}_f$ является открытым, причем

$$f(x) = 0, \quad x \in \mathcal{O}_f.$$

Более того, $\mathcal{O}_f$ — это максимальное открытое множество, в котором обобщенная функция f обращается в нуль.

Дополнение во всем $\mathbb{R}^n$ к нулевому для f из $\mathfrak{D}'$ множеству $\mathcal{O}_f$ называется *носителем обобщенной функции* f:

$$\operatorname{supp} f = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}_f.$$

Ясно, что $\operatorname{supp} f$ — это замкнутое подмножество $\mathbb{R}^n$. В любой внешней по отношению к $\operatorname{supp} f$ области обобщенная функция f обращается в нуль:

$$\forall\, \varphi \in \mathfrak{D} : \ \operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} \varphi = \emptyset \quad \Rightarrow \quad (f, \varphi) = 0.$$

Упражнение. *Докажите, что носитель обобщенной функции $f \in \mathfrak{D}'$ состоит из тех и только тех точек, ни в одной окрестности которых f в нуль не обращается.*

Пример. *Дельта функция Дирака $\delta(x)$ имеет носителем точечное множество, состоящее из начала координат. Нулевое же множество $\mathcal{O}_\delta$ — это все $\mathbb{R}^n$ с исключенным началом координат.*

Любопытно отметить, что у непрерывной функции точечного носителя быть не может, в то время как носителем обобщенной функции может быть любое дискретное множество точек.

Упражнение. *Приведите пример обобщенной функции f, носитель которой совпадает с заданным конечным множеством точек:*

$$\operatorname{supp} f = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}.$$

Определение. *Обобщенную функцию f из $\mathfrak{D}'$ называют финитной, если ее носитель ограничен.*

Как уже отмечалось, произвольной локально суммируемой функции $f(x)$ из $L_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$ соответствует линейный функционал из $\mathfrak{D}'$, определяемый равенством

$$(l_f, \varphi) = \int f(x)\varphi(x)\,dx \qquad \forall\,\varphi(x) \in \mathfrak{D}.$$

Совокупность представимых в таком виде обобщенных функций образует в $\mathfrak{D}'$ собственное подмножество. Элементы этого подмножества принято называть *регулярными обобщенными функциями*.

Иными словами, l из $\mathfrak{D}'$ является *регулярной обобщенной функцией* тогда и только тогда, когда существует такая локально суммируемая функция $f(x)$ из $L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, для которой имеют место равенства

$$(l,\varphi) = \int f(x)\varphi(x)\,dx \qquad \forall\,\varphi(x)\in\mathfrak{D}.$$

Обобщенную функцию f из $\mathfrak{D}'$, не являющуюся регулярной, называют *сингулярной*. Пример сингулярной обобщенной функции дает дельта функция Дирака.

11^0. В пространстве $\mathfrak{D}'$ обобщенных функций помимо сложения и умножения на скаляр определены и другие операции, обычно применяемые к классическим функциям. Рассмотрим здесь некоторые примеры таких операций.

Линейная замена переменных. Пусть A — матрица размеров $n\times n$, $\det A\neq 0$, $x,y\in\mathbb{R}^n$, $b\in\mathbb{R}^n$. Для произвольной обобщенной функции $f(x)$ из $\mathfrak{D}'$ определим новую обобщенную функцию $f(Ay+b)$ из $\mathfrak{D}'$, задав ее действие на произвольной функции $\varphi(y)$ из $\mathfrak{D}$ равенством

$$\big(f(Ay+b),\varphi(y)\big) = \Big\{\int f(Ay+b)\varphi(y)\,dy =$$

$$\frac{1}{|\det A|}\int f(x)\varphi(A^{-1}(x-b))\,dx\Big\} = \frac{1}{|\det A|}\big(f(x),\varphi(A^{-1}(x-b))\big).$$

Выражение в фигурных скобках в приведенной выше цепочке равенств следует учитывать лишь в случае, когда исходная обобщенная функция $f(x)$ из $\mathfrak{D}'$ регулярна. В противном случае следует ограничиться укороченным равенством, задающим на $\mathfrak{D}$ линейный функционал:

$$\big(f(Ay+b),\varphi(y)\big)=\frac{1}{|\det A|}\big(f(x),\varphi(A^{-1}(x-b))\big). \qquad (3)$$

Функционал $f(Ay+b)$ непрерывен относительно сходимости в $\mathfrak{D}'$. Это сразу же следует из замечания, что операция

$$\varphi(x)\mapsto\varphi(A^{-1}(x-b))$$

линейна по φ и непрерывна относительно сходимости в $\mathfrak{D}$. Таким образом, определенный равенством (3) функционал действительно принадлежит пространству $\mathfrak{D}'$.

Если в качестве A выступает единичная матрица, то обобщенную функцию $f(y+b)$ называют *сдвигом* функции $f(y)$. Сдвиг дельта функции Дирака, к примеру, определяется соотношением

$$(\delta(y-y_0),\varphi(y))=(\delta(x),\varphi(x+y_0))=\varphi(y_0).$$

Задача. *Найти носитель и нулевое множество линейной комбинации $\sum\limits_{k=1}^{N}c_k\delta(y-y_k)$ сдвигов дельта функции Дирака, $c_k\neq 0$.*

Воспользовавшись равенством (3), введем в рассмотрение ряд полезных классов обобщенных функций. Отметим, что во всех трех приводимых ниже определениях равенства понимаются не поточечно, но как равенства обобщенных функций.

Определение. *Обобщенная функция $f(x)$ из $\mathfrak{D}'$ называется сферически симметричной, если $f(Ax)=f(x)$ для любой ортогональной матрицы A.*

Определение. *Обобщенная функция $f(x)$ из $\mathfrak{D}'$ называется однородной степени α, если*

$$f(\lambda x)=\lambda^{\alpha}f(x)\qquad\forall\,\lambda>0.$$

Упражнение. *Докажите, что дельта функция Дирака* $\delta(x)$*, где* $x \in \mathbb{R}^n$*, однородна степени* $-n$*.*

Определение. *Пусть* H *— квадратная* $n \times n$ *матрица. Обобщенная функция* $f(x)$ *из* $\mathfrak{D}'$ *называется периодической с матрицей периодов* H*, если*

$$f(x + H\beta) = f(x) \qquad \forall\, \beta \in \mathbb{Z}^n.$$

Упражнение. *Докажите, что ряд из сдвигов дельта функции* $\sum\limits_{\beta \in \mathbb{Z}^n} \delta(x - H\beta)$ *сходится в* $\mathfrak{D}'$*, а его сумма — это обобщенная функция с матрицей периодов* H*.*

Умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую. Пусть $f(x)$ принадлежит $\mathfrak{D}'$ и $a(x)$ — бесконечно дифференцируемая $\mathbb{R}^n$ функция. Тогда произведение $a(x)f(x)$ определяется следующим образом:

$$\big(a(x)f(x), \varphi(x)\big) = \big(f(x), a(x)\varphi(x)\big) \quad \forall\, \varphi \in \mathfrak{D}. \tag{4}$$

Величина в правой части последнего равенства заведомо определена, ибо произведение $a(x)\varphi(x)$ финитно и бесконечно дифференцируемо, т.е. принадлежит $\mathfrak{D}$. Операция

$$\varphi(x) \mapsto a(x)\varphi(x)$$

линейна по φ и непрерывна относительно сходимости в $\mathfrak{D}$. Поэтому определенный равенством (4) функционал $a(x)f(x)$ принадлежит $\mathfrak{D}'$.

Упражнение. *Доказать, что если функция* $\eta(x)$ *бесконечно дифференцируема и равна единице в окрестности носителя обобщенной функции* $f(x)$ *из* $\mathfrak{D}'$*, то имеет место равенство* $\eta(x)f(x) = f(x)$*.*

12^0. Важнейшая операция в пространстве $\mathfrak{D}'$ обобщенных функций — это операция *обобщенного дифференцирования*. Дадим соответствующее определение.

Пусть $f(x) \in \mathfrak{D}'$ и $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$, α_j — целые неотрицательные, $|\alpha| = m$.

Обобщенная производная порядка α от $f(x)$, обозначаемая как и в классическом случае через $D^\alpha f(x)$, определяется следующим образом

$$\big(D^\alpha f(x), \varphi(x)\big) = (-1)^{|\alpha|}\big(f(x), D^\alpha\varphi(x)\big), \qquad (\mathbf{D}_g)$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция из $\mathfrak{D}$. Величина в правой части ($\mathbf{D}_g$) заведомо определена, ибо производная $D^\alpha\varphi(x)$ — это финитная бесконечно дифференцируемая функция, т.е. элемент из $\mathfrak{D}$.

Если функция $f(x)$ и все ее производные до порядка m включительно непрерывны во всем $\mathbb{R}^n$, то равенство ($\mathbf{D}_g$) представляет собой обычную формулу интегрирования по частям:

$$\int D^\alpha f(x)\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int f(x)D^\alpha\varphi(x)\,dx.$$

Учитывая, что операция $\varphi(x) \mapsto D^\alpha\varphi(x)$ линейна по φ и непрерывна относительно сходимости в $\mathfrak{D}$, заключаем, что определенный равенством ($\mathbf{D}_g$) функционал $D^\alpha f(x)$ принадлежит $\mathfrak{D}'$.

В качестве примера приведем формулу для обобщенной производной дельта функции Дирака:

$$\big(D^\alpha\delta(x), \varphi(x)\big) = (-1)^{|\alpha|}D^\alpha\varphi(0) \quad \forall\,\varphi(x) \in \mathfrak{D}.$$

Упражнение. *Докажите, что если обобщенная функция имеет в некоторой области непрерывные производные до порядка*

m включительно, то ее обобщенная производная любого порядка α, $|\alpha| \leqslant m$, в рассматриваемой области совпадает с классической производной того же порядка.

Важно отметить, что в отличие от классической производной *обобщенная производная функции (в том числе и обобщенной) существует всегда*. В то же время ввести определение ($\mathbf{D}_g$) обобщенной производной возможно лишь при условии, что понятие обычной производной уже есть.

Укажем ряд свойств оператора обобщенного дифференцирования (самостоятельное доказательство этих свойств послужит хорошим упражнением).

а). Оператор обобщенного дифференцирования

$$D^\alpha : f \in \mathfrak{D}' \mapsto D^\alpha f \in \mathfrak{D}'$$

линеен и непрерывен из $\mathfrak{D}'$ в $\mathfrak{D}'$.

б). У любой обобщенной функции имеются обобщенные производные любого порядка.

в). Результат обобщенного дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования

$$D^\alpha(D^\beta f) = D^\beta(D^\alpha f) = D^{\alpha+\beta} f \qquad \forall\, f \in \mathfrak{D}'.$$

г). Для любой обобщенной функции f из $\mathfrak{D}'$ имеет место включение

$$\operatorname{supp} D^\alpha f(x) \subset \operatorname{supp} f(x).$$

д). Пусть $f(x)$ принадлежит $\mathfrak{D}'$ и $a(x)$ — бесконечно дифференцируемая в $\mathbb{R}^n$ функция. Тогда имеет место формула Лейбница:

$$D^\alpha(af) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} D^\beta a(x) D^{\alpha-\beta} f.$$

е). Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, где $u_k(x) \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, сходится равномерно на каждом компакте в $\mathbb{R}^n$, то его можно дифференцировать любое число раз, получая ряды, сходящиеся в $\mathfrak{D}'$.

ж). Тригонометрический ряд

$$\sum_{\beta\in\mathbb{Z}^n} a[\beta]e^{i2\pi\beta x},$$

где $|a[\beta]| \leqslant A\|\beta\|^s + B$, а постоянные A и B не зависят от β, сходится в $\mathfrak{D}'$ (т.е. его сумма определена как линейный непрерывный на $\mathfrak{D}$ функционал). Например,

$$\sum_{\beta\in\mathbb{Z}^n} e^{i2\pi\beta x} = \sum_{\beta\in\mathbb{Z}^n} \delta(x-\beta).$$

13^0. Определим значение дифференциального оператора порядка m с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами на обобщенной функции из $\mathfrak{D}'$. Пусть функции $a_\alpha(x)$ при $|\alpha| \leqslant m$ бесконечно дифференцируемы в $\mathbb{R}^n$ и служат коэффициентами дифференциального оператора

$$L[D] = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)D^\alpha.$$

Тогда для произвольной обобщенной функции $u(x)$ из $\mathfrak{D}'$ определена новая обобщенная функция $L[D]u(x)$, действие которой на произвольной функции $\varphi(x)$ из $\mathfrak{D}$ задается равенством

$$\big(L[D]u(x), \varphi(x)\big) = \Big(u(x), \sum_{|\alpha|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha\big(a_\alpha(x)\varphi(x)\big)\Big). \qquad (\mathbf{L}_g)$$

Отметим, что величина в правой части ($\mathbf{L}_g$) заведомо определена, ибо функция

$$L^*[D]\varphi(x) \equiv \sum_{|\alpha|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(a_\alpha(x)\varphi(x))$$

финитна и бесконечно дифференцируема, т.е. принадлежит $\mathfrak{D}$.

Операция $\varphi(x) \mapsto L^*[D]\varphi(x)$ линейна по φ и непрерывна относительно сходимости в $\mathfrak{D}$. Тем самым функционал $L[D]u(x)$, введенный равенством ($\mathbf{L}_g$), принадлежит $\mathfrak{D}'$.

Операции умножения на бесконечно гладкую функцию и взятия обобщенной производной любого порядка непрерывны на $\mathfrak{D}'$. Следовательно, оператор $L[D]$ также непрерывен на $\mathfrak{D}'$.

Определение. *Обобщенная функция $\mathcal{E}(x)$ из $\mathfrak{D}'$ называется фундаментальным решением дифференциального оператора*

$$L[D] = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами $a_\alpha(x)$, если обобщенная функция $L[D]\mathcal{E}(x)$ совпадает с дельта функцией Дирака $\delta(x)$, т.е. если $L[D]\mathcal{E}(x) = \delta(x)$.

Знание фундаментальных решений дифференциальных операторов весьма важно и полезно при решении различных задач математической физики.

Лекция 10.

ТЕМА: Фундаментальные решения дифференциальных операторов. **1**^{0}. Лемма о дифференцировании кусочно гладкой функции. Функция Хевисайда. **2**^{0}. Фундаментальные решения обыкновенных дифференциальных операторов. **3**^{0}. Фундаментальное решение оператора теплопроводности. **4**^{0}. Фундаментальное решение одномерного волнового оператора. **5**^{0}. Фундаментальное решение двумерного волнового оператора.

1^0. Напомним, что обобщенная функция $\mathcal{E}(x)$ из $\mathfrak{D}'$ называется *фундаментальным решением дифференциального оператора*

$$L[D] = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами $a_\alpha(x)$, если обобщенная функция $L[D]\mathcal{E}(x)$ совпадает с дельта функцией Дирака $\delta(x)$, т.е. если

$$L[D]\mathcal{E}(x) = \delta(x).$$

В соответствии с определением оператора обобщенного дифференцирования это означает, что действие обобщенной функции $\mathcal{E}(x)$ из $\mathfrak{D}'$ на основную функцию $L^*[D]\varphi(x)$ из $\mathfrak{D}$ задается равенством

$$\big(\mathcal{E}(x), L^*[D]\varphi(x)\big) = \varphi(0).$$

Здесь сопряженный оператор $L^*[D]$ задается соотношением

$$L^*[D]\varphi(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(a_\alpha(x)\varphi(x)).$$

Найдем фундаментальные решения некоторых линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Начнем с оператора дифференцирования функции одной переменной.

Лемма (производная кусочно гладкой функции). *Пусть функция $u = u(t)$ непрерывна на всей числовой прямой за исключением единственной точки $t = t_0$, в которой $u(t)$ разрывна и имеет скачок, равный*

$$h = u(t_0 + 0) - u(t_0 - 0).$$

Если при этом в области $t < t_0$, равно как и в области $t > t_0$, существуют локально суммируемые первые производные функции $u(t)$, то обобщенная производная функции $u(t)$ на всей оси задается равенством

$$\frac{du}{dt}(t) = \{u'(t)\} + h\delta(t - t_0), \qquad (\mathbf{d_g})$$

где через $\{u'(t)\}$ обозначена локально суммируемая функция, совпадающая с $u'(t)$ как при $t < t_0$, так и при $t > t_0$.

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $\varphi = \varphi(t)$ из пространства $\mathfrak{D}$ основных функций переменной t. По определению обобщенного дифференцирования имеем

$$\Big(\frac{du}{dt}(t), \varphi(t)\Big) = -\Big(u(t), \frac{d\varphi}{dt}(t)\Big).$$

Учитывая, что функция $u(t)$ по условию локально суммируема, представим ее действие на производную $\varphi'(t)$ в виде обычного интеграла, разбитого на сумму двух:

$$\Big(\frac{du}{dt}, \varphi\Big) = -\int\limits_{-\infty}^{t_0} u(t)\varphi'(t)\, dt - \int\limits_{t_0}^{+\infty} u(t)\varphi'(t)\, dt.$$

К каждому из слагаемых в правой части применим обычную формулу интегрирования по частям, учитывая при этом, что существуют локально суммируемые первые производные функции $u(t)$. Вспомнив также, что функция $\varphi(t)$ финитна по условию, т.е. равна нулю вне конечного интервала $(-R,+R)$ числовой оси, получаем равенство

$$\Big(\frac{du}{dt},\varphi\Big) = -u(t)\varphi(t)\Big|_{-R}^{t_0} + \int\limits_{-R}^{t_0} u'(t)\varphi(t)\,dt -$$

$$-u(t)\varphi(t)\Big|_{t_0}^{+R} + \int\limits_{t_0}^{+R} u'(t)\varphi(t)\,dt.$$

Воспользовавшись условиями $\varphi(-R)=\varphi(+R)=0$ и определением локально суммируемой функции $\{u'(t)\}$, получим

$$\Big(\frac{du}{dt},\varphi\Big) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \{u'(t)\}\varphi(t)\,dt + (u(t_0+0)-u(t_0-0))\varphi(t_0),$$

или, что то же самое:

$$\Big(\frac{du}{dt},\varphi\Big) = \big(\{u'(t)\},\varphi(t)\big) + h\big(\delta(t-t_0),\varphi(t)\big).$$

Это и есть ничто иное как искомое равенство ($\mathbf{d_g}$). □

Пользуясь леммой, найдем обобщенную производную *функции Хевисайда* $\Theta(t)$, определяемой как ступенька с порогом в начале координат и высотой единица:

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t<0, \\ 1 & \text{при} \quad t\geqslant 0. \end{cases}$$

В соответствии с формулой ($\mathbf{d_g}$) получаем равенство

$$\Theta'(t) = \frac{d}{dt}\Theta(t) = \delta(t).$$

Это означает, что *функция Хевисайда* $\Theta(t)$ *является фундаментальным решением одномерного оператора* $\frac{d}{dt}$ *обобщенного дифференцирования*.

2^0. Рассмотрим обыкновенный линейный дифференциальный оператор

$$L[\frac{d}{dt}] = \frac{d^m}{dt^m} + a_1(t)\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \ldots + a_{m-1}(t)\frac{d}{dt} + a_m(t) \qquad (\mathbf{L_d})$$

с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами $a_j(t)$. Порядок этого оператора равен m. Чтобы найти его фундаментальное решение, поставим и решим сопутствующую задачу Коши:

$$\begin{cases} L[\frac{d}{dt}]z(t) = 0 & \text{при} \quad t > 0, \\ z^{(j)}(0) = 0 & \text{при} \quad j = 0, 1, \ldots, m-2, \\ z^{(m-1)}(0) = 1. \end{cases}$$

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что решение $z = z(t)$ этой сопутствующей задачи Коши существует и единственно.

Лемма (фундаментальное решение обыкновенного дифференциального оператора)**.** *Локально суммируемая функция* $\mathcal{E}(t) = \Theta(t)z(t)$, *где* $z = z(t)$ — *решение поставленной выше сопутствующей задачи Коши, является фундаментальным решением задаваемого равенством* ($\mathbf{L_d}$) *оператора* L.

Доказательство. Заметим, что функция $\mathcal{E}(t) = \Theta(t)z(t)$ определена на всей числовой оси и имеет в каждой ее точке непрерывные производные до порядка $m-1$ включительно. Сосчитаем обобщенные производные функции $\mathcal{E}(t)$ вплоть до порядка m. Учитывая, что

$$\mathcal{E}(t) = \begin{cases} z(t) & \text{при} \quad t \geqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad t < 0, \end{cases}$$

а также условие $z(0) = 0$, заключаем, что в начале координат скачок функции $\mathcal{E}(t)$ равен нулю. Применив к $\mathcal{E}(t)$ формулу дифференцирования кусочно гладкой функции,получаем равенство

$$\mathcal{E}'(t) = \Theta(t) z'(t).$$

Аналогично имеем

$$\mathcal{E}'' = \Theta(t) z''(t), \ldots, \mathcal{E}^{(m-1)} = \Theta(t) z^{(m-1)}(t).$$

Применяя в очередной раз формулу дифференцирования кусочно гладкой функции,но теперь уже к произведению

$$\mathcal{E}^{(m-1)}(t) = \Theta(t) z^{(m-1)}(t) = \begin{cases} z^{(m-1)}(t) & \text{при} \quad t \geqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad t < 0, \end{cases}$$

с единичным скачком в начале координат, получаем равенство

$$\mathcal{E}^{(m)}(t) = \Theta(t) z^{(m)}(t) + \delta(t).$$

Просуммировав с соответствующими коэффициентами найденные обобщенные производные функции $\mathcal{E}(t)$, придем к соотношению

$$L[\frac{d}{dt}]\mathcal{E}(t) = \delta(t) + \Theta(t)\left[z^{(m)}(t) + \cdots + a_m(t) z(t)\right]$$

$$= \delta(t) + \Theta(t) L[\frac{d}{dt}] z(t) = \delta(t).$$

Последнее соотношение справедливо в силу выполненного при $t > 0$ равенства $L[\frac{d}{dt}]z(t) = 0$, согласно выбору $z(t)$.

Таким образом, $\mathcal{E}(t)$ — это действительно фундаментальное решение задаваемого равенством (**L_d**) обыкновенного дифференциального оператора L. □

Как пример приложения только что доказанной леммы отметим, что фундаментальное решение оператора

$$\left(\frac{d}{dt} + a\right) \text{ – это функция } \Theta(t)e^{-at},$$

а оператора

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + a^2\right) \text{ – это функция } \frac{1}{a}\Theta(t)\sin at.$$

При $a = 0$ последняя переходит в произведение $t\Theta(t)$.

3^0. В случае оператора теплопроводности

$$L[D] \equiv \frac{\partial}{\partial t} - a^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \qquad \textbf{(heo)}$$

с независимыми переменными (x, t) из $\mathbb{R}^{n+1}$ имеет место следующая лемма.

Лемма (фундаментальное решение оператора теплопроводности)**.** *Фундаментальное решение задаваемого равенством* (**heo**) *оператора* $L[D]$ *имеет вид*

$$\mathcal{E}(x,t) = \Theta(t)G(x,t) = \Theta(t)\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}},$$

где $\Theta(t)$ *— функция Хевисайда.*

4^0. Найдем фундаментальное решение одномерного волнового оператора (даламбериана)

$$\Box_a \equiv L_1[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}] \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \qquad (\mathbf{WO}_1)$$

в случае двух независимых переменных (x, t) из $\mathbb{R}^2$.

Лемма (фундаментальное решение одномерного $\Box_a$). *Фундаментальное решение задаваемого равенством* ($\mathbf{WO}_1$) *оператора* $\Box_a$ *имеет вид* $\mathcal{E}_1(x,t) = \frac{1}{2a}\Theta(at - |x|)$, *где* $\Theta(t)$ *— функция Хевисайда.*

Доказательство. Функция $\mathcal{E}_1(x,t)$ локально суммируема в $\mathbb{R}^2$, обращается в нуль при $t < 0$, а также при $|x| > at > 0$, т.е. вне верхней части характеристического конуса для волнового оператора ($\mathbf{WO}_1$). Внутри же этой верхней части характеристического конуса функция $\mathcal{E}_1(x,t)$ тождественно постоянна и равна $1/(2a)$.

Пусть функция $\varphi = \varphi(x,t)$ из $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathbb{R}^2)$ такова, что ее носитель содержится в кубе с центром в начале и ребром $2R$:

$$\operatorname{supp}\varphi(x,t) \subset \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leqslant R,\ |t| \leqslant R\}.$$

В соответствии с определением обобщенного дифференцирования имеем

$$\left(\frac{\partial^2\mathcal{E}_1}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2\mathcal{E}_1}{\partial x^2}, \varphi\right) = \left(\mathcal{E}_1, \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right).$$

Учитывая локальную суммируемость функции $\mathcal{E}_1$ и ее обращение в нуль при $t < 0$, а также при $|x| > at > 0$, имеем далее

$$(\Box_a\mathcal{E}_1, \varphi) = \int \mathcal{E}_1(x,t)\Box_a\varphi(x,t)\,dxdt =$$

$$= \frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int\limits_{\frac{|x|}{a}}^{+\infty}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}dt\Big)dx - \frac{a}{2}\int\limits_{0}^{+\infty}\Big(\int\limits_{-at}^{+at}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}dx\Big)dt. \tag{5}$$

Из финитности функции φ вытекает, что

$$\int\limits_{|x|/a}^{+\infty}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(x,t)\,dt = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}\left(x,\frac{|x|}{a}\right).$$

Кроме того имеет место равенство

$$\int\limits_{-at}^{+at}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t)\,dx = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(at,t) - \frac{\partial\varphi}{\partial x}(-at,t).$$

Подставляя в (5) найденные значения внутренних интегралов, имеем

$$(\Box_a\mathcal{E}_1,\varphi) = -\frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\left(x,\frac{|x|}{a}\right)\,dx-$$

$$-\frac{a}{2}\int\limits_{0}^{+\infty}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(at,t) - \frac{\partial\varphi}{\partial x}(-at,t)\Big)dt. \tag{6}$$

Интеграл по dx в правой части разобьем на сумму двух: по отрицательной полуоси $x<0$ и по положительной $x>0$. Затем в интеграле по отрицательной полуоси сделаем замену переменной $y=-x$ и в результате придем к равенству

$$\frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\left(x,\frac{|x|}{a}\right)\,dx = \frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\left(-y,\frac{|y|}{a}\right)\,dy+$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\left(x,\frac{|x|}{a}\right)\,dx.$$

В каждом из интегралов в правой части сделаем замену переменной: $y = at$ и $x = at$ соответственно. Тогда получим

$$\frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\left(x,\frac{|x|}{a}\right)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial t}(-at,t)\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial t}(at,t)\,dt.$$

Подставляя это равенство в (6), получаем

$$(\Box_a\mathcal{E}_1,\varphi) = -\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{+\infty}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial t}(at,t) + a\frac{\partial\varphi}{\partial x}(at,t)\Big)dt -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{+\infty}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial t}(-at,t) - a\frac{\partial\varphi}{\partial x}(-at,t)\Big)dt.$$

Представим подынтегральные выражения в правой части как полные производные по t:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\pm at,t) \pm a\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\pm at,t) = \frac{d}{dt}\left[\varphi(\pm at,t)\right].$$

Подставляя эти выражения в предыдущее равенство и пользуясь финитностью функции $\varphi(x,t)$, вычислим оба интегральных слагаемых в явном виде. Тогда получим

$$(\Box_a\mathcal{E}_1,\varphi) = \frac{1}{2}\varphi(0,0) + \frac{1}{2}\varphi(0,0) = (\delta(x,t),\varphi(x,t)).$$

Это и означает, что $\mathcal{E}_1(x,t)$ — это *фундаментальное решение одномерного волнового оператора*. □

5^0. Рассмотрим теперь двумерный волновой оператор

$$L_2[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}] \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}. \qquad (\mathbf{WO}_2)$$

Задача. *Доказать, что фундаментальным решением двумерного волнового оператора* $L_2[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}]$ *является следующая функция*

$$\mathcal{E}_2(x_1, x_2, t) = \frac{\Theta\Big(at - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\Big)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2 - x_1^2 - x_2^2}},$$

где $\Theta(t)$ *— функция Хевисайда.*

Отметим, что функция $\mathcal{E}_2(x_1, x_2, t)$ равна нулю при $t < 0$. Если же $t > 0$, то $\mathcal{E}_2(x_1, x_2, t)$ равна нулю при $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} > at$, т.е. вне характеристического конуса для волнового оператора ($\mathbf{WO}_2$). Если же $t > 0$ и $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} < at$, то имеем

$$\mathcal{E}_2(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi a\sqrt{a^2t^2 - |x|^2}}.$$

Тем самым $\mathcal{E}_2(x_1, x_2, t)$ неограниченно возрастает при $|x| \to at$. В то же время функция $\mathcal{E}_2(x_1, x_2, t)$ локально суммируема в $\mathbb{R}^3$, ибо интеграл по любому компакту от ее модуля представляет собой интеграл по пересечению этого компакта с верхней частью характеристического конуса, лежащей в полупространстве $t > 0$. Тем самым этот интеграл мажорируется выражением вида

$$I(T) = \frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^T \Big(\int\limits_{\sqrt{x_1^2+x_2^2}<at} \frac{dx_1dx_2}{\sqrt{a^2t^2 - x_1^2 - x_2^2}}\Big)\, dt,$$

где T — некоторое конечное положительное число.

Положив $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$ в интеграле $I(T)$, легко сосчитать, что

$$I(T) = \frac{1}{a}\int_0^T \Big(\int_0^{at} \frac{r}{\sqrt{a^2t^2 - r^2}}\,dr\Big)dt.$$

Сделав замену $r = at\xi$, получим

$$I(T) = \frac{1}{a}\int_0^T \frac{a^2t^2}{at}\,dt \int_0^1 \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\,d\xi,$$

или

$$I(T) = -\frac{T^2}{4}\int_0^1 \frac{d}{d\xi}\left(\sqrt{1-\xi^2}\right)\,d\xi = T^2/4 < \infty.$$

Это доказывает,что $\mathcal{E}_2(x_1, x_2, t)$ локально суммируема в $\mathbb{R}^3$.

Фундаментальное решение $\mathcal{E}_3(x,t)$ трехмерного волнового оператора не суммируемо локально, а представляет собой сингулярную обобщенную функцию.

Задача. *Доказать, что фундаментальным решением трехмерного волнового оператора $L_2[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}]$ является следующая функция*

$$\mathcal{E}_3(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{\Theta(t)}{4\pi a^2 t}\delta_{S_{at}}(x) = \frac{\Theta(t)}{2\pi a}\delta(a^2t^2 - |x|^2),$$

где $\Theta(t)$ — функция Хевисайда.

Сингулярная обобщенная функция $\mathcal{E}_3(x,t)$ действует на пробную функцию $\varphi = \varphi(x,t)$ по правилу

$$(\mathcal{E}_3, \varphi) = \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_0^{+\infty} (\delta_{S_{at}}, \varphi) \frac{dt}{t} = \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{t} \int\limits_{|x|=at} \varphi(x,t)\, dS_x\, dt.$$

Лекция 11.

ТЕМА: Введение в метод обратной задачи для уравнения КдФ. **1**^{0}. Канонический вид и законы сохранения уравнения КдФ. **2**^{0}. Постановки прямой и обратной задач рассеяния. **3**^{0}. Схема метода обратной задачи для уравнения КдФ. **4**^{0}. Свойства одномерного оператора Шредингера с быстроубывающим потенциалом. **5**^{0}. Определение пары Лакса. Критерий унитарной эквивалентности реализаций оператора Шредингера при разных значениях времени.

1^0. Точный метод интегрирования уравнения КдФ, названный впоследствии *методом обратной задачи*, был открыт в 1967 г. группой американских физиков. Наиболее примечательная черта метода состоит в том, что для интегрирования нелинейной задачи оказалось достаточно решить последовательно две линейные задачи: одну для дифференциального уравнения, вторую — для интегрального. Позже было открыто, что метод обратной задачи применим к решению ряда других нелинейных уравнений.

Перейдем к изложению метода в случае *задачи Коши для уравнения КдФ*, записанного в каноническом виде

$$K[u] \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \qquad (\mathbf{KdF})$$

Решение уравнения (**KdF**) будем искать в классе непрерывно дифференцируемых функций $v(x,t)$, имеющих непрерывные третьи производные по x и удовлетворяющих условию

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \int_{-\infty}^{+\infty} (1+|x|)|v(x,t)|\,dx < +\infty$$

для любого $T > 0$. К уравнению (**KdF**) добавляются начальные данные $u(x,0) = \varphi(x)$.

Отметим, что для функции $\varphi(x)$ должна выполняться оценка

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1+|x|)|\varphi(x)|\,dx < +\infty.$$

Аналогичные неравенства должны выполняться и для производных функции $\varphi(x)$ вплоть до третьего порядка. В частности, такого рода соотношениям удовлетворяет любая финитная бесконечно дифференцируемая функция $\varphi(x)$ одной переменной, а также производная любого порядка от такой функции.

Получим для уравнения (**KdF**) ряд *законов сохранения*. Первый из них найдем, записав оператор $K[u]$ в дивергентном виде:

$$K[u] \equiv \frac{\partial}{\partial t}\Big(u\Big) + \frac{\partial}{\partial x}\Big(-3u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big).$$

Интегрируя равенство $K[u]=0$ по всей оси x и пользуясь быстрым убыванием функции u, получаем

$$\int K[u]\,dx = \int \frac{\partial}{\partial t}\Big(u\Big)\,dx = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\int u\,dx\Big) = 0.$$

Следовательно, интеграл $\displaystyle\int u(x,t)\,dx$ постоянен во времени.

Вместе с оператором $K[u]$ рассмотрим еще дифференциальный *оператор Гарднера*:

$$R[w] \equiv \frac{\partial w}{\partial t} - 6(w+\varepsilon^2 w^2)\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}. \qquad (\mathbf{GO})$$

Здесь ε — положительный параметр, $\varepsilon \ll 1$.

Дифференциальный оператор $R[w]$ допускает также запись в дивергентной форме:

$$R[w] \equiv \frac{\partial}{\partial t}\Big(w\Big) + \frac{\partial}{\partial x}\Big(-3w^2 - 2\varepsilon^2 w^3 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big). \qquad (\mathbf{GO}')$$

Пусть переменные w и u связаны между собой соотношением

$$u = w + \varepsilon\frac{\partial w}{\partial x} + \varepsilon^2 w^2. \qquad (\mathbf{GM})$$

Преобразование (**GM**), переводящее функцию $w(x,t)$ в функцию $u(x,t)$, называется *преобразованием Гарднера—Миуры*.

Отметим, что при фиксированном t равенство (**GM**) представляет собой уравнение Рикатти относительно w и допускает линеаризацию с помощью замены зависимой переменной.

Важность преобразования Гарднера—Миуры для уравнения (КдФ) основано на следующем дифференциальном тождестве

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = (1 + \varepsilon\frac{\partial}{\partial x} + 2\varepsilon^2 w)R[w]. \qquad (\mathbf{DI})$$

В качестве упражнения проведите обоснование тождества (**DI**) самостоятельно.

Как важное следствие из (**DI**) получаем утверждение:

если функция $w(x,t)$ представляет собой решение уравнения Гарднера $R[w] = 0$, то соответствующая ей в силу соотношения (**GM**) *функция $u(x,t)$ будет решением уравнения* (КдФ).

Лемма. *Пусть $u(x,t)$ и все ее производные по переменной x быстроубывающие и при этом $u(x,t)$ решает уравнение (КдФ), а решение $w(x,t)$ уравнения*

$$w + \varepsilon\frac{\partial w}{\partial x} + \varepsilon^2 w^2 = u$$

разлагается в сходящийся степенной ряд

$$w(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k[u(x,t)] \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k[u]. \qquad (1)$$

Тогда все интегралы вида

$$I_k(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} w_k[u]\,dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

по переменной t постоянны, т.е. $I_k(t) = I_k(0)$ для всех $t > 0$.

Доказательство. Имеем в соответствии с равенством (1):

$$w^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Big(\sum_{j=0}^{k} w_j[u] w_{k-j}[u]\Big) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k[u],$$

где $v_k[u] = \sum\limits_{j=0}^{k} w_j[u] w_{k-j}[u]$. Следовательно,

$$w + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial x} + \varepsilon^2 w^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k[u] + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+1} \frac{\partial w_k[u]}{\partial x} + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+2} v_k[u].$$

Подставляя это разложение по степеням ε в уравнение (**GM**), приходим к равенству

$$u = w_0[u] + \varepsilon \Big(\frac{\partial w_0[u]}{\partial x} + w_1[u]\Big) + \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k \Big(w_k[u] + \frac{\partial w_{k-1}[u]}{\partial x} + v_{k-2}[u]\Big).$$

Учитывая, что функция u от параметра ε никак не зависит, заключаем из полученного равенства, что $w_0[u] = u$, а все коэффициенты при положительных степенях ε обязаны обращаться в нуль. Иными словами, имеем следующую систему рекуррентных соотношений

$$w_0[u] = u, \quad w_1[u] = -\frac{\partial w_0[u]}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial x},$$

и далее при $k = 0, 1, 2, \ldots$:

$$w_{k+2}[u] = -\frac{\partial w_{k+1}[u]}{\partial x} - v_k[u] = -\frac{\partial w_{k+1}[u]}{\partial x} - \sum_{j=0}^{k} w_j[u] w_{k-j}[u].$$

С помощью этих рекуррентных соотношений индукцией по k доказывается, что выражение $w_k[u]$ представляет собой полином от переменных

$$(u, \partial u/\partial x, \ldots, \partial^k u/\partial x^k).$$

Таким образом, функция $w_k[u]$ является быстроубывающей.

По условию функция $u(x,t)$ является решением уравнения (КдФ) и функция $w(x,t)$ связана с ней соотношением (**GM**). Поэтому и в силу (**DI**) имеет место равенство

$$K[u] = (1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} + 2\varepsilon^2 w) R[w] = 0.$$

Подставляя сюда разложение (1) и приравнивая нулю коэффициенты при степенях ε, видим, что выражение $w_k[u]$ при всех k должно удовлетворять соотношению вида

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(w_k[u]\Big) + \frac{\partial}{\partial x}\Big(R_0[u]\Big) = 0, \tag{2}$$

где $R_0[u]$ представляет собой выражение, зависящее от u и от производных функции u по переменной x вплоть до определенного порядка.

В соответствии с условием леммы функция $R_0[u]$ является быстроубывающей и поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}\big(R_0[u]\big)\, dx = R_0[u]\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

Пользуясь этим и интегрируя равенство (2) при фиксированном $t > 0$ по всей оси x, получаем

$$\frac{d}{dt}\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} w_k[u]\,dx\Big) = 0.$$

Следовательно, интеграл $I_k(t)$ действительно постоянен во времени. □

Таким образом, *уравнение* (КдФ) *имеет бесконечно много интегралов движения*. Сосчитаем несколько первых из них. При $k = 0$ имеем

$$I_0 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} w_0[u]\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\,dx.$$

При $k = 2$ справедливо

$$w_2[u] = -\frac{\partial w_1}{\partial x} - w_0^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u^2,$$

и, следовательно, имеем интеграл движения

$$I_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^2(x,t)\,dx.$$

Далее, при $k = 3$ справедливо

$$w_3[u] = -\frac{\partial w_2}{\partial x} - 2w_0 w_1 = -\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 2\frac{\partial u^2}{\partial x}.$$

Таким образом, интеграл I_3 тривиален. Далее, при $k = 4$ воспользуемся представлением

$$w_4[u] = -\frac{\partial w_3}{\partial x} - 2w_0 w_2 - w_1^2.$$

Подставляя в правую часть этого равенства уже найденные выражения для $w_k[u]$, $k = 0, 1, 2, 3$, получаем

$$w_4[u] = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 6u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + 2u^3 =$$

$$= \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 6\frac{\partial}{\partial x}\Big(u\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + \Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + 2u^3.$$

Следовательно, интеграл движения I_4 имеет вид

$$I_4 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [u^3(x,t) + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2(x,t)]\, dx.$$

Наличие у уравнения (КдФ) бесконечного числа интегралов движения выделяет его среди всех остальных уравнений и позволяет построить точное решение методом, основанным на обратной задаче рассеяния для одномерного стационарного уравнения Шредингера.

2^0. Пусть быстроубывающая функция $u(x,t)$ решает уравнение (КдФ), являясь при $t = 0$ финитной и бесконечно дифференцируемой функцией переменной x:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad u(x,0) = \varphi(x).$$

Сопоставим этому решению $u(x,t)$ следующий обыкновенный дифференциальный оператор второго порядка:

$$L(t) = \frac{d^2}{dx^2} - u(x,t).$$

Дифференциальные выражения такого вида принято называть *одномерными операторами Шредингера*.

В качестве области определения $L(t)$ условимся рассматривать пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$ переменной x.

Пространство $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$ плотно в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R})$. Область значений оператора $L(t)$, очевидно, содержится в $L_2(\mathbb{R})$. Оператор $L(t)$ *линеен и неограничен* (докажите последнее в качестве упражнения).

Рассмотрим *стационарное уравнение Шредингера*

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\lambda - u(x,t))\psi = 0 \Leftrightarrow -L(t)\psi = \lambda\psi. \qquad (\mathbf{Sch})$$

Здесь λ — константа, не зависящая от x, зависимость же от времени в уравнении предполагается параметрической (от t зависит коэффициент $u(x,t)$ уравнения).

Со стационарным уравнением Шредингера свяжем следующие две задачи.

Задача. *Найти все значения λ, при которых уравнение* (**Sch**) *имеет в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ хотя бы одно нетривиальное решение $\psi(x,t)$.*

Это — *сингулярная задача Штурма—Лиувилля*. Искомые значения λ называются ее собственными числами, а соответствующие им нетривиальные решения $\psi(x,t)$ — собственными функциями. Предполагается, что собственные функции нормированы условием

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^2(x,t)\,dx = 1. \qquad (N_\psi)$$

Если $\lambda = -\varkappa_m^2 < 0$ — решение поставленной сингулярной задачи, то соответствующая ему собственная функция $\psi_m(x,t)$ при

$x \to +\infty$ имеет следующую асимптотику

$$\psi_m(x,t) \sim c_m(t) e^{-\varkappa_m(t)x}.$$

Задача. *Найти при $\lambda = k^2 \geqslant 0$ ограниченные на всей оси решения $\psi(x,t)$ уравнения* (**Sch**), *имеющие при $x \to \pm\infty$ следующие асимптотики*

$$\psi(x,t) \sim e^{-ikx} + b(k,t)e^{ikx} \quad \textit{при} \quad x \to +\infty,$$

$$\psi(x,t) \sim a(k,t)e^{-ikx} \quad \textit{при} \quad x \to -\infty.$$

Функции $a(k,t)$ и $b(k,t)$ в приведенных асимптотиках — это также искомые величины.

Физически эта задача интерпретируется как *задача рассеяния* плоской волны единичной амплитуды на заданном потенциале $u(x,t)$. Волна распространяется вдоль оси x из $-\infty$ в $+\infty$.

Коэффициенты $a(k,t)$ и $b(k,t)$ из асимптотических разложений называются *коэффициентами отражения и прохождения* соответственно. Эти коэффициенты связаны соотношением

$$|a(k,t)|^2 + |b(k,t)|^2 = 1.$$

Совокупность величин $\{\varkappa_m(t), c_m(t)\}$ и $\{a(k,t), b(k,t)\}$ называют *данными рассеяния*, соответствующими исходному потенциалу $u(x,t)$.

Найти данные рассеяния по заданному потенциалу $u(x,t)$ — значит, решить *прямую задачу рассеяния*.

Задача отыскания потенциала $u(x,t)$ по известным данным рассеяния $\{\varkappa_m(t), c_m(t)\}$ и $\{a(k,t), b(k,t)\}$ называется *обратной задачей рассеяния*. Ее решение находится следующим образом.

Сначала по данным рассеяния конструируется вспомогательная функция $B(x,t)$, задаваемая выражением

$$B(x,t) = \sum_{m=1}^{N} c_m^2(t) e^{-\varkappa_m(t)x} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} b(k,t) e^{ikx}\,dk. \qquad (\mathbf{B})$$

Затем с помощью сконструированной по данным рассеяния функции $B(x,t)$ записывается интегральное уравнение:

$$K(x,y,t) + B(x+y,t) + \int_{x}^{+\infty} B(y+z,t) K(x,z,t)\,dz = 0. \quad (\mathbf{GLM})$$

Это уравнение известно как *уравнение Гельфанда—Левитана—Марченко*. Решив его, т.е. отыскав функцию $K(x,y,t)$, затем полагают

$$u(x,t) = -2\frac{d}{dx}K(x,x,t).$$

Эта функция и задает искомый потенциал.

$\mathbf{3}^0$. Вернемся к задаче Коши для уравнения (КдФ) с финитными и бесконечно дифференцируемыми начальными данными:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad u(x,0) = \varphi(x).$$

Изложим детально применяемую в этом случае схему метода обратной задачи. Весь процесс разбивается на три последовательных шага.

МОЗ1). Поставить прямую задачу рассеяния для оператора Шредингера

$$L(0) = \frac{d^2}{dx^2} - u(x,0) = \frac{d^2}{dx^2} - \varphi(x),$$

и решить ее, т.е. отыскать данные рассеяния

$$\{\varkappa_m(0), c_m(0)\}, \quad \{a(k,0), b(k,0)\}.$$

Здесь $m = 1, 2, \ldots, N$, а $k \geqslant 0$.

МОЗ2). Исследовать зависимость данных рассеяния от времени. В случае уравнения (КдФ) эта зависимость задается следующими соотношениями

$$\varkappa_m(t) = \varkappa_m(0), \quad c_m(t) = c_m(0)e^{4\varkappa_m^3 t},$$

$$b(k,t) = b(k,0)e^{i8k^3 t}, \quad a(k,t) = a(k,0).$$

Обоснование подобного вида равенств составляет содержание второго шага метода обратной задачи.

МОЗ3). В момент времени $t > 0$ при известных данных рассеяния поставить и решить обратную задачу рассеяния для оператора Шредингера

$$L(t) = \frac{d^2}{dx^2} - u(x,t).$$

Потенциал $u(x,t)$, решающий эту обратную задачу, оказывается, решает и исходную задачу Коши для уравнения (КдФ).

4^0. Обоснование метода обратной задачи начнем с исследования оператора Шредингера

$$L(t) = \frac{d^2}{dx^2} - u(x,t)$$

с быстроубывающим потенциалом $u(x,t)$. Оператор $L(t)$ определен на пространстве $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$ бесконечно дифференцируемых и финитных по x функций, область же значений $L(t)$ — это подпространство в $L_2(\mathbb{R})$.

Дадим определение *производной оператора* $L(t)$ по параметру t. Пусть функция $h = h(x)$ принадлежит $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$. Тогда имеют место соотношения

$$\frac{L(t) - L(t_0)}{t - t_0}h = \frac{L(t)h - L(t_0)h}{t - t_0} = -\frac{u(x,t) - u(x,t_0)}{t - t_0}h.$$

Устремляя здесь t к t_0, видим, что в качестве производной

$$\dot{L}(t_0) = \frac{dL}{dt}(t_0) = L_t(t_0)$$

оператора $L(t)$ в точке t_0 естественно рассматривать оператор умножения на функцию $-\frac{\partial u}{\partial t}(x,t_0)$:

$$\dot{L}(t_0)h = -\frac{\partial u}{\partial t}(x,t_0)h \qquad \forall\, h \in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}).$$

Оператор $L(t)$ имеет в $L_2(\mathbb{R})$ замыкание, совпадающее с оператором $L^{**}(t) = (L^*(t))^*$. Здесь через * обозначено сопряжение в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R})$. Отметим, что замыкание определено не только на функциях из $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$, но и вообще на всех элементах из $L_2(\mathbb{R})$. Далее под $L(t)$ будем понимать именно замыкание исходного оператора Шредингера.

Линейный оператор $U(t) : L_2(\mathbb{R}) \mapsto L_2(\mathbb{R})$ называется *унитарным*, если $U(t)$ отображает пространство $L_2(\mathbb{R})$ на себя, сохраняя при этом скалярное произведение:

$$(\psi,\psi) = (U(t)\psi, U(t)\psi).$$

Оператор, обратный унитарному $U(t)$, совпадает с $U^*(t)$ — сопряженным к $U(t)$:

$$U^{-1}(t) = U^*(t) \;\Leftrightarrow\; U^*(t)U(t) = U(t)U^*(t) = I.$$

Определение. *Операторы* $L(0)$ *и* $L(t)$ *называются унитарно эквивалентными, если существует унитарный оператор* $U(t) : L_2 \mapsto L_2$ *такой, что*

$$L(0) = U(t)^* L(t) U(t). \tag{\textbf{UE}}$$

Оператор $L(0)$ унитарно эквивалентен самому себе: в качестве $U(0)$ можно взять тождественный оператор: $U(0) = I$.

Операторы $L(t_1)$ и $L(t_2)$, действующие из $L_2(\mathbb{R})$ в $L_2(\mathbb{R})$, имеют одинаковые наборы собственных чисел тогда и только тогда, когда они *унитарно эквивалентны*.

Хорошо известно, что матрицы конечных размеров, имеющие одинаковый набор простых собственных чисел, унитарно эквивалентны друг другу.

5^0. *Коммутатором* двух операторов L и A называется разность $LA - AL \equiv [L, A]$.

Определение. *Оператор Шредингера* $L = L(t)$ *образует с оператором* A *пару Лакса, если коммутатор* $[L, A]$ *является в* $L_2(\mathbb{R})$ *оператором умножения на скалярную функцию, т.е.*

$$[L, A]h = v(x,t)h \qquad \forall\, h \in L_2(\mathbb{R}),$$

и при этом выполняется равенство

$$L_t + [L, A] = 0. \tag{\textbf{EqL}}$$

Теорема (о постоянстве собственных чисел). *Собственные числа оператора Шредингера* $L(t) = \frac{d^2}{dx^2} - u(x,t)$ *постоянны во времени тогда и только тогда, когда существует кососимметричный оператор* $A : L_2 \mapsto L_2$, *непрерывно зависящий от параметра* t *и образующий с* $L(t)$ *пару Лакса.*

Доказательство. Пусть все собственные числа $\lambda_m = \lambda_m(t)$ оператора $L(t)$ постоянны по времени. Тогда операторы $L(0)$ и $L(t)$ унитарно эквивалентны, т.е. существует унитарный оператор $U(t) : L_2 \mapsto L_2$ такой, что имеет место равенство

$$L(0) = U(t)^* L(t) U(t).$$

Производная $U_t(t_0)$ представляет собой линейный оператор, обладающий тем свойством, что для любой функции h из L_2 имеет место соотношение

$$\lim_{t\to t_0} \left\| U_t(t_0)h - \frac{U(t)h - U(t_0)h}{t - t_0} \right\|_{L_2} = 0.$$

Рассмотрим произведение $A = U_t U^*$ и убедимся, что этот оператор образует с $L(t)$ пару Лакса. Имеем $A^* = U U_t^*$ и далее

$$A + A^* = U_t U^* + U(U^*)_t = \frac{d}{dt}(UU^*) = \frac{d}{dt}(I) = 0.$$

Таким образом, $A = -A^*$, т.е. оператор A кососимметричен.

Далее, умножив равенство $A = U_t U^*$ справа на U, получим

$$AU = U_t U^* U = U_t \quad \Leftrightarrow \quad U_t = AU. \tag{1}$$

Следовательно, справедливо также равенство

$$U_t^* = U^* A^* = -U^* A \Leftrightarrow (U^*)_t = -U^* A. \tag{1'}$$

Пользуясь равенствами (1)–(1'), продифференцируем по t равенство $L(0) = U^*(t)L(t)U(t)$. Справа получим

$$\frac{d}{dt}\big[U^*(t)L(t)U(t)\big] = U_t^* LU + U^* L_t U + U^* L U_t =$$

$$-U^* ALU + U^* L_t U + U^* LAU = U^*\big(L_t + LA - AL\big)U.$$

Производная по t оператора $L(0)$ равна нулю и, следовательно, имеет место соотношение

$$U^*\big(L_t + [L, A]\big)U = 0.$$

Домножая это равенство слева на U и справа на U^*, получаем в итоге $L_t + [L, A] = 0$. Вспоминая, что производная $L_t(t_0)$ для оператора Шредингера представляет собой оператор умножения на функцию $-\frac{\partial u}{\partial t}(x, t_0)$, видим, что

$$[L, A] = -L_t(t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t).$$

Таким образом, операторы L и A образуют пару Лакса.

Докажем теперь достаточность условий теоремы для постоянства собственных чисел оператора $L(t)$.

Пусть $A : L_2 \mapsto L_2$ — кососимметричный оператор, образующий с оператором Шредингера $L(t)$ пару Лакса, причем по переменной t оператор $A = A(t)$ непрерывен. Покажем, что в этом случае операторы $L(0)$ и $L(t)$ унитарно эквивалентны, т.е. построим унитарный оператор $U(t) : L_2 \mapsto L_2$ со свойством

$$L(0) = U(t)^* L(t) U(t).$$

Рассмотрим следующую операторную задачу Коши

$$U_t = AU, \qquad U(0) = I. \tag{2}$$

Решающий ее оператор $U = U(t)$ существует, единствен и определен при всех неотрицательных t.

В случае, если A — постоянная матрица, решение поставленной операторной задачи называется *матричной экспонентой* и обозначается как e^{tA}. Если же $A = A(t)$, то решение задачи $U_t = AU$, $U(0) = I$, называется *фундаментальной матрицей решений*.

Из кососимметричности A следует, что решение $U(t)$ задачи (2) представляет собой унитарный оператор (докажите это в качестве упражнения).

Рассмотрим теперь произведение $\mathfrak{L}(t) = U^*(t)L(t)U(t)$ и найдем его производную по t. Имеем

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dt}(t) = U_t^*(t)L(t)U(t) + U^*(t)L_t(t)U(t) + U^*(t)L(t)U_t(t).$$

По условию $U_t = AU$ и, следовательно, $U_t^* = U^*A^* = -U^*A$. Учитывая это, получаем далее

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dt} = -U^*ALU + U^*L_tU + U^*LAU =$$
$$= U^*\big\{L_t + LA - AL\big\}U = U^*\big\{L_t + [L, A]\big\}U.$$

По условию операторы $L(t)$ и A образуют пару Лакса, т.е. $L_t + [L, A] = 0$, и поэтому $\frac{d\mathfrak{L}}{dt}(t) = 0$. Иными словами, при любом $t > 0$ имеет место равенство

$$\mathfrak{L}(t) = \mathfrak{L}(0) = U^*(0)L(0)U(0) = L(0),$$

означающее унитарную эквивалентность $L(t)$ и $L(0)$. $\square$

Лекция 12.

ТЕМА: Метод обратной задачи для уравнения КдФ: обоснование. **1**^{0}. Примеры операторов, образующих пары Лакса. Следствия о собственных числах. **2**^{0}. Уравнение для собственных функций оператора с постоянными во времени собственными числами.

1^0. Рассмотрим два примера кососимметричных операторов, образующих пару Лакса с оператором Шредингера

$$L(t) = \frac{d^2}{dx^2} - u(x,t)$$

в предположении, что потенциал $u(x,t)$ быстроубывающая функция.

Пример. *Пусть α — постоянная и $A = \alpha\frac{d}{dx}$. Тогда оператор A кососимметричен и при потенциале $u(x,t)$, удовлетворяющем уравнению $\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, образует с $L(t)$ пару Лакса.*

Доказательство. Проверим, что оператор A кососимметричен. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$. Тогда в силу формулы интегрирования по частям имеем равенства

$$(Af, g) = \alpha\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(x)g(x)\,dx = -\alpha\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)g'(x)\,dx.$$

Переписывая их в виде $(Af, g) = -(f, Ag)$, получаем $A^* = -A$.

Найдем коммутатор $[L, A]$. Имеем

$$LAh = \Big[\frac{d^2}{dx^2} - u(x,t)\Big](\alpha\frac{dh}{dx}) = \alpha\frac{d^3h}{dx^3} - \alpha u(x,t)\frac{dh}{dx},$$

$$ALh = \alpha\frac{d}{dx}\Big(\frac{d^2h}{dx^2} - uh\Big) = \alpha\frac{d^3h}{dx^3} - \alpha\frac{\partial u}{\partial x}h - \alpha u(x,t)\frac{dh}{dx}.$$

Следовательно, $(LA - AL)h = \alpha\frac{\partial u}{\partial x}h$. Учитывая, что производная оператора L в точке t представляет собой оператор умножения на скалярную функцию $-\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$, получаем далее

$$(L_t + [L, A])h = -\Big(\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha\frac{\partial u}{\partial x}\Big)h.$$

Выражение справа равно нулю в силу исходного условия на потенциал $u(x,t)$. Таким образом, операторы L и A действительно образуют пару Лакса. □

Как следствие теоремы о постоянстве собственных чисел и утверждения, сформулированного в только что рассмотренном примере, заключаем, что

если быстроубывающий потенциал $u(x,t)$ решает уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, то собственные числа оператора $L(t)$ постоянны по времени.

Пример. *Пусть потенциал $u(x,t)$ — быстроубывающий, а оператор A задается равенством*

$$A = -4\frac{d^3}{dx^3} + 6u\frac{d}{dx} + 3\frac{\partial u}{\partial x}\,I. \tag{3}$$

Тогда A кососимметричен и при потенциале $u(x,t)$, удовлетворяющем уравнению (КдФ)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0,$$

образует с $L(t)$ пару Лакса.

Доказательство. Проверим, что задаваемый равенством (3) оператор A кососимметричен. Для любых $f(x)$ и $g(x)$ из $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$

имеем равенства

$$(Af,g) = -4\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3 f}{dx^3}(x)g(x)\,dx+$$

$$6\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u\frac{df}{dx}(x)g(x)\,dx + 3\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)f(x)g(x)\,dx.$$

Применяя к первому и второму интегралам в правой части формулу интегрирования по частям, имеем далее

$$(Af,g) = 4\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{d^3 g}{dx^3}(x)\,dx-$$

$$6\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{d}{dx}(ug)\,dx + 3\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)f(x)g(x)\,dx.$$

Следовательно, справедливы соотношения

$$(Af,g) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\Big(4\frac{d^3 g}{dx^3} - 6u\frac{dg}{dx} - 3\frac{\partial u}{\partial x}g\Big)\,dx,$$

или, переписывая полученное равенство в эквивалентном виде: $(Af,g) = -(f,Ag)$. Заключаем окончательно, что $A^* = -A$.

Найдем коммутатор $[L,A]$. Имеем

$$LAh = \Big(\frac{d^2}{dx^2} - u\Big)\Big(-4\frac{d^3 h}{dx^3} + 6u\frac{dh}{dx} + 3\frac{\partial u}{\partial x}h\Big),$$

$$ALh = \Big(-4\frac{d^3}{dx^3} + 6u\frac{d}{dx} + 3\frac{\partial u}{\partial x}\Big)\Big(\frac{d^2 h}{dx^2} - uh\Big).$$

Вычитая из первого равенства второе и проводя необходимые выкладки, получаем

$$(LA - AL)h = \Big(6u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big)h.$$

Вспоминая, что производная оператора L в точке t представляет собой оператор умножения на скалярную функцию $-\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$, имеем далее

$$(L_t + [L, A])h = -\Big(\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big)h.$$

Выражение справа равно нулю в силу исходного условия на потенциал $u(x,t)$ являющийся решением уравнения (КдФ). Таким образом, операторы L и A действительно образуют пару Лакса. □

Как следствие утверждения, сформулированного в последнем примере, и теоремы о постоянстве собственных значений, получаем следующую важную теорему.

Теорема. *Если быстроубывающий потенциал $u(x,t)$ представляет собой решение уравнения (КдФ), то собственные числа оператора Шредингера $\frac{d^2}{dx^2} - u(x,t)$ постоянны по времени.*

В принятых нами обозначениях это означает, что

$$\varkappa_m(t) = \varkappa_m(0), \quad m = 1, 2, \ldots, N.$$

2^0. Выведем дифференциальное уравнение для собственных функций оператора Шредингера с постоянными во времени собственными числами.

Лемма. *Пусть оператор Шредингера* $L(t)$ *и кососимметричный оператор* $A = A(t)$, *непрерывно зависящий от параметра* t, *образуют пару Лакса. Тогда любая собственная функция* $\psi = \psi(x,t)$ *оператора* $L(t)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\psi_t = A\psi. \tag{4}$$

Доказательство. По условию функция $\psi(x,t)$ при любом $t \geqslant 0$ принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R})$ и при этом

$$-L(t)\psi(x,t) = \lambda_m(t)\psi(x,t). \tag{5}$$

Здесь $\lambda_m(t) = -\varkappa_m^2(t)$ — собственное число, соответствующее функции $\psi(x,t)$.

По переменной t функция $\psi(x,t)$ обладает той же гладкостью, что и потенциал $u(x,t)$, т.е. один раз непрерывно дифференцируема на положительной полуоси.

По теореме о постоянстве собственных чисел, $L(t)$ и $L(0)$ унитарно эквивалентны, т.е. существует унитарный оператор $U(t) : L_2 \mapsto L_2$, с которым имеет место равенство

$$L(0) = U^*(t)L(t)U(t), \qquad U(0) = I.$$

В качестве такового, как было установлено при доказательстве уже упомянутой теоремы, годится решение следующей операторной задачи Коши

$$U_t = AU, \qquad U(0) = I.$$

При этом $A = U_tU^*$. Пользуясь равенствами

$$L(0) = U^*(t)L(t)U(t), \qquad \lambda_m(t) = \lambda_m(0) \equiv \lambda_m,$$

запишем соотношение (5) при $t = 0$:

$$U^*(t)L(t)U(t)\psi(x,0) + \lambda_m\psi(x,0) = 0.$$

Умножим последнее равенство слева на $U(t)$, воспользовавшись при этом унитарностью $U(t)$. Тогда получим

$$L(t)U(t)\psi(x,0) + \lambda_m U(t)\psi(x,0) = 0.$$

Это равенство означает, что функция $\varphi(x,t) = U(t)\psi(x,0)$, принадлежащая в силу унитарности $U(t)$ пространству $L_2(\mathbb{R})$, является собственной функцией оператора $L(t)$. Применяя к паре решений $\varphi(x,t)$ и $\psi(x,t)$ одного и того же линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2v}{dx^2} + (\lambda_m - u(x,t))v = 0$$

известную формулу Остроградского — Лиувилля, получим

$$\varphi(x,t)\psi_x(x,t) - \psi(x,t)\varphi_x(x,t) = C(t), \tag{6}$$

где $C(t)$ не зависит от x.

Решение $\psi(x,t)$ из $L_2(\mathbb{R})$ при $x \to +\infty$ подчинено следующим асимптотическим соотношениям

$$\psi(x,t) \sim c_m(t)e^{-\varkappa_m x}, \quad \psi_x(x,t) \sim -\varkappa_m c_m(t)e^{-\varkappa_m x}.$$

Следовательно, справедливы предельные равенства

$$\lim_{x\to+\infty} \psi(x,t) = \lim_{x\to+\infty} \psi_x(x,t) = 0.$$

Аналогичные предельные соотношения справедливы и для решения $\varphi(x,t)$ из $L_2(\mathbb{R})$:

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x,t) = \lim_{x\to+\infty} \varphi_x(x,t) = 0.$$

Переходя теперь в равенстве (6) к пределу при $x \to +\infty$, находим: $C(t) = 0$. Иными словами, *при любом $t > 0$ определитель Вронского функций $\varphi(x,t)$ и $\psi(x,t)$ равен нулю*, т.е. *эти две функции линейно зависимы*.

Таким образом, для каждого $t > 0$ существует такое не зависящее от x число $\alpha = \alpha(t)$, что $\psi(x,t) = \alpha(t)U(t)\psi(x,0)$.

По переменной t величина $\alpha(t)$ должна быть непрерывной в силу непрерывности $\psi(x,t)$ и $\varphi(x,t)$. Найдем $\alpha(t)$ из условия нормировки собственных функций:

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,t)|^2\,dx = \alpha^2(t)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |U(t)\psi(x,0)|^2\,dx.$$

Последний интеграл в силу унитарности оператора $U(t)$ будет равен единице:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |U(t)\psi(x,0)|^2\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,0)|^2\,dx = 1.$$

Таким образом, для отыскания непрерывной функции $\alpha(t)$ имеем уравнение $\alpha^2(t) = 1$. Отсюда заключаем, что на всей полуоси $t \geqslant 0$ функция $\alpha(t)$ тождественно постоянна и равна либо $+1$, либо -1. Следовательно, при $t \geqslant 0$ имеет место равенство

$$\psi(x,t) = \pm U(t)\psi(x,0).$$

Дифференцируя его по t и пользуясь соотношением $U_t = AU$, справедливым в силу определения A, получаем

$$\psi_t(x,t) = \pm U_t(t)\psi(x,0) = \pm AU(t)\psi(x,0) = A\psi(x,t).$$

Таким образом, равенство (4) действительно имеет место. $\square$

Следствие 1. *Пусть быстроубывающий потенциал $u(x,t)$ решает уравнение (КдФ), а собственная функция $\psi(x,t)$ оператора $L(t) = = \frac{d^2}{dx^2} - u(x,t)$ соответствует собственному* *числу* $\lambda_m(t) = \lambda_m(0) = -\varkappa_m^2$. *Тогда непрерывная функция* $c_m(t)$, *определяемая предельным соотношением*

$$c_m(t) = \lim_{x\to+\infty} \psi(x,t)e^{\varkappa_m x},$$

изменяется во времени по формуле $c_m(t) = c_m(0)e^{4\varkappa_m^3 t}$.

Доказательство. Рассмотрим кососимметричный оператор

$$A = -4\frac{d^3}{dx^3} + 6u\frac{d}{dx} + 3\frac{\partial u}{\partial x},$$

где $u = u(x,t)$ — быстроубывающий потенциал, удовлетворяющий уравнению (КдФ). Как было установлено выше, операторы $L(t)$ и A образуют пару Лакса.

В соответствии с леммой об уравнении для собственных функций имеем $\psi_t = A\psi$, или

$$\psi_t(x,t) = -4\psi_{xxx}(x,t)+6u(x,t)\psi_x(x,t) + 3u_x(x,t)\psi(x,t). \qquad (7)$$

По условию имеем уравнение $\psi_{xx} + (\lambda_m - u(x,t))\psi = 0$. Дифференцируя его по x, имеем

$$\psi_{xxx} = -\lambda_m\psi_x + u_x\psi + u\psi_x.$$

Подставляя это равенство в (7), получаем

$$\psi_t = 4\lambda_m\psi_x + 2u(x,t)\psi_x - u_x(x,t)\psi. \qquad (8)$$

Домножая обе части этого равенства на $e^{\varkappa_m x}$ и учитывая, что $\lambda_m = -\varkappa_m^2$ от t не зависит, получаем

$$\left(e^{\varkappa_m x}\psi\right)_t = -4\varkappa_m^2 e^{\varkappa_m x}\psi_x+2u(x,t)e^{\varkappa_m x}\psi_x - u_x(x,t)e^{\varkappa_m x}\psi.$$

Перейдем здесь к пределу при $x \to +\infty$, воспользовавшись при этом быстрым убыванием функций $u(x,t)$ и $u_x(x,t)$, а также известными асимптотическими соотношениями

$$e^{\varkappa_m x}\psi(x,t) \sim c_m(t), \quad e^{\varkappa_m x}\psi_x(x,t) \sim -\varkappa_m c_m(t).$$

В результате получим $\dot{c}_m(t) = 4\varkappa_m^3 c_m(t)$, имея тем самым искомую формулу для изменения $c_m(t)$ во времени. $\square$

Лекция 13.

ТЕМА: Метод обратной задачи для уравнения КдФ: обоснование. **3**^{0}. Зависимость от времени данных рассеяния в случае быстроубывающего потенциала. **4**^{0}. Функции Йоста. **5**^{0}. Матрица рассеяния, связь ее элементов с коэффициентами отражения и прохождения. **6**^{0}. Связь между собственными числами оператора и матрицей рассеяния.

3^0. Установим явную зависимость от времени коэффициентов прохождения и отражения из данных рассеяния.

Теорема. *Если быстроубывающий потенциал $u(x,t)$ представляет собой решение уравнения (КдФ), то зависимость от времени коэффициентов прохождения и отражения для оператора Шредингера $\frac{d^2}{dx^2} - u(x,t)$ задается следующим образом*

$$b(k,t) = b(k,0)e^{i8k^3t}, \quad a(k,t) = a(k,0). \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $\psi(x,t)$ — произвольное ограниченное на всей оси x решение уравнения

$$\Big(\frac{d^2}{dx^2} - u(x,t)\Big)\psi(x,t) = -k^2\psi(x,t).$$

В силу быстрого убывания потенциала $u(x,t)$ функция $\psi(x,t)$ обязана иметь на бесконечности следующую асимптотику

$$\psi(x,t) \sim A(k,t)e^{-ikx} + B(k,t)e^{ikx} \text{ при } x \to +\infty.$$

Рассмотрим кососимметричный оператор

$$A = -4\frac{d^3}{dx^3} + 6u\frac{d}{dx} + 3\frac{\partial u}{\partial x},$$

где $u = u(x,t)$ — исходный быстроубывающий потенциал, удовлетворяющий уравнению (КдФ). Как было установлено выше, операторы $L(t)$ и A образуют пару Лакса.

В соответствии с леммой об уравнении для собственных функций имеем $\psi_t = A\psi$, или

$$\psi_t(x,t) = -4\psi_{xxx}(x,t) + 6u(x,t)\psi_x(x,t) + 3u_x(x,t)\psi(x,t).$$

По условию имеем уравнение $\psi_{xx} + (k^2 - u(x,t))\psi = 0$. Дифференцируя его по x, получаем

$$\psi_{xxx} = -k^2\psi_x + u_x\psi + u\psi_x.$$

Подставляя это равенство в предыдущее, получаем

$$\psi_t = 4k^2\psi_x + 2u(x,t)\psi_x - u_x(x,t)\psi.$$

Таким образом, имеет место следующее соотношение

$$\psi_t = 4k^2\psi_x + 2u(x,t)\psi_x - u_x(x,t)\psi. \tag{2}$$

Пользуясь ограниченностью $\psi(x,t)$ и $\psi_x(x,t)$ в окрестности бесконечности, а также быстрым убыванием функций $u(x,t)$ и $u_x(x,t)$, получаем из (2):

$$\lim_{x\to+\infty}\big(\psi_t(x,t) - 4k^2\psi_x(x,t)\big) = 0. \tag{3}$$

Учитывая, что при $x \to +\infty$ справедливы асимптотики

$$\psi_t(x,t) \sim \dot{A}(k,t)e^{-ikx} + \dot{B}(k,t)e^{ikx},$$

$$\psi_x(x,t) \sim -ikA(k,t)e^{-ikx} + ikB(k,t)e^{ikx},$$

получаем из (3) равенство:

$$\lim_{x\to+\infty}\Big([\dot{A}(k,t) + i4k^3A(k,t)]e^{-ikx} + [\dot{B}(k,t) - i4k^3B(k,t)]e^{ikx}\Big) = 0.$$

Это возможно лишь в том случае, если

$$\dot{A}(k,t) + i4k^3A(k,t) = 0, \quad \dot{B}(k,t) - i4k^3B(k,t) = 0.$$

Тем самым коэффициенты $A(k,t)$ и $B(k,t)$ в асимптотическом разложении решения $\psi(x,t)$ изменяются во времени согласно формулам

$$A(k,t) = A(k,0)e^{-i4k^3t},\ B(k,t) = B(k,0)e^{i4k^3t}.$$

Далее, при $x \to +\infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$\frac{1}{A(k,t)}\psi(x,t) \sim e^{-ikx} + \frac{B(k,t)}{A(k,t)}e^{ikx}.$$

Следовательно и в соответствии с определение коэффициента $b(k,t)$, справедливы соотношения

$$b(k,t) = \frac{B(k,t)}{A(k,t)} = \frac{B(k,0)}{A(k,0)}e^{i8k^3t} = b(k,0)e^{i8k^3t}.$$

Соотношение $a(k,t) = a(k,0)$ докажите самостоятельно. $\square$

4^0. Исследуем подробнее пространство решений уравнения

$$\Big(\frac{d^2}{dx^2} - u(x,t)\Big)\psi(x,t) = -k^2\psi(x,t) \tag{4}$$

при фиксированном t и вещественном ненулевом k.

Если потенциал $u(x,t)$ — финитная по x функция, то любое решение уравнения (4) при $x > R$ и $x < -R$, где R — достаточно большое конечное число, представляет собой линейную комбинацию экспонент e^{ikx} и e^{-ikx}.

Естественно предположить, что для быстроубывающего потенциала $u(x,t)$ существует фундаментальная система решений уравнения (4), состоящая из двух функций, ведущих себя при $x \to \pm\infty$ как e^{-ikx} и e^{ikx} соответственно. Точнее, имеет место следующая теорема.

Теорема. *Уравнение* (4) *имеет два решения* $y_1(x,k)$ *и* $y_2(x,k)$, *аналитически продолжимые в полуплоскость* $\operatorname{Im} k \geqslant 0$ *и имеющие следующие асимптотики*

$$y_1(x,k) = e^{ikx}\Big(1 + \frac{o(1)}{1+|k|}\Big) \quad \textit{при} \quad x \to +\infty, \tag{5}$$

$$y_2(x,k) = e^{-ikx}\Big(1 + \frac{o(1)}{1+|k|}\Big) \quad \textit{при} \quad x \to -\infty. \tag{5'}$$

Величины $o(1)$ *в равенствах* (5)–(5') *представляют собой функции от* x, *стремящиеся к нулю при* $x \to +\infty$ *либо при* $x \to -\infty$.

Решения $y_1(x,k)$ и $y_2(x,k)$, существование которых гарантируется предыдущей теоремой, называются *функциями Йоста*.

Для заданного быстроубывающего потенциала $u(x,t)$ прямую задачу рассеяния особенно удобно решать, пользуясь разложениями по функциям Йоста. Исследуем эти функции подробнее.

Теорема (треугольное представление). *Функции Йоста* $y_1(x,k)$ *и* $y_2(x,k)$ *представимы в виде*

$$y_1(x,k) = e^{+ikx} + \int\limits_x^{+\infty} K_1(x,s)e^{+iks}\,ds, \tag{6}$$

$$y_2(x,k) = e^{-ikx} + \int\limits_{-\infty}^{x} K_2(x,s)e^{-iks}\,ds. \tag{6'}$$

Здесь $K_1(x,s)$ *и* $K_2(x,s)$ — *непрерывные функции, удовлетворяющие условиям*

$$\int\limits_x^{+\infty} |K_1(x,s)|^2\,ds < +\infty, \qquad \int\limits_{-\infty}^{x} |K_2(x,s)|^2\,ds < +\infty.$$

Кроме того выполняются следующие предельные соотношения

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty}|K_1(x,s)|^2\,ds = \lim_{x\to-\infty}\int_{-\infty}^{x}|K_2(x,s)|^2\,ds = 0. \tag{7}$$

Формулы (6)–(6') называют *треугольным представлением* функций Йоста. Ядро $K_1(x,s)$ в (6) удобно доопределить нулем при $s<x$, а ядро $K_2(x,s)$ в (6') — нулем при $s>x$. Подчеркнем еще, что *ядра $K_j(x,s)$ никак не зависят от переменной k*.

Из (7) следуют, в частности, предельные соотношения

$$\lim_{z\to+\infty} K_1(x,x+z) = \lim_{z\to+\infty} K_2(x,x-z) = 0.$$

Треугольные представления функций Йоста выводятся с помощью функции Грина краевой задачи на всей числовой оси для уравнения (4).

5^0. Пусть k — ненулевое вещественное число, а $y_1(x,k)$ и $y_2(x,k)$ — функции Йоста уравнения

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}-u(x,t)\right)\psi(x,t) = -k^2\psi(x,t).$$

В качестве фундаментальной системы решений этого уравнения годятся следующие две пары функций

$$\{y_1(x,-k),y_1(x,k)\} \quad \text{и} \quad \{y_2(x,-k),y_2(x,k)\}.$$

Взяв решение $y_2(x,k)$ уравнения, разложим его по системе $\{y_1(x,-k),y_1(x,k)\}$:

$$y_2(x,k) = \alpha(k)y_1(x,-k)+\beta(k)y_1(x,k). \tag{8}$$

Пользуясь соотношениями $y_1(x,-k)=\overline{y_1}(x,k)$, $y_2(x,-k)=\overline{y_2}(x,k)$, получаем из (8):

$$y_2(x,-k) = \overline{\beta}(k)y_1(x,-k)+\overline{\alpha}(k)y_1(x,k). \tag{8'}$$

Из коэффициентов разложений (8)–(8') составим *матрицу рассеяния*

$$C = C(k) = \begin{pmatrix} \alpha(k) & \beta(k) \\ \overline{\beta}(k) & \overline{\alpha}(k) \end{pmatrix}.$$

Лемма. *Элементы матрицы рассеяния связаны с данными рассеяния следующими равенствами:*

$$b(k,t) = \frac{\beta(k)}{\alpha(k)}, \quad a(k,t) = \frac{1}{\alpha(k)}. \tag{9}$$

Доказательство. Рассмотрим решение $\psi(x,t)$ уравнения (4), имеющее следующие асимптотики

$$\psi(x,t) \sim e^{-ikx} + b(k,t)e^{ikx} \text{ при } x \to +\infty, \tag{10}$$

$$\psi(x,t) \sim a(k,t)e^{-ikx} \quad \text{при} \quad x \to -\infty. \tag{11}$$

Из (10) заключаем, что по базису $\{y_1(x,-k), y_1(x,k)\}$ функция $\psi(x,t)$ разлагается следующим образом

$$\psi(x,t) = y_1(x,-k) + b(k,t)y_1(x,k). \tag{12}$$

Из (11) в свою очередь заключаем, что по фундаментальной системе $\{y_2(x,k), y_2(x,-k)\}$ разложение $\psi(x,t)$ таково

$$\psi(x,t) = a(k,t)y_2(x,k). \tag{13}$$

Подставляя в равенство (13) разложение (8), получаем

$$\psi(x,t) = a(k,t)\alpha(k)y_1(x,-k) + a(k,t)\beta(k)y_1(x,k).$$

Сравнивая это разложение с формулой (12), приходим к равенствам

$$a(k,t)\alpha(k) = 1, \quad a(k,t)\beta(k) = b(k,t).$$

Эти равенства эквивалентны (9). □

Лемма. *Коэффициенты* $\alpha(k)$ *и* $\beta(k)$ *матрицы рассеяния связаны между собой соотношением*

$$|\alpha(k)|^2 - |\beta(k)|^2 = 1. \tag{14}$$

Доказательство. Введем вектор-функции

$$Y_1(x,k) = \begin{pmatrix} y_1(x,-k) \\ y_1(x,k) \end{pmatrix}, \quad Y_2(x,k) = \begin{pmatrix} y_2(x,k) \\ y_2(x,-k) \end{pmatrix}.$$

По определению матрица рассеяния переводит вектор $Y_1(x,k)$ в $Y_2(x,k)$:

$$Y_2(x,k) = C(k)Y_1(x,k). \tag{15}$$

Вычислим определитель матрицы $C(k)$.

Дифференцируя по x обе части (15), находим

$$Y_2'(x,k) = C(k)Y_1'(x,k). \tag{16}$$

Введем в рассмотрение две квадратные матрицы

$$Y_+(x,k) = (Y_1(x,k), Y_1'(x,k)),$$

$$Y_-(x,k) = (Y_2(x,k), Y_2'(x,k)).$$

Соотношения (15)–(16) объединим в одно матричное равенство

$$Y_-(x,k) = C(k)Y_+(x,k).$$

Приравнивая определители матриц слева и справа, находим

$$\det Y_-(x,k) = \det C(k) \cdot \det Y_+(x,k). \tag{17}$$

Определитель $\det Y_+(x,k)$ — это определитель Вронского фундаментальной системы решений $\{y_1(x,-k), y_1(x,k)\}$. Его несложно сосчитать, воспользовавшись асимптотиками

$$y_1(x,k) \sim e^{ikx}, \quad y_1(x,-k) \sim e^{-ikx} \text{ при } x \to +\infty.$$

Имеем отсюда: $\det Y_+(x,k) = i2k$. Аналогично, $\det Y_-(x,k)$ — это определитель Вронского фундаментальной системы решений $\{y_2(x,k), y_2(x,-k)\}$. Пользуясь асимптотиками

$$y_2(x,k) \sim e^{-ikx}, \quad y_2(x,-k) \sim e^{ikx} \text{ при } x \to -\infty,$$

получаем равенство $\det Y_-(x,k) = i2k$. Подставляя последние два равенства в (17), получаем

$$\det C(k) = |\alpha(k)|^2 - |\beta(k)|^2 = 1,$$

т.е. требуемое соотношение. □

Из (14) и установленной ранее связи между коэффициентами матрицы рассеяния и данными рассеяния получаем

$$|\alpha(k)|^2 - |\beta(k)|^2 = \frac{1}{|a(k,t)|^2}\big(1 - |b(k,t)|^2\big) = 1.$$

Следовательно, *данные рассеяния в любой момент времени связаны между собой соотношением*

$$|a(k,t)|^2 + |b(k,t)|^2 = 1. \tag{18}$$

Пусть k — ненулевое вещественное число, а $y_1(x,k)$ и $y_2(x,k)$ — функции Йоста уравнения

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - u(x,t)\right)\psi(x,t) = -k^2\psi(x,t).$$

По коэффициентам разложений (8)–(8') восстановим *матрицу рассеяния*

$$C = C(k) = \begin{pmatrix} \alpha(k) & \beta(k) \\ \overline{\beta}(k) & \overline{\alpha}(k) \end{pmatrix}.$$

Ее коэффициенты $\alpha(k)$ и $\beta(k)$ связаны между собой соотношением $|\alpha(k)|^2 - |\beta(k)|^2 = 1$. Пользуясь им, найдем обратную к $C(k)$ матрицу:

$$C^{-1} = C^{-1}(k) = \begin{pmatrix} \overline{\alpha}(k) & -\beta(k) \\ -\overline{\beta}(k) & \alpha(k) \end{pmatrix}.$$

Тем самым обратные к (8)–(8') соотношения записываются в виде

$$\begin{aligned} y_1(x,-k) &= \overline{\alpha}(k) y_2(x,k) - \beta(k) y_2(x,-k), \\ y_1(x,k) &= -\overline{\beta}(k) y_2(x,k) + \alpha(k) y_2(x,k). \end{aligned} \tag{19}$$

Обозначим определитель Вронского системы $\{y_2(x,k), y_1(x,k)\}$ через $W_k(y_2,y_1)$, т.е. положим

$$W_k(y_2,y_1) = y_1'(x,k)y_2(x,k) - y_1(x,k)y_2'(x,k).$$

Пользуясь (8)–(8'), несложно подсчитать, что

$$y_1'(x,k)y_2(x,k) - y_1(x,k)y_2'(x,k) =$$

$$\alpha(k)[y_1'(x,k)y_1(x,-k) - y_1(x,k)y_1'(x,-k)].$$

Определитель Вронского $y_1'(x,k)y_1(x,-k) - y_1(x,k)y_1'(x,-k)$ в правой части последнего равенства равен $-i2k$, как это вытекает из имеющихся асимптотик

$$y_1(x,k) \sim e^{ikx}, \quad y_1(x,-k) \sim e^{-ikx} \text{ при } x \to +\infty.$$

Таким образом, для коэффициента $\alpha(k)$ матрицы рассеяния получаем представление

$$\alpha(k) = -\frac{1}{i2k} W_k(y_2,y_1). \tag{20}$$

Из этой формулы и теоремы существования функций Йоста заключаем, что *функция* $\alpha(k)$ *аналитически продолжима в полуплоскость* $\operatorname{Im} k \geqslant 0$.

Продолженная аналитически *функция* $\alpha(k)$ *имеет в верхней полуплоскости* $\operatorname{Im} k > 0$ *лишь конечное число нулей*. Докажем это.

Пусть функция $\alpha(k)$ имеет при $\operatorname{Im} k > 0$ бесконечное число нулей. Тогда из (20) следует, что определитель $W_k(y_2, y_1)$ также имеет при $\operatorname{Im} k > 0$ бесконечное число нулей. Но тогда по известной теореме единственности для аналитических функций этот определитель обязан быть тождественно нулевым всюду при $\operatorname{Im} k \geqslant 0$, и в том числе при вещественных k. Однако определитель Вронского $W_k(y_2, y_1)$ может обращаться в нуль лишь при условии, что соответствующие ему функции $y_2(x, k)$, $y_1(x, k)$ линейно зависимы, что противоречит выбору системы $\{y_2(x, k), y_1(x, k)\}$.

6^0. Собственные числа оператора Шредингера с быстроубывающим потенциалом $u(x, t)$ можно найти отыскав в верхней комплексной полуплоскости $\operatorname{Im} k > 0$ всевозможные нули функции $\alpha(k)$, задающей первый элемент соответствующей потенциалу матрицы рассеяния. Отметим, что в полуплоскости $\operatorname{Im} k \geqslant 0$ функция $\alpha(k)$ непрерывна, все же ее нули в области $\operatorname{Im} k > 0$ — простые. Множество нулей функции $\alpha(k)$ может оказаться и пустым.

Лемма. *Отрицательное число* $-\varkappa_j^2$ *будет собственным для соответствующего оператора Шредингера тогда и только тогда когда чисто мнимое число* $k_j = i\varkappa_j$, *где* $\varkappa_j > 0$, *является нулем функции* $\alpha(k)$, *задающей первый элемент соответству-*

ющей потенциалу матрицы рассеяния.

Доказательство. Пусть $\alpha(i\varkappa_j) = 0$, где $\varkappa_j > 0$. Полагая $k_j = i\varkappa_j$, рассмотрим уравнение

$$\Big(\frac{d^2}{dx^2} - u(x,t)\Big)\psi(x,t) = -k_j^2\psi(x,t) = \varkappa_j^2\psi(x,t).$$

Его нетривиальные решения задают функции Йоста $y_1(x,k_j)$ и $y_2(x,k_j)$. Как уже доказано, соответствующий им определитель Вронского

$$W_{k_j}(y_2,y_1) = y_1'(x,k_j)y_2(x,k_j) - y_1(x,k_j)y_2'(x,k_j)$$

связан с функцией $\alpha(k_j)$ соотношением

$$\alpha(k_j) = -\frac{1}{i2k_j}W_{k_j}(y_2(x,k_j), y_1(x,k_j)).$$

По условию $\alpha(k_j) = \alpha(i\varkappa_j) = 0$, т.е. определитель Вронского $W_{k_j}(y_2,y_1)$ равен нулю. Это означает, что решения $y_1(x,k_j)$ и $y_2(x,k_j)$ линейно зависимы. Иными словами, найдется такая ненулевая константа γ, что

$$y_1(x,k_j) = \gamma y_2(x,k_j) \quad \text{при} \quad -\infty < x < +\infty.$$

Благодаря этому соотношению можно утверждать, что функция Йоста $y_1(x,k_j)$ принадлежит пространству L_2 на всей числовой оси. В самом деле, из справедливого по определению функции $y_1(x,k_j)$ асимптотического равенства

$$y_1(x,k_j) \sim e^{ik_jx} = e^{-\varkappa_jx} \quad \text{при} \quad x \to +\infty$$

следует существование такой конечной константы C, что

$$\int\limits_0^{+\infty} |y_1(x,k_j)|^2\,dx \leqslant C\int\limits_0^{+\infty} e^{-2\varkappa_jx}\,dx = C\frac{1}{2\varkappa_j} < +\infty.$$

Далее из асимптотического равенства

$$y_1(x,k_j) = \gamma y_2(x,k_j) \sim \gamma e^{\varkappa_j x} \quad \text{при} \quad x \to -\infty$$

следует существование такой конечной константы C, что

$$\int\limits_{-\infty}^{0} |y_1(x,k_j)|^2\, dx \leqslant C \int\limits_{-\infty}^{0} e^{2\varkappa_j x}\, dx = C\frac{1}{2\varkappa_j} < +\infty.$$

Складывая полученные неравенства, получаем в итоге

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |y_1(x,k_j)|^2\, dx \leqslant \frac{C}{\varkappa_j} < +\infty.$$

Это и означает, что функция Йоста $y_1(x,k_j)$ принадлежит пространству L_2 на всей числовой оси. Именно эту функцию мы и возьмем в качестве принадлежащего пространству L_2 нетривиального решения $\psi(x,t)$ уравнения

$$\Big(\frac{d^2}{dx^2} - u(x,t)\Big)\psi(x,t) = \varkappa_j^2\psi(x,t).$$

Наличие такого решения подтверждает, в соответствии с определением, что $-\varkappa_j^2$ действительно является собственным числом для рассматриваемого оператора Шредингера.

Докажем обратное утверждение: *Пусть $-\varkappa_j^2$ представляет собой собственное число оператора Шредингера, т.е. уравнение*

$$\Big(\frac{d^2}{dx^2} - u(x,t)\Big)\psi(x,t) = \varkappa_j^2\psi(x,t)$$

имеет нетривиальное решение $\psi(x,t)$ из пространства L_2. Установим в этих условиях, что чисто мнимое число $k_j = i\varkappa_j$, где $\varkappa_j > 0$, *является нулем функции $\alpha(k)$.*

Нетривиальное решение $\psi(x,t)$ уравнения разложим по базису пространства решений, образованному функциями $y_1(x,k_j)$ и $y_1(x,-k_j)$:

$$\psi(x,t) = C_1 y_1(x,k_j) + C_2 y_1(x,-k_j).$$

Перейдем здесь к пределу при $x \to +\infty$. Из принадлежности функции $\psi(x,t)$ пространству L_2 следует, что $\psi(x,t) \to 0$ при $x \to +\infty$. Из пары асимптотических равенств

$$y_1(x,k_j) \sim e^{ik_j x} = e^{-\varkappa_j x} \quad \text{при} \quad x \to +\infty,$$

$$y_1(x,-k_j) \sim e^{-ik_j x} = e^{\varkappa_j x} \quad \text{при} \quad x \to +\infty,$$

с учетом оценки $\varkappa_j > 0$, получаем еще два предельных равенства:

$$y_1(x,k_j) \to 0, \quad y_1(x,-k_j) \to +\infty \quad \text{при } x \to +\infty.$$

Таким образом, коэффициент C_2 в соотношении

$$\psi(x,t) = C_1 y_1(x,k_j) + C_2 y_1(x,-k_j)$$

обязан равняться нулю и поэтому имеет место равенство

$$\psi(x,t) = C_1 y_1(x,k_j).$$

Коэффициент C_1 здесь ненулевой. Асимптотические равенства

$$y_2(x,k_j) \sim e^{\varkappa_j x} \quad \text{при} \quad x \to -\infty,$$

$$y_2(x,-k_j) \sim e^{-\varkappa_j x} \quad \text{при} \quad x \to -\infty,$$

и переход в разложении $\psi(x,t) = D_1 y_2(x,k_j) + D_2 y_2(x,-k_j)$ к пределу при $x \to -\infty$ дают нам соотношение $D_2 = 0$ и равенство $\psi(x,t) = D_1 y_2(x,k_j)$. Коэффициент D_1 здесь ненулевой.

Таким образом, имеет место равенство

$$C_1 y_1(x,k_j) - D_1 y_2(x,k_j) = 0, \quad C_1 \neq 0,\ D_1 \neq 0.$$

Иными словами, решения $y_1(x,k_j)$ и $y_2(x,k_j)$ линейно зависимы. Тем самым соответствующий им определитель Вронского

$$W_{k_j}(y_2,y_1) = y_1'(x,k_j)y_2(x,k_j) - y_1(x,k_j)y_2'(x,k_j)$$

тождественно равен нулю. С функцией $\alpha(k_j)$ этот определитель связан соотношением

$$\alpha(k_j) = -\frac{1}{i2k_j}W_{k_j}(y_2(x,k_j),y_1(x,k_j)).$$

Следовательно, $\alpha(k_j) = \alpha(i\varkappa_j) = 0$. $\square$

Лекция 14.

ТЕМА: Метод обратной задачи для уравнения КдФ: обоснование. **7**^{0}. Связь между потенциалом и ядром в треугольном представлении первой функции Йоста. **8**^{0}. Связь ядра в треугольном представлении первой функции Йоста с данными рассеяния.

7^0. Установим *связь между потенциалом и ядром в треугольном представлении* первой функции Йоста.

Пусть k — ненулевое вещественное число. Переобозначим функцию Йоста $y_1(x,k)$ через $\Psi(x,k)$, а $y_2(x,k)$ — через $\Phi(x,k)$, избавившись тем самым от нижних индексов.

Согласно теореме о треугольном представлении имеем равенство

$$\Psi(x,k) = e^{ikx} + \int_x^{+\infty} K(x,s)e^{iks}\,ds, \tag{1}$$

где $K(x,s)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условиям

$$K(x,x+z) \to 0 \quad \text{при} \quad z \to +\infty. \tag{2}$$

Пользуясь (1), получаем

$$\Psi''(x,k) - u(x,t)\Psi(x,k) = -\frac{d}{dx}\Big[K(x,x)e^{ikx} - \int_x^{+\infty}\frac{\partial K}{\partial x}(x,s)e^{iks}ds\Big]$$

$$-ue^{ikx} - u\int_x^{+\infty}K(x,s)e^{iks}ds + (ik)^2e^{ikx}. \tag{3}$$

Мы использовали здесь обычную формулу дифференцирования интеграла по параметру. Переменную t здесь и далее считаем фиксированной. Из (1) следует также, что

$$-k^2\Psi(x,k) = -k^2e^{ikx} - k^2\int\limits_x^{+\infty} K(x,s)e^{iks}\,ds. \tag{4}$$

Преобразуем интеграл в правой части этого равенства. Имеем

$$-k^2\int\limits_x^{+\infty} K(x,s)e^{iks}ds = \int\limits_x^{+\infty} K(x,s)\frac{\partial^2}{\partial s^2}[e^{iks}]ds.$$

Далее, дважды применяя к интегралу справа формулу интегрирования по частям и пользуясь (2), получаем

$$-k^2\int\limits_x^{+\infty} K(x,s)e^{iks}\,ds = -K(x,x)ike^{ikx} +$$

$$+\frac{\partial K}{\partial y}(x,x)e^{ikx} + \int\limits_x^{+\infty}\frac{\partial^2}{\partial s^2}[K(x,s)]e^{iks}ds. \tag{5}$$

Из соотношений (4) и (5) получаем

$$-k^2\Psi(x,k) = -k^2e^{ikx} - K(x,x)ike^{ikx} +$$

$$+\frac{\partial K}{\partial y}(x,x)e^{ikx} + \int\limits_x^{+\infty}\frac{\partial^2}{\partial s^2}[K(x,s)]e^{iks}ds.$$

В уравнении $\Psi''(x,k) - u(x,t)\Psi(x,k) = -k^2\Psi(x,k)$ выражение слева заменим на (3). Тогда получим

$$(ik)^2e^{ikx} - \frac{d}{dx}\Big[K(x,x)e^{ikx} - \int\limits_x^{+\infty}\frac{\partial K}{\partial x}(x,y)e^{iky}\,dy\Big] -$$

$$ue^{ikx} - u\int_x^{+\infty} K(x,y)e^{iky}dy = -k^2e^{ikx} - K(x,x)ike^{ikx} +$$

$$+\frac{\partial K}{\partial y}(x,x)e^{ikx} + \int_x^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial y^2}[K(x,y)]e^{iky}\,dy.$$

Перегруппировав здесь слагаемые и учитывая, что

$$\frac{d}{dx}[K(x,x)] = \frac{\partial K}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial K}{\partial y}(x,x),$$

получим в итоге соотношение

$$\int_x^{+\infty} \Big[\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 K}{\partial y^2}(x,y) - u(x,t)K(x,y)\Big]e^{iky}dy$$

$$= \Big\{u(x,t) + 2\frac{d}{dx}[K(x,x)]\Big\}e^{ikx}. \tag{6}$$

Равенство (6) должно выполняться для всех вещественных k, что возможно лишь в том случае, если выражение в фигурных скобках в правой его части тождественно нулевое, т.е. если имеет место равенство

$$u(x,t) = -2\frac{d}{dx}[K(x,x)]. \tag{7}$$

Учитывая (7), перепишем (6) в виде

$$\int_x^{+\infty} \Big[\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 K}{\partial y^2}(x,y) - u(x,t)K(x,y)\Big]e^{iky}dy = 0.$$

Это равенство также должно выполняться для всех вещественных k, что возможно лишь при обращении в нуль выражения в квадратных скобках под интегралом:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} - u(x,t)K(x,y) = 0. \tag{8}$$

Соотношения (7) и (8) — искомые, они *связывают потенциал $u(x,t)$ оператора Шредингера и ядро $K(x,y)$ треугольного представления соответствующей функции Йоста $\Psi(x,k)$.*

Если потенциал $u(x,t)$ известен, то ядро $K(x,y)$ треугольного представления можно найти, решив уравнение (8) с данными (7) и (2). Это — *задача Гурса* для функции $K(x,y)$.

8^0. Установим *связь между данными рассеяния и ядром в треугольном представлении* первой функции Йоста.

Вторая функция Йоста $\Phi(x,k)$, как установлено выше, представима следующей линейной комбинацией

$$\Phi(x,k) = \alpha(k)\overline{\Psi}(x,k) + \beta(k)\Psi(x,k).$$

Разделив обе части этого равенства на $\alpha(k)$ и воспользовавшись выражением

$$b(k,t) = \frac{\beta(k)}{\alpha(k)}$$

функции $b(k,t)$ из данных рассеяния, получим

$$\frac{\Phi(x,k)}{\alpha(k)} - e^{-ikx} = \overline{\Psi}(x,k) - e^{-ikx} + b(k,t)\Psi(x,k).$$

Умножив обе части этого равенства на e^{iky}, проинтегрируем результат по всем вещественным k. Тогда получим

$$I(x,y) \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(\frac{\Phi(x,k)}{\alpha(k)} - e^{-ikx}\Big) e^{iky} dk$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big(\overline{\Psi}(x,k) - e^{-ikx} + b(k,t)\Psi(x,k)\big) e^{iky}\, dk.$$

Подставив в правую часть треугольное представление (1), придем к соотношению

$$I(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big[\int\limits_{x}^{+\infty} K(x,s)e^{-iks}ds + b(k,t)e^{ikx} + b(k,t)\int\limits_{x}^{+\infty} K(x,s)e^{iks}ds\Big] e^{iky}\, dk.$$

Разделив обе части этого равенства на 2π и полагая

$$B_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} b(k,t)e^{ikx}\, dk,$$

получим

$$\frac{1}{2\pi} I(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\big[\int\limits_{x}^{+\infty} K(x,s)e^{ik(y-s)}ds\big]\, dk +$$

$$B_0(x+y) + \int\limits_{x}^{+\infty} K(x,s)B_0(s+y)\, ds. \qquad (9)$$

В теории обобщенных функций известно равенство

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\, dk,$$

где через $\delta(x)$ обозначена дельта функция Дирака.

Пользуясь им, преобразуем двойной интеграл в правой части равенства (9):

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big[\int\limits_{x}^{+\infty}K(x,s)e^{ik(y-s)}ds\Big]\,dk =$$

$$= \int\limits_{x}^{+\infty}K(x,s)\Big[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{ik(y-s)}dk\Big]\,ds = \int\limits_{x}^{+\infty}K(x,s)\delta(y-s)\,ds = K(x,y).$$

Таким образом, равенство (9) эквивалентно следующему

$$K(x,y) + B_0(x+y) + \int\limits_{x}^{+\infty}K(x,s)B_0(s+y)\,ds = J(x,y), \qquad (9')$$

где через $J(x,y)$ обозначено выражение

$$J(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big[\frac{\Phi(x,k)}{\alpha(k)} - e^{-ikx}\Big]e^{iky}\,dk. \qquad (10)$$

Лемма. *Пусть функция $\alpha(k)$ не имеет нулей в полуплоскости $Im\,k > 0$. Тогда интеграл $J(x,y)$ равен нулю при $y > x$.*

Доказательство. Интеграл $J(x,y)$ сосчитаем с помощью теории вычетов. Под интегралом в (10) стоит аналитическая функция, которая при $|k| \to +\infty$ и $\mathrm{Im}\,k > 0$ экспоненциально убывает.

По определению несобственного интеграла имеем

$$J(x,y) = \lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-R}^{+R}\Big[\frac{\Phi(x,k)}{\alpha(k)} - e^{-ikx}\Big]e^{iky}dk. \qquad (11)$$

Обозначим через C_R границу полукруга

$$\{k = \tau + i\varkappa \mid \varkappa > 0, \varkappa^2 + \tau^2 \leqslant R^2\}.$$

Из (11) при $|k| \to +\infty$ и $\operatorname{Im} k > 0$, пользуясь экспоненциальным убыванием подынтегральной функции, получаем

$$J(x,y) = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{C_R} \Big[\frac{\Phi(x,k)}{\alpha(k)} - e^{-ikx}\Big] e^{iky} dk. \qquad (11')$$

Интегрирование здесь происходит по границе C_R против часовой стрелки.

По теореме Коши интеграл по комплексной переменной в правой части (11') равен нулю: интегрирование ведется по замкнутому контуру в комплексной плоскости, а функция под интегралом — аналитическая внутри этого контура. □

Отметим, что случай когда функция $\alpha(k)$ не имеет нулей в верхней полуплоскости, соответствует пустому дискретному спектру оператора Шредингера.

Подставляя равенство $J(x,y) = 0$ в (9'), получаем итоговое интегральное уравнение для ядра $K(x,y)$:

$$K(x,y) + B_0(x+y) + \int\limits_x^{+\infty} K(x,s) B_0(s+y)\, ds = 0.$$

Как уже отмечалось, это — *уравнение Гельфанда—Левитана—Марченко*. По известным данным рассеяния находится решение этого уравнения — ядро $K(x,y)$ треугольного представления, что в свою очередь позволяет вычислить потенциал $u(x,t)$.

Предположим теперь, что $\alpha(k)$ *имеет в верхней полуплоскости* $\operatorname{Im} k > 0$ *конечное число* N *простых нулей*. Пусть эти нули имеют вид $i\varkappa_j$, $j = 1, 2, \ldots, N$, $\varkappa_j > 0$. В этом случае задаваемый равенством (10) интеграл не равен нулю и его можно вычислить по формуле

$$J(x, y) = i \sum_{j=1}^{N} \frac{\Phi(x, i\varkappa_j)}{\alpha'(i\varkappa_j)} e^{-\varkappa_j y}. \tag{12}$$

При этом имеют место равенства

$$\Phi(x, i\varkappa_j) = c_j' \Psi(x, i\varkappa_j), \quad j = 1, 2, \ldots, N.$$

Подставляя равенство (12) в (9'), видим, что и в этом случае ядро $K(x, y)$ является решением интегрального уравнения вида

$$K(x, y) + B(x + y) + \int_x^{+\infty} B(y + z) K(x, z)\, dz = 0,$$

в котором ядро $B(x)$ задается равенством

$$B(x) = B_0(x) - \sum_{j=1}^{N} \frac{ic_j'}{\alpha'(i\varkappa_j)} e^{-\varkappa_j x}.$$

Учитывая, что $\alpha(i\varkappa) = \overline{\alpha}(i\varkappa)$, заключаем, что величина $\alpha'(i\varkappa)$ при $\varkappa > 0$ чисто мнимая. Поэтому коэффициент $M_j = \frac{ic_j'}{\alpha'(i\varkappa_j)}$ в представлении ядра $K(x, y)$ является вещественным. Более того *каждый коэффициент M_j строго положителен* (докажите это в качестве упражнения).

ТЕМА: Солитонные решения уравнения КдФ. $\mathbf{1}^0$. Прямая задача рассеяния для неположительного бесконечно дифференцируемого потенциала в качестве начальных данных. Зависимость данных рассеяния от времени.

$\mathbf{1}^0$. Рассмотрим теперь задачу Коши для уравнения (КдФ) со специальными начальными данными

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad u(x,0) = -\frac{2}{\alpha^2 \operatorname{ch}^2 \alpha x},$$

где $\alpha > 0$, и решим ее методом обратной задачи. Функция

$$u_0(x) = -\frac{2}{\alpha^2 \operatorname{ch}^2 \alpha x},$$

задающая начальные данные, на всей числовой оси неположительна, бесконечно дифференцируема и является быстроубывающей.

Рассмотрим на вещественной оси x соответствующее потенциалу $u_0(x)$ стационарное уравнение Шредингера

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\lambda - u_0(x))\,\psi = 0.$$

Полагая здесь $\lambda = k^2$, где $\operatorname{Im} k > 0$, получаем

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(k^2 + \frac{2}{\alpha^2 \operatorname{ch}^2 \alpha x}\right)\psi = 0. \tag{1}$$

Замена независимой переменной $\xi = \operatorname{th}(\alpha x)$ преобразует уравнение (1) к виду

$$\frac{d}{d\xi}\left((1-\xi^2)\frac{d\widetilde{\psi}}{d\xi}\right) + [s(s+1) - \frac{\varepsilon^2}{1-\xi^2}]\widetilde{\psi} = 0, \tag{2}$$

где $\widetilde{\psi}(\xi) = \widetilde{\psi}(\operatorname{th}\alpha x) = \psi(x)$, а через ε и s обозначены следующие постоянные

$$\varepsilon = -i\frac{k}{\alpha}, \quad s = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{\alpha^2+8}}{2\alpha}. \tag{2'}$$

Для указанной постоянной s имеем, очевидно: $s(s+1) = \frac{2}{\alpha^2}$.

В *уравнении обобщенных функций Лежандра* (2) ξ изменяется в промежутке

$$-1 < \xi < +1,$$

что соответствует интервалу $-\infty < x < +\infty$.

Сделав в (2) комбинированную замену переменных

$$\widetilde{\psi}(\xi) = (1-\xi^2)^{\varepsilon/2} w(u), \quad u = \frac{1-\xi}{2}, \tag{3}$$

приходим к следующему уравнению

$$u(u-1)w'' + [(\alpha_*+\beta+1)u - \gamma]w' + \alpha_*\beta w = 0. \tag{4}$$

Переменная u здесь изменяется в промежутке $0 < u < 1$, а числовые параметры в коэффициентах определяются равенствами

$$\alpha_* = \varepsilon - s, \quad \beta = \varepsilon + s + 1, \quad \gamma = \varepsilon + 1. \tag{4'}$$

Пусть параметр γ в (4) *не является целым отрицательным числом*. Тогда пространство ограниченных на $0 \leqslant u \leqslant 1$ решений уравнения (4) одномерно. Базис в этом пространстве состоит из единственного нетривиального решения. В качестве такового годится следующая функция

$$F(\alpha_*, \beta, \gamma; u) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\alpha_*)_j(\beta)_j}{(\gamma)_j} u^j. \tag{5}$$

Через $(\cdot)_k$ здесь обозначено произведение, известное как *символ Похгаммера*:

$$\begin{gathered}
(\alpha_*)_j = \alpha_*(\alpha_*+1)\ldots(\alpha_*+j-1), \\
(\beta)_j = \beta(\beta+1)\ldots(\beta+j-1), \\
(\gamma)_j = \gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+j-1).
\end{gathered}$$

Функция $F(\alpha_*, \beta, \gamma; u)$ называется *гипергеометрической* и в соответствии со своим определением (5) является аналитической в круге $|u| < 1$. В частности,

$$F(\alpha_*, \beta, \gamma; u) \to 1 \quad \text{при} \quad u \to 0.$$

Взяв в (3) вместо w функцию $F(\alpha_*, \beta, \gamma; \frac{1-\xi}{2})$, запишем получающееся выражение в переменных x, k. В результате получим функцию

$$y_1(x, k) = 2^{-\varepsilon}(1 - \xi^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} F(\alpha_*, \beta, \gamma; \frac{1-\xi}{2}), \tag{6}$$

где $\xi = \operatorname{th} \alpha x$. Зависимость от x в правой части (6) осуществляется через переменную $\xi = \operatorname{th} \alpha x$, а зависимость от k — через параметры ε, α_*, β и γ, задаваемые равенствами (2') и (4').

Функция $y_1(x, k)$ по построению представляет собой решение уравнения (1). Найдем его асимптотику при $x \to +\infty$ в предположении вещественности k. При $\alpha > 0$ и $\xi = \operatorname{th} \alpha x$ имеем, очевидно:

$$\frac{1}{2}(1 - \xi^2)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha x}{\operatorname{ch}^2 \alpha x}\right)^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2 \operatorname{ch} \alpha x} = \frac{1}{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}} \sim e^{-\alpha x} \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

Подставляя этот результат в (6) и учитывая, что $\alpha\varepsilon = -ik$, получаем при $x \to +\infty$:

$$y_1(x, k) \sim e^{ikx} F(\alpha_*, \beta, \gamma; 0) = e^{ikx}.$$

Таким образом, *задаваемая равенством* (6) *функция* $y_1(x, k)$ *представляет собой первую функцию Йоста для уравнения* (1).

Вторая функция Йоста $y_2(x,k)$ для уравнения (1), как можно убедиться пользуясь известными свойствами гипергеометрической функции, имеет следующий вид

$$2^{-\varepsilon}(1-\xi^2)^{\frac{\xi}{2}}F(\alpha_*,\beta,\alpha_*+\beta+1-\gamma;\frac{1+\xi}{2}), \tag{7}$$

где, как и прежде, $\xi = \operatorname{th}\alpha x$.

Найдем коэффициенты разложения

$$y_1(x,k) = -\overline{\beta}(k)y_2(x,k) + \alpha(k)y_2(x,-k), \tag{8}$$

для чего воспользуемся известным свойством гипергеометрической функции:

$$F(\alpha_*,\beta,\gamma;u) = \\ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha_*-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha_*)\Gamma(\gamma-\beta)}F(\alpha_*,\beta,\alpha_*+\beta+1-\gamma;1-u)+ \\ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha_*+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha_*)\Gamma(\beta)}F(\gamma-\alpha_*,\gamma-\beta,\gamma+1-\alpha_*-\beta;1-u)(1-u)^{\gamma-\alpha_*-\beta}. \tag{9}$$

Здесь через $\Gamma(\cdot)$ обозначена известная *гамма функция Эйлера*, значения которой на положительной полуоси задаются равенством

$$\Gamma(a) = \int\limits_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}\,dx, \quad a>0.$$

Гамма функция Эйлера, как известно, допускает аналитическое продолжение во всю комплексную плоскость, *из которой удалены нуль и все отрицательные целые числа*.

Заметим, что при $x\to-\infty$ имеют место предельные соотношения

$$\xi = \xi(x) \to -1, \quad u = u(x) = \frac{1-\xi}{2} \to +1.$$

Пользуясь ими, а также равенством

$$1 - u = \frac{1+\xi}{2},$$

применим последовательно соотношения (6), (9) и (5). Тогда получим следующее справедливое при $x \to -\infty$ асимптотическое разложение

$$y_1(x,k) \sim e^{ikx} \frac{\Gamma(-\frac{ik}{\alpha})\Gamma(1-\frac{ik}{\alpha})}{\Gamma(-\frac{ik}{\alpha}-s)\Gamma(s+1-\frac{ik}{\alpha})} + e^{-ikx}\frac{\Gamma(\frac{ik}{\alpha})\Gamma(1-\frac{ik}{\alpha})}{\Gamma(-s)\Gamma(1+s)}. \quad (10)$$

Известно, что гамма функция Эйлера удовлетворяет соотношению

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

Пользуясь им, получаем

$$\frac{\Gamma(\frac{ik}{\alpha})\Gamma(1-\frac{ik}{\alpha})}{\Gamma(-s)\Gamma(1+s)} = \frac{\pi}{\sin\frac{i\pi k}{\alpha}} \cdot \frac{\sin(-\pi s)}{\pi} = -i\frac{\sin \pi s}{\operatorname{sh}\frac{\pi k}{\alpha}}.$$

Подставляя это равенство в (10), получаем при $x \to -\infty$:

$$y_1(x,k) \sim e^{ikx} \frac{\Gamma(-\frac{ik}{\alpha})\Gamma(1-\frac{ik}{\alpha})}{\Gamma(-\frac{ik}{\alpha}-s)\Gamma(-\frac{ik}{\alpha}+s+1)} - ie^{-ikx}\frac{\sin \pi s}{\operatorname{sh}\frac{\pi k}{\alpha}}. \quad (11)$$

Сравнивая (11) с (8), приходим к соотношениям $\overline{\beta}(k) = i\frac{\sin \pi s}{\operatorname{sh}\frac{\pi k}{\alpha}}$,

$$\alpha(k) = \frac{\Gamma(-\frac{ik}{\alpha})\Gamma(1-\frac{ik}{\alpha})}{\Gamma(-\frac{ik}{\alpha}-s)\Gamma(-\frac{ik}{\alpha}+s+1)}. \quad (12)$$

Таким образом, на потенциале $u_0(x) = -\frac{2}{\alpha^2 \operatorname{ch}^2 \alpha x}$ матрица рассеяния C имеет вид

$$C(k) = \begin{pmatrix} \alpha(k) & -i\frac{\sin \pi s}{\operatorname{sh}\frac{\pi k}{\alpha}} \\ i\frac{\sin \pi s}{\operatorname{sh}\frac{\pi k}{\alpha}} & \overline{\alpha}(k) \end{pmatrix},$$

где $\alpha(k)$ задается равенством (1). Через элементы $\beta(k)$ и $\alpha(k)$ матрицы C данные рассеяния на потенциале $u_0(x)$ определяются по формулам

$$b(k,0)=\frac{\beta(k)}{\alpha(k)}, \quad a(k,0)=\frac{1}{\alpha(k)}. \tag{13}$$

Пример. При $\alpha = 1$ из формул (2') получаем $s=-2$ или $s=1$ и, следовательно, в этом случае $\sin \pi s = 0$. Далее в соответствии с равенствами (1)–(2) при любом вещественном k имеем

$$\beta(k)=0 \quad \Rightarrow \quad b(k,0)=0.$$

Потенциалы с таким свойством называют *безотражательными*. Таким образом, потенциал $-2/\operatorname{ch}^2 x$ *безотражательный*.

Найдем дискретный спектр оператора

$$L[\psi]=\frac{d^2\psi}{dx^2}-u_0(x)\psi=\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2}{\alpha^2\operatorname{ch}^2\alpha x}\,\psi.$$

Все *его собственные числа отрицательны*, т.е. вида $\lambda=-\varkappa^2$, где $\varkappa>0$. Число $k=i\varkappa$ обязано при этом быть корнем функции $\alpha(k)$, т.е. $\alpha(i\varkappa)=0$. Это равенство возможно лишь в случае, если $\Gamma(\frac{\varkappa}{\alpha}-s)=+\infty$, т.е. при условии, что *число* $\frac{\varkappa}{\alpha}-s$ *является неположительным целым*.

Пример. При $\alpha=1$ из (2') получаем: $s=-2$ или $s=1$. Следовательно, в этом случае

$$\frac{\varkappa}{\alpha}-s=\varkappa+2 \quad \text{или} \quad \frac{\varkappa}{\alpha}-s=\varkappa-1.$$

При $\varkappa>0$ число $\varkappa+2$ положительно. Система же неравенств $\varkappa>0$, $\varkappa-1\leqslant 0$ в целых числах имеет единственное решение $\varkappa_1=1$, т.е. в рассматриваемом случае дискретный спектр оператора L состоит из единственного собственного числа $\lambda_1=-1$.

Этому числу соответствует единственное нетривиальное решение $\psi_1(x)$ уравнения

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2}{\operatorname{ch}^2 x}\,\psi = -\lambda_1\psi,$$

принадлежащее классу L_2 и удовлетворяющее нормировочному условию

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^2(x)\,dx = 1.$$

При $x \to +\infty$ для этого решения справедливо асимптотическое соотношение

$$\psi_1(x) \sim \sqrt{2}e^{-x} \equiv c_1(0)e^{-\varkappa_1 x}.$$

Следствие. *Потенциалу $u_0(x) = -2/\operatorname{ch}^2 x$ соответствуют следующие данные рассеяния*

$$\varkappa_1 = 1,\;\; c_1(0) = \sqrt{2},\;\; b(k,0) = 0,\;\; a(k,0) = 1.$$

Отметим, что получить эти данные рассеяния в явном виде удалось лишь благодаря найденным явным выражениям функций Йоста одномерного оператора Шредингера с указанным потенциалом.

В соответствии с установленной ранее зависимостью данных рассеяния от времени имеем теперь при всех $t > 0$:

$$\varkappa_1(t) = \varkappa_1(0) = 1, \quad c_1(t) = c_1(0)e^{4\varkappa_1^3 t} = \sqrt{2}e^{4t},$$

$$b(k,t) = b(k,0)e^{i8k^3 t} = 0, \quad a(k,t) = a(k,0) = 1.$$

Лекция 15.

ТЕМА: Солитонные решения уравнения КдФ. **1**^{0}. Задача Коши для уравнения (КдФ) с неположительным бесконечно дифференцируемым потенциалом в качестве начальных данных. Решение соответствующей прямой задачи рассеяния, зависимость данных рассеяния от времени. **2**^{0}. Построение и решение интегрального уравнения Гельфанда—Левитана—Марченко для предыдущей задачи Коши. **3**^{0}. Определение солитона. Качественный характер взаимодействия двух солитонов. **4**^{0}. Общий вид решения уравнения КдФ типа безотражательного потенциала. Определение N-солитонного решения уравнения КдФ.

1^0. Продолжим рассмотрение задачи Коши для уравнения (КдФ) со специальными начальными данными:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad u(x,0) = -\frac{2}{\alpha^2 \operatorname{ch}^2 \alpha x},$$

где $\alpha > 0$. Завершим ее решение *методом обратной задачи*. Как уже было установлено, матрица рассеяния C на потенциале

$$u_0(x) = -\frac{2}{\alpha^2 \operatorname{ch}^2 \alpha x}$$

имеет следующий вид

$$C(k) = \begin{pmatrix} \alpha(k) & \beta(k) \\ \overline{\beta}(k) & \overline{\alpha}(k) \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты $\alpha(k)$ и $\beta(k)$ задаются равенствами

$$\alpha(k) = \frac{\Gamma(-\frac{ik}{\alpha})\Gamma(1-\frac{ik}{\alpha})}{\Gamma(-\frac{ik}{\alpha}-s)\Gamma(-\frac{ik}{\alpha}+s+1)}, \quad \overline{\beta}(k) = i\frac{\sin \pi s}{\operatorname{sh}\frac{\pi k}{\alpha}}. \tag{1}$$

Через элементы $\beta(k)$ и $\alpha(k)$ матрицы рассеяния C данные рассеяния на потенциале $u_0(x)$ определяются по формулам

$$b(k,0) = \frac{\beta(k)}{\alpha(k)}, \quad a(k,0) = \frac{1}{\alpha(k)}. \tag{2}$$

Пример. При $\alpha = 1$ из формулы

$$s = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{\alpha^2 + 8}}{2\alpha}$$

получаем $s = -2$ или $s = 1$. Следовательно, в этом случае $\sin \pi s = 0$. Далее в соответствии с равенствами (1)–(2) при любом *вещественном* k имеем

$$\beta(k) = 0 \quad \Rightarrow \quad b(k, 0) = 0.$$

Потенциалы с таким свойством называют *безотражательными*. Таким образом, потенциал $-2/\operatorname{ch}^2 x$ *безотражательный*.

Найдем дискретный спектр оператора

$$L[\psi] = \frac{d^2\psi}{dx^2} - u_0(x)\psi = \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2}{\alpha^2 \operatorname{ch}^2 \alpha x}\,\psi.$$

Все *его собственные числа отрицательны*, т.е. имеют вид $\lambda = -\varkappa^2$, где $\varkappa > 0$. Число $k = i\varkappa$ обязано при этом быть корнем функции $\alpha(k)$:

$$\alpha(i\varkappa) = \frac{\Gamma(\frac{\varkappa}{\alpha})\Gamma(1 + \frac{\varkappa}{\alpha})}{\Gamma(\frac{\varkappa}{\alpha} - s)\Gamma(\frac{\varkappa}{\alpha} + s + 1)} = 0.$$

Это равенство возможно лишь в случае, если $\Gamma(\frac{\varkappa}{\alpha} - s) = +\infty$, т.е. при условии, что *число* $\frac{\varkappa}{\alpha} - s$ *является неположительным целым*.

Пример. При $\alpha = 1$ получаем: $s = -2$ или $s = 1$. Следовательно, в этом случае

$$\frac{\varkappa}{\alpha} - s = \varkappa + 2 \quad \text{или} \quad \frac{\varkappa}{\alpha} - s = \varkappa - 1.$$

При $\varkappa > 0$ число $\varkappa + 2$ положительно. Система же неравенств $\varkappa > 0$, $\varkappa - 1 \leqslant 0$ в целых числах имеет единственное решение

$\varkappa_1 = 1$, т.е. в рассматриваемом случае дискретный спектр оператора L состоит из единственного собственного числа $\lambda_1 = -1$. Этому числу соответствует единственное нетривиальное решение $\psi_1(x)$ уравнения

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2}{\operatorname{ch}^2 x}\,\psi = -\lambda_1\psi,$$

принадлежащее классу L_2 и удовлетворяющее нормировочному условию

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^2(x)\,dx = 1.$$

При $x \to +\infty$ для этого решения справедливо асимптотическое соотношение

$$\psi_1(x) \sim \sqrt{2}e^{-x} \equiv c_1(0)e^{-\varkappa_1 x}.$$

Следствие. *Потенциалу* $u_0(x) = -2/\operatorname{ch}^2 x$ *соответствуют следующие данные рассеяния*

$$\varkappa_1 = 1,\ \ c_1(0) = \sqrt{2},\ \ b(k,0) = 0,\ \ a(k,0) = 1.$$

Отметим, что получить эти данные рассеяния в явном виде удалось лишь благодаря найденным явным выражениям функций Йоста одномерного оператора Шредингера с указанным потенциалом.

В соответствии с установленной ранее зависимостью данных рассеяния от времени имеем теперь при всех $t > 0$:

$$\varkappa_1(t) = \varkappa_1(0) = 1, \quad c_1(t) = c_1(0)e^{4\varkappa_1^3 t} = \sqrt{2}e^{4t},$$

$$b(k,t) = b(k,0)e^{i8k^3t} = 0, \quad a(k,t) = a(k,0) = 1.$$

2^0. По найденным данным рассеяния построим интегральное уравнение Гельфанда—Левитана—Марченко:

$$K(x,y,t)+B(x+y,t)+\int_x^{+\infty} B(y+z,t)K(x,z,t)\,dz = 0. \qquad (\mathbf{GLM})$$

Ядро $B(x,t)$ интегрального оператора в этом уравнении определяется равенством

$$B(x,t) = c_1^2(t)e^{-\varkappa_1(t)x} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} b(k,t)e^{ikx}\,dk,$$

т.е. $B(x,t) = 2e^{8t-x}$. Таким образом, в рассматриваемом случае уравнение (**GLM**) принимает вид

$$K(x,y,t)+2e^{8t-x-y}+2e^{8t-y}\int_x^{+\infty} K(x,z,t)e^{-z}dz = 0. \qquad (3)$$

Сделаем в этом интегральном уравнении замену

$$K(x,y,t) = c_1(t)\varphi_1(x,t)e^{-\varkappa_1 y} = \sqrt{2}e^{4t-y}\varphi_1(x,t).$$

Подставив это равенство в (3) и сократив результат на множитель $\sqrt{2}e^{-y}$, получим уравнение

$$e^{4t}\varphi_1(x,t) + \sqrt{2}e^{8t-x} + 2e^{12t}\varphi_1(x,t)\int_x^{+\infty} e^{-2z}\,dz = 0.$$

Таким образом, имеем

$$\varphi_1(x,t) = -\frac{\sqrt{2}e^{8t-x}}{e^{4t}(1+e^{8t-2x})};$$

решение же интегрального уравнения представимо в виде

$$K(x,y,t)=\sqrt{2}e^{4t-y}\varphi_1(x,t)=-\frac{2e^{x-y}}{1+e^{2x-8t}}.$$

Пусть потенциал $u(x,t)$ является решением задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0,\quad u(x,0)=-\frac{2}{\operatorname{ch}^2 x}. \tag{4}$$

Тогда по формуле, связывающей потенциал с ядром в треугольном представлении, находим:

$$u(x,t)=-2\frac{d}{dx}[K(x,x;t)]=4\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{1+e^{2x-8t}}\right].$$

Вычисляя производную, имеем

$$u(x,t)=-\frac{8e^{2x-8t}}{(1+e^{2x-8t})^2}=-\frac{2}{\operatorname{ch}^2(x-4t)}. \tag{5}$$

Это и есть искомая окончательная формула для решения рассматриваемой задачи Коши.

3^0. Уравнение КдФ имеет решение, задаваемое следующей формулой

$$u(x,t;\alpha,x_0)=-\frac{\alpha^2}{2\operatorname{ch}^2[\frac{\alpha}{2}(x-x_0)-\frac{\alpha^3 t}{2}]}, \tag{S}$$

где x_0 — произвольный вещественный параметр и $\alpha>0$. При $x_0=0$ и $\alpha=2$ функция (**S**) совпадает с решением (5) уравнения КдФ.

Равенство (**S**) определяет волну, распространяющуюся вдоль оси x с сохранением первоначальной формы и со скоростью α^2. Амплитуда этой волны равна $\alpha^2/2$.

Определение. *Волна неизменной во времени формы, решающая уравнение КдФ и распространяющаяся вдоль числовой оси со скоростью, прямо пропорциональной амплитуде колебаний, называется солитоном.*

Особый интерес к решениям вида (**S**) объясняется помимо всего прочего характером их взаимодействия друг с другом. Опишем этот процесс качественно на примере двух солитонов. Пусть имеется две функции

$$u(x,t;\alpha_j,x_{0j}),\quad j=1,2,$$

вида (**S**) с параметрами $\alpha=\alpha_j$ и $x_0=x_{0j}$ соответственно, причем

$$\alpha_1>\alpha_2 \quad \text{и} \quad x_{02}-x_{01}\gg 1.$$

Рассмотрим следующую задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0,$$

$$u(x,0)=u(x,0;\alpha_1,x_{01})+u(x,0;\alpha_2,x_{02}),$$

и исследуем поведение ее решения при больших значениях t.

При $t=0$ волны $u(x,0;\alpha_1,x_{01})$ и $u(x,0;\alpha_2,x_{02})$ взаимодействуют очень слабо: их сумма в окрестности каждой из точек x_{0j} почти совпадает с соответствующим слагаемым.

Более того при малых значениях t волны $u(x,t;\alpha_1,x_{01})$ и $u(x,t;\alpha_2,x_{02})$ распространяются вдоль числовой оси практически независимо друг от друга.

Со временем солитон $u(x,t;\alpha_1,x_{01})$, имеющий скорость распространения $\alpha_1^2>\alpha_2^2$, догоняет солитон $u(x,t;\alpha_2,x_{02})$ и происходит какое-то их нелинейное взаимодействие. Затем, опять же с увеличением времени t, волны $u(x,t;\alpha_1,x_{01})$ и $u(x,t;\alpha_2,x_{02})$ расходятся, не изменив при этом своей первоначальной формы, причем $u(x,t;\alpha_1,x_{01})$ оказывается впереди $u(x,t;\alpha_2,x_{02})$ при всех последующих t. В дальнейшем рассматриваемые две волны все более удаляются друг от друга и практически перестают взаимодействовать.

Аппарат, позволяющий количественно охарактеризовать весь процесс, связан с понятием N-солитонных решений уравнения КдФ.

4^0. Пусть функция $u(x,t)$ решает уравнение КдФ, являясь при этом безотражательным потенциалом,т.е. соответствующий $u(x,t)$ коэффициент отражения равен нулю: $b(k,t)=0$. Установим общий вид такого потенциала.

Как уже доказано, безотражательный потенциал $u(x,t)$ представим в виде

$$u(x,t) = -2\frac{\partial}{\partial x}\big\{K(x,x;t)\big\}, \tag{6}$$

где функция $K(x,y;t)$ является решением интегрального уравнения

$$K(x,y;t) + \sum_{m=1}^{N} c_m^2(t)e^{-\varkappa_m(x+y)} +$$
$$\sum_{m=1}^{N} c_m^2(t)e^{-\varkappa_m y}\int_x^{+\infty} e^{-\varkappa_m z}K(x,z;t)\,dz = 0. \tag{\textbf{GLM}}$$

Ненулевые коэффициенты $c_m(t)$ и константы $\varkappa_m$, $m=1,2,\ldots,N$, в уравнении (**GLM**) подчинены условиям

$$c_m(t) = c_m(0)e^{4\varkappa_m^3 t}, \quad \varkappa_1 > \cdots > \varkappa_N > 0. \tag{7}$$

Перед исследованием уравнения (**GLM**) на разрешимость введем матрицу $C = (c_{mn}(x;t))$ размеров $N \times N$ со следующими элементами

$$c_{mn}(x;t) = c_m(t)c_n(t)\frac{e^{-(\varkappa_m+\varkappa_n)x}}{\varkappa_m + \varkappa_n}.$$

Эта *матрица C симметрична*.

Кроме того для любого ненулевого вектора $u = (u_1, \dots, u_N)$ справедливы соотношения

$$(Cu, u) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} c_n u_n c_m u_m \frac{e^{-(\varkappa_m+\varkappa_n)x}}{\varkappa_m + \varkappa_n} =$$

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} c_n u_n c_m u_m \int\limits_x^{+\infty} e^{-(\varkappa_m+\varkappa_n)z}\,dz =$$

$$\int\limits_x^{+\infty}\left(\sum_{m=1}^{N} c_m u_m e^{-\varkappa_m z}\right)^2 dz > 0.$$

Следовательно, *матрица C положительно определена*, а ее жорданова форма совпадает с диагональной матрицей с положительными диагональными элементами — ее же собственными числами λ_j, $j = 1, \dots, N$.

Сумма $E + C$, где E — единичная матрица размеров $N \times N$, в качестве собственных чисел имеет суммы вида $1 + \lambda_j$, т.е. строго положительные величины. В частности, *определитель матрицы $E + C$* также *строго положителен*:

$$\Delta = \Delta(x;t) = \det\big(E + C(x,t)\big) > 0.$$

Более того этот определитель всегда больше единицы:

$$\Delta(x;t) = \prod_{j=1}^{N}(1+\lambda_j) > 1.$$

Используем функцию $\Delta(x;t)$ чтобы установить общий вид безотражательного потенциала.

Теорема. *Уравнение* (**GLM**) *при выполнении условий* (7) *имеет единственное решение* $K(x,y;t)$*, допускающее при* $x = y$ *следующее представление*

$$K(x,x;t) = \frac{\partial}{\partial x}\bigl\{\ln\,\Delta(x;t)\bigr\}. \tag{8}$$

Соответствующий ему безотражательный потенциал $u(x,t)$ *при этом имеет вид*

$$u(x,t) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bigl\{\ln\,\Delta(x;t)\bigr\}. \tag{9}$$

Доказательство. Будем искать решение интегрального уравнения (**GLM**) в виде

$$K(x,y;t) = -\sum_{m=1}^{N} c_m(t)\varphi_m(x,t)e^{-\varkappa_m y}. \tag{10}$$

Функции $\varphi_m(x,t)$ здесь — искомые.

Подставив разложение (10) в (**GLM**) и приравняв затем нулю коэффициенты при каждой из экспонент вида $e^{-\varkappa_m y}$, получим при $m = 1,\ldots,N$:

$$\varphi_m(x,t) + \sum_{n=1}^{N} c_m(t)c_n(t)\frac{e^{-(\varkappa_m+\varkappa_n)x}}{\varkappa_m+\varkappa_n}\varphi_n(x,t) = c_m(t)e^{-\varkappa_m x}. \tag{11}$$

Эти равенства представляют собой систему линейных уравнений относительно вектора неизвестных $(\varphi_1(x,t),\dots\varphi_N(x,t))$.

Матрица системы (11) совпадает с рассмотренной выше суммой $E+C$, а ее определитель $\Delta(x;t)$ нигде не равен нулю. Тем самым существует единственное решение системы (11). Найдем его по правилу Крамера.

Пусть Q_{mn} обозначает алгебраическое дополнение к элементу в m-й строке и n-м столбце матрицы $E+C$, т.е. алгебраическое дополнение к элементу

$$\delta_m^n + c_m(t)c_n(t)\frac{e^{-(\varkappa_m+\varkappa_n)x}}{\varkappa_m+\varkappa_n}$$

этой матрицы. Заменив в $E+C$ столбец с номером n вектором

$$\uparrow\left(c_1(t)e^{-\varkappa_1 x},\dots,c_N(t)e^{-\varkappa_N x}\right)$$

из правой части системы (11), сосчитаем затем определитель получившейся матрицы. Разложив его по столбцу с тем же самым номером n, получим в результате для решения системы (11) представление

$$\varphi_n(x,t)=\frac{1}{\Delta}\sum_{m=1}^{N}c_m(t)e^{-\varkappa_m x}Q_{mn}(x,t). \tag{12}$$

Таким образом, существование решения у уравнения (**GLM**) доказано.

Подставляя формулу (12) в разложение (10) и полагая $x=y$, приходим к соотношению

$$K(x,x;t)=-\sum_{m=1}^{N}c_m(t)\varphi_m(x,t)e^{-\varkappa_m x}=$$

$$-\frac{1}{\Delta}\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}c_n c_m e^{-(\varkappa_m+\varkappa_n)x}Q_{mn}(x,t). \tag{13}$$

Двойную сумму в правой части (13) запишем в эквивалентном виде.

С этой целью применим следующее правило: *производная от детерминанта $\Delta(x;t)$ размеров $N\times N$ равна сумме N определителей, каждый из которых получается заменой в $\Delta(x;t)$ столбца на его же (столбца) производную*. Пользуясь этим правилом и учитывая равенство

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\delta_m^n + c_m c_n\frac{e^{-(\varkappa_m+\varkappa_n)x}}{\varkappa_m+\varkappa_n}\right] = -c_m c_n e^{-(\varkappa_m+\varkappa_n)x},$$

получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}\Delta = -\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}c_n c_m e^{-(\varkappa_m+\varkappa_n)x}Q_{mn}(x,t).$$

Комбинируя это соотношение с (13), получаем

$$K(x,x;t) = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial x}\Delta(x;t) = \frac{\partial}{\partial x}\big\{\ln\Delta(x;t)\big\}.$$

Это и есть доказываемое равенство (8).

Подставляя (8) в (6), получаем и второе из доказываемых соотношений — равенство (9).

Установим теперь единственность решения интегрального уравнения (**GLM**). Предположим, что имеется два его решения — функции $K_1(x,y;t)$ и $K_2(x,y;t)$. Их разность — функция $K(x,y;t)$ является решением уравнения

$$K(x,y;t) + \sum_{m=1}^{N}c_m^2(t)e^{-\varkappa_m y}\int_x^{+\infty}e^{-\varkappa_m z}K(x,z;t)\,dz = 0.$$

Перепишем его в эквивалентном виде, введя обозначения

$$\varphi_m(x,t) = c_m(t)\int\limits_x^{+\infty} e^{-\varkappa_m z} K(x,z;t)dz, \quad m=1,\ldots,N.$$

Получим в результате $K(x,y;t) = -\sum\limits_{m=1}^{N} c_m(t)\varphi_m(x,t)e^{-\varkappa_m y}$. Подставляя это равенство в однородное интегральное уравнение для разности $K(x,y;t)$, получим для коэффициентов $\varphi_m(x,t)$ следующую систему линейных однородных уравнений:

$$\varphi_m(x,t) + \sum_{n=1}^{N} c_m c_n \frac{e^{-(\varkappa_m+\varkappa_n)x}}{\varkappa_m+\varkappa_n}\varphi_n(x,t) = 0, \quad m=1,\ldots,N.$$

Матрица $E+C$ этой системы, как уже доказано, невырождена. Следовательно, ее решение тождественно нулевое. Это означает, что рассматриваемые решения $K_1(x,y;t)$ и $K_2(x,y;t)$ друг с другом совпадают. □

Задача. *Выяснить, является ли функция*

$$u(x,t) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big\{\ln\,\Delta(x;t)\big\} \tag{14}$$

решением уравнения (КдФ) *для произвольного набора* $2N$ *ненулевых постоянных* $c_m(0)$ *и* $\varkappa_m$, $m=1,\ldots,N$, *удовлетворяющих* (7).

Преобразуем формулу (14) в случае $N=1$ и в предположении, что $c_1^2(0) = 2\varkappa_1 = \alpha$. Имеем при этом

$$\Delta(x;t) = 1 + c_1^2(t)\frac{e^{-2\varkappa_1 x}}{2\varkappa_1}.$$

Учитывая, что $c_1^2(t) = c_1^2(0)e^{8\varkappa_1^3 t} = 2\varkappa_1 e^{8\varkappa_1^3 t}$, получаем далее

$$\Delta(x;t) = 1 + e^{8\varkappa_1^3 t - 2\varkappa_1 x} = 1 + e^{\alpha^3 t - \alpha x}.$$

Следовательно, для производной от логарифма имеет место формула

$$\frac{\partial}{\partial x}\{\ln\,\Delta(x;t)\} = \frac{-\alpha}{1+e^{\alpha^3 t-\alpha x}}e^{\alpha^3 t-\alpha x} = (-\alpha)\left(1 - \frac{1}{1+e^{\alpha^3 t-\alpha x}}\right).$$

Далее имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{\ln\,\Delta(x;t)\} = \frac{\alpha^2}{(1+e^{\alpha^3 t-\alpha x})^2}e^{\alpha^3 t-\alpha x},$$

Подставив это равенство в (14), получим

$$u(x,t) = -\frac{2\alpha^2}{(1+e^{\alpha^3 t-\alpha x})^2}e^{\alpha^3 t-\alpha x},$$

или, что то же самое:

$$u(x,t) = -\frac{\alpha^2}{2\,\mathrm{ch}^2\left[\frac{\alpha}{2}x - \frac{\alpha^3 t}{2}\right]}. \tag{15}$$

Это равенство совпадает с (**S**) при $x_0 = 0$.

Определение. *Функции вида (14) называют N-солитонами.*

Вместо N-солитонов говорят также о *многосолитонных решениях* уравнения КдФ.

4^0. Пусть функция $u(x,t)$ решает уравнение КдФ, являясь при этом безотражательным потенциалом,т.е. соответствующий $u(x,t)$ коэффициент отражения равен нулю: $b(k,t) = 0$. Как уже доказано, общий вид такого потенциала задается формулой

$$u(x,t) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{\ln \Delta(x;t)\}, \tag{16}$$

где через $\Delta(x;t)$ обозначен определитель матрицы $E+C$, а элементы симметричной и положительно определенной матрицы

$$C = (c_{mn}(x;t))$$

размеров $N \times N$ определяются равенствами

$$c_{mn}(x;t) = c_m(t)c_n(t)\frac{e^{-(\varkappa_m+\varkappa_n)x}}{\varkappa_m+\varkappa_n}. \tag{17}$$

Здесь коэффициенты $c_m(t)$ и константы $\varkappa_m$, $m = 1, 2, \ldots, N$, ненулевые и подчинены условиям

$$c_m(t) = c_m(0)e^{4\varkappa_m^3 t} \neq 0, \;\; \varkappa_1 > \cdots > \varkappa_N > 0. \tag{18}$$

Определение. *Функция вида* (1) *называется N-солитонным решением уравнения КдФ.*

Вместо N-солитонов говорят также о *многосолитонных решениях* уравнения КдФ. Исследуем асимптотику такого рода решений при $t \to \pm\infty$. Теореме об асимптотике безотражательного потенциала предпошлем ряд определений, обозначений и лемм.

Определение. *Пусть числа a_i, b_i, $i = 1, \ldots, p$, положительны. Матрицу вида*

$$K_p(a,b) = \left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{i,j=1}^{p}$$

называют матрицей Коши, а ее определитель — детерминантом Коши.

Лемма. *Детерминант Коши равен*

$$\det K_p(a,b) = \frac{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant p}(a_i-a_j)(b_i-b_j)}{\prod\limits_{1\leqslant i,j\leqslant p}(a_i+b_j)}. \tag{19}$$

Лемма доказывается индукцией по p (проведите соответствующие рассуждения самостоятельно).

Из формулы (4) следует, в частности, что *если все числа* a_i, $i=1,\ldots,p$, *различны и при этом* $a_i=b_i$ *для всех* $i=1,\ldots,p$, *то определитель* $\det K_p(a,b)$ *строго положителен*.

В последующих наших выкладках будем оперировать матрицей Коши, соответствующей случаю $a=b=(\varkappa_1,\ldots,\varkappa_N)=\varkappa$, т.е. матрицей вида

$$\widehat{K}^{(p)} \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{\varkappa_1+\varkappa_1} & \cdots & \frac{1}{\varkappa_1+\varkappa_p} \\ \frac{1}{\varkappa_2+\varkappa_1} & \cdots & \frac{1}{\varkappa_2+\varkappa_p} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_1} & \cdots & \frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_p} \end{bmatrix}.$$

Кроме того нам понадобится матрица, получающаяся из $\widehat{K}^{(p)}$ заменой элементов ее последнего столбца на единицы:

$$L_p = \begin{bmatrix} \frac{1}{\varkappa_1+\varkappa_1} & \cdots & \frac{1}{\varkappa_1+\varkappa_{p-1}} & 1 \\ \frac{1}{\varkappa_2+\varkappa_1} & \cdots & \frac{1}{\varkappa_2+\varkappa_{p-1}} & 1 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_1} & \cdots & \frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_{p-1}} & 1 \end{bmatrix}.$$

Детерминанты матриц $\widehat{K}^{(p)}$ и L_p определенным образом связаны между собой.

Лемма. *Справедливы равенства*

$$\det \widehat{K}^{(p)} = \frac{\prod\limits_{m=1}^{p-1}(\varkappa_p - \varkappa_m)}{\prod\limits_{m=1}^{p}(\varkappa_p + \varkappa_m)} \det L_p, \tag{20}$$

$$\det L_p = \frac{\prod\limits_{m=1}^{p-1}(\varkappa_p - \varkappa_m)}{\prod\limits_{m=1}^{p}(\varkappa_p + \varkappa_m)} \det \widehat{K}^{(p-1)}. \tag{20'}$$

Доказательство. Получим равенство (5), проведя эквивалентные преобразования определителя Коши $\det \widehat{K}^{(p)}$.

Вычитая последний столбец $\det \widehat{K}^{(p)}$ из каждого предыдущего, а сам последний столбец оставляя неизменным, получим равный исходному определитель $\det \widehat{K}^{(p)}$ следующего вида

$$\det\begin{bmatrix} \frac{1}{\varkappa_1+\varkappa_1} - \frac{1}{\varkappa_1+\varkappa_p} & \cdots & (\frac{1}{\varkappa_1+\varkappa_{p-1}} - \frac{1}{\varkappa_1+\varkappa_p}) & \frac{1}{\varkappa_1+\varkappa_p} \\ \frac{1}{\varkappa_2+\varkappa_1} - \frac{1}{\varkappa_2+\varkappa_p} & \cdots & (\frac{1}{\varkappa_2+\varkappa_{p-1}} - \frac{1}{\varkappa_2+\varkappa_p}) & \frac{1}{\varkappa_2+\varkappa_p} \\ \vdots \qquad \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_1} - \frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_p} & \cdots & (\frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_{p-1}} - \frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_p}) & \frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_p} \end{bmatrix}.$$

Пользуясь равенством

$$\frac{1}{\varkappa_m + \varkappa_n} - \frac{1}{\varkappa_m + \varkappa_p} = \frac{\varkappa_p - \varkappa_n}{(\varkappa_m + \varkappa_n)(\varkappa_m + \varkappa_p)},$$

видим, что $\det \widehat{K}^{(p)}$ равен следующему выражению

$$\det\begin{bmatrix} \frac{\varkappa_p-\varkappa_1}{(\varkappa_1+\varkappa_1)(\varkappa_1+\varkappa_p)} & \cdots & \frac{\varkappa_p-\varkappa_{p-1}}{(\varkappa_1+\varkappa_{p-1})(\varkappa_1+\varkappa_p)} & \frac{1}{\varkappa_1+\varkappa_p} \\ \frac{\varkappa_p-\varkappa_1}{(\varkappa_2+\varkappa_1)(\varkappa_2+\varkappa_p)} & \cdots & \frac{\varkappa_p-\varkappa_{p-1}}{(\varkappa_2+\varkappa_{p-1})(\varkappa_2+\varkappa_p)} & \frac{1}{\varkappa_2+\varkappa_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\varkappa_p-\varkappa_1}{(\varkappa_p+\varkappa_1)(\varkappa_p+\varkappa_p)} & \cdots & \frac{\varkappa_p-\varkappa_{p-1}}{(\varkappa_p+\varkappa_{p-1})(\varkappa_p+\varkappa_p)} & \frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_p} \end{bmatrix}.$$

Вынося в полученном определителе общие сомножители сначала в строках, а затем — в столбцах, приходим к искомому равенству (5).

Равенство (5') получим, проведя эквивалентные преобразования определителя $\det L_p$.

Вычитая последнюю строку $\det L_p$ из каждой предыдущей, а саму последнюю строку оставляя неизменной, получим равный исходному $\det L_p$ определитель следующего вида

$$\det\begin{bmatrix} \frac{1}{\varkappa_1+\varkappa_1}-\frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_1} & \cdots & \frac{1}{\varkappa_1+\varkappa_{p-1}}-\frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_{p-1}} & 0 \\ \frac{1}{\varkappa_2+\varkappa_1}-\frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_1} & \cdots & \frac{1}{\varkappa_2+\varkappa_{p-1}}-\frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_{p-1}} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\varkappa_{p-1}+\varkappa_1}-\frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_1} & \cdots & \frac{1}{\varkappa_{p-1}+\varkappa_{p-1}}-\frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_{p-1}} & 0 \\ \frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_1} & \cdots & \frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_{p-1}} & 1 \end{bmatrix}.$$

Учитывая еще раз равенство

$$\frac{1}{\varkappa_m+\varkappa_n}-\frac{1}{\varkappa_m+\varkappa_p}=\frac{\varkappa_p-\varkappa_n}{(\varkappa_m+\varkappa_n)(\varkappa_m+\varkappa_p)},$$

получаем для $\det L_p$ следующее выражение

$$\det\begin{bmatrix} \frac{\varkappa_p-\varkappa_1}{(\varkappa_1+\varkappa_1)(\varkappa_p+\varkappa_1)} & \cdots & \frac{\varkappa_p-\varkappa_1}{(\varkappa_1+\varkappa_{p-1})(\varkappa_p+\varkappa_{p-1})} & 0 \\ \frac{\varkappa_p-\varkappa_2}{(\varkappa_2+\varkappa_1)(\varkappa_p+\varkappa_1)} & \cdots & \frac{\varkappa_p-\varkappa_2}{(\varkappa_2+\varkappa_{p-1})(\varkappa_p+\varkappa_{p-1})} & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\varkappa_p-\varkappa_{p-1}}{(\varkappa_{p-1}+\varkappa_1)(\varkappa_p+\varkappa_1)} & \cdots & \frac{\varkappa_p-\varkappa_{p-1}}{(\varkappa_p+\varkappa_{p-1})(\varkappa_p+\varkappa_{p-1})} & 0 \\ \frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_1} & \cdots & \frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_{p-1}} & 1 \end{bmatrix}.$$

Вынося в полученном определителе общие сомножители сначала в строках и столбцах, а затем раскладывая получившийся определитель по последнему столбцу, приходим к искомому равенству (5'). □

Лекция 16.

ТЕМА: Солитонные решения уравнения КдФ. **4**^{0}. Общий вид решения уравнения КдФ типа безотражательного потенциала. Определение N-солитонного решения уравнения КдФ. Асимптотика такого решения на бесконечности.

4^0. Пусть функция $u(x,t)$ решает уравнение КдФ, являясь при этом безотражательным потенциалом,т.е. соответствующий $u(x,t)$ коэффициент отражения равен нулю: $b(k,t)=0$. Как уже доказано, общий вид такого потенциала задается формулой

$$u(x,t) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big\{\ln\, \Delta(x;t)\big\}, \tag{1}$$

где через $\Delta(x;t)$ обозначен определитель матрицы $E+C$, а элементы симметричной и положительно определенной матрицы

$$C = (c_{mn}(x;t))$$

размеров $N \times N$ определяются равенствами

$$c_{mn}(x;t) = c_m(t)c_n(t)\frac{e^{-(\varkappa_m+\varkappa_n)x}}{\varkappa_m+\varkappa_n}. \tag{2}$$

Здесь коэффициенты $c_m(t)$ и константы $\varkappa_m$, $m=1,2,\ldots,N$, ненулевые и подчинены условиям

$$c_m(t) = c_m(0)e^{4\varkappa_m^3 t} \neq 0,\ \ \varkappa_1 > \cdots > \varkappa_N > 0. \tag{3}$$

Определение. *Функция вида* (1) *называется* N*-солитонным решением уравнения КдФ.*

Вместо N-солитонов говорят также о *многосолитонных решениях* уравнения КдФ. Исследуем асимптотику такого рода решений при $t \to \pm\infty$. Теореме об асимптотике безотражательного потенциала предпошлем ряд определений, обозначений и лемм.

Определение. *Пусть числа* a_i, b_i, $i = 1, \ldots, p$, *положительны. Матрицу вида*

$$K_p(a,b) = \left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{i,j=1}^{p}$$

называют матрицей Коши, а ее определитель — детерминантом Коши.

Лемма. *Детерминант Коши равен*

$$\det K_p(a,b) = \frac{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant p}(a_i - a_j)(b_i - b_j)}{\prod\limits_{1\leqslant i,j\leqslant p}(a_i + b_j)}. \tag{4}$$

Лемма доказывается индукцией по p (проведите соответствующие рассуждения самостоятельно).

Из формулы (4) следует, в частности, что *если все числа* a_i, $i = 1, \ldots, p$, *различны и при этом* $a_i = b_i$ *для всех* $i = 1, \ldots, p$, *то определитель* $\det K_p(a,b)$ *строго положителен*.

В последующих наших выкладках будем оперировать матрицей Коши, соответствующей случаю $a = b = (\varkappa_1, \ldots, \varkappa_N) = \varkappa$, т.е. матрицей вида

$$\widehat{K}^{(p)} \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{\varkappa_1+\varkappa_1} & \cdots & \frac{1}{\varkappa_1+\varkappa_p} \\ \frac{1}{\varkappa_2+\varkappa_1} & \cdots & \frac{1}{\varkappa_2+\varkappa_p} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_1} & \cdots & \frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_p} \end{bmatrix}.$$

Кроме того нам понадобится матрица, получающаяся из $\widehat{K}^{(p)}$

заменой элементов ее последнего столбца на единицы:

$$L_p = \begin{bmatrix} \frac{1}{\varkappa_1+\varkappa_1} & \cdots & \frac{1}{\varkappa_1+\varkappa_{p-1}} & 1 \\ \frac{1}{\varkappa_2+\varkappa_1} & \cdots & \frac{1}{\varkappa_2+\varkappa_{p-1}} & 1 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_1} & \cdots & \frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_{p-1}} & 1 \end{bmatrix}.$$

Детерминанты матриц $\widehat{K}^{(p)}$ и L_p определенным образом связаны между собой.

Лемма. *Справедливы равенства*

$$\det \widehat{K}^{(p)} = \frac{\prod\limits_{m=1}^{p-1} (\varkappa_p - \varkappa_m)}{\prod\limits_{m=1}^{p} (\varkappa_p + \varkappa_m)} \det L_p, \tag{5}$$

$$\det L_p = \frac{\prod\limits_{m=1}^{p-1} (\varkappa_p - \varkappa_m)}{\prod\limits_{m=1}^{p} (\varkappa_p + \varkappa_m)} \det \widehat{K}^{(p-1)}. \tag{5'}$$

Доказательство. Получим равенство (5), проведя эквивалентные преобразования определителя Коши $\det \widehat{K}^{(p)}$.

Вычитая последний столбец $\det \widehat{K}^{(p)}$ из каждого предыдущего, а сам последний столбец оставляя неизменным, получим равный исходному определитель $\det \widehat{K}^{(p)}$ следующего вида

$$\det \begin{bmatrix} \frac{1}{\varkappa_1+\varkappa_1} - \frac{1}{\varkappa_1+\varkappa_p} & \cdots & \left(\frac{1}{\varkappa_1+\varkappa_{p-1}} - \frac{1}{\varkappa_1+\varkappa_p}\right) & \frac{1}{\varkappa_1+\varkappa_p} \\ \frac{1}{\varkappa_2+\varkappa_1} - \frac{1}{\varkappa_2+\varkappa_p} & \cdots & \left(\frac{1}{\varkappa_2+\varkappa_{p-1}} - \frac{1}{\varkappa_2+\varkappa_p}\right) & \frac{1}{\varkappa_2+\varkappa_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_1} - \frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_p} & \cdots & \left(\frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_{p-1}} - \frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_p}\right) & \frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_p} \end{bmatrix}.$$

Пользуясь равенством

$$\frac{1}{\varkappa_m+\varkappa_n}-\frac{1}{\varkappa_m+\varkappa_p}=\frac{\varkappa_p-\varkappa_n}{(\varkappa_m+\varkappa_n)(\varkappa_m+\varkappa_p)},$$

видим, что $\det \widehat{K}^{(p)}$ равен следующему выражению

$$\det\begin{bmatrix} \frac{\varkappa_p-\varkappa_1}{(\varkappa_1+\varkappa_1)(\varkappa_1+\varkappa_p)} & \cdots & \frac{\varkappa_p-\varkappa_{p-1}}{(\varkappa_1+\varkappa_{p-1})(\varkappa_1+\varkappa_p)} & \frac{1}{\varkappa_1+\varkappa_p} \\ \frac{\varkappa_p-\varkappa_1}{(\varkappa_2+\varkappa_1)(\varkappa_2+\varkappa_p)} & \cdots & \frac{\varkappa_p-\varkappa_{p-1}}{(\varkappa_2+\varkappa_{p-1})(\varkappa_2+\varkappa_p)} & \frac{1}{\varkappa_2+\varkappa_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\varkappa_p-\varkappa_1}{(\varkappa_p+\varkappa_1)(\varkappa_p+\varkappa_p)} & \cdots & \frac{\varkappa_p-\varkappa_{p-1}}{(\varkappa_p+\varkappa_{p-1})(\varkappa_p+\varkappa_p)} & \frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_p} \end{bmatrix}.$$

Вынося в полученном определителе общие сомножители сначала в строках, а затем — в столбцах, приходим к искомому равенству (5).

Равенство (5') получим, проведя эквивалентные преобразования определителя $\det L_p$.

Вычитая последнюю строку $\det L_p$ из каждой предыдущей, а саму последнюю строку оставляя неизменной, получим равный исходному $\det L_p$ определитель следующего вида

$$\det\begin{bmatrix} \frac{1}{\varkappa_1+\varkappa_1}-\frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_1} & \cdots & \frac{1}{\varkappa_1+\varkappa_{p-1}}-\frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_{p-1}} & 0 \\ \frac{1}{\varkappa_2+\varkappa_1}-\frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_1} & \cdots & \frac{1}{\varkappa_2+\varkappa_{p-1}}-\frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_{p-1}} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\varkappa_{p-1}+\varkappa_1}-\frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_1} & \cdots & \frac{1}{\varkappa_{p-1}+\varkappa_{p-1}}-\frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_{p-1}} & 0 \\ \frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_1} & \cdots & \frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_{p-1}} & 1 \end{bmatrix}.$$

Учитывая еще раз равенство

$$\frac{1}{\varkappa_m+\varkappa_n}-\frac{1}{\varkappa_m+\varkappa_p}=\frac{\varkappa_p-\varkappa_n}{(\varkappa_m+\varkappa_n)(\varkappa_m+\varkappa_p)},$$

получаем для $\det L_p$ следующее выражение

$$\det\begin{bmatrix} \frac{\varkappa_p-\varkappa_1}{(\varkappa_1+\varkappa_1)(\varkappa_p+\varkappa_1)} & \cdots & \frac{\varkappa_p-\varkappa_1}{(\varkappa_1+\varkappa_{p-1})(\varkappa_p+\varkappa_{p-1})} & 0 \\ \frac{\varkappa_p-\varkappa_2}{(\varkappa_2+\varkappa_1)(\varkappa_p+\varkappa_1)} & \cdots & \frac{\varkappa_p-\varkappa_2}{(\varkappa_2+\varkappa_{p-1})(\varkappa_p+\varkappa_{p-1})} & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\varkappa_p-\varkappa_{p-1}}{(\varkappa_{p-1}+\varkappa_1)(\varkappa_p+\varkappa_1)} & \cdots & \frac{\varkappa_p-\varkappa_{p-1}}{(\varkappa_p+\varkappa_{p-1})(\varkappa_p+\varkappa_{p-1})} & 0 \\ \frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_1} & \cdots & \frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_{p-1}} & 1 \end{bmatrix}.$$

Вынося в полученном определителе общие сомножители сначала в строках и столбцах, а затем раскладывая получившийся определитель по последнему столбцу, приходим к искомому равенству (5'). $\square$

Следствие. *Из равенств* (5)–(5') *получаем*

$$\frac{\det \widehat{K}^{(p)}}{\det L_p} = \frac{\det L_p}{\det \widehat{K}^{(p-1)}} = \frac{\prod\limits_{m=1}^{p-1}(\varkappa_p - \varkappa_m)}{\prod\limits_{m=1}^{p}(\varkappa_p + \varkappa_m)}. \tag{6}$$

Вместе с данными $\{c_m(t), \varkappa_m\}$, $m = 1, \dots, N$, подчиненными условиям (3), рассмотрим еще два вектора

$$\xi^+ = (\xi_1^+, \dots, \xi_N^+) \quad \text{и} \quad \xi^- = (\xi_1^-, \dots, \xi_N^-)$$

с компонентами

$$\xi_m^+ = \frac{1}{2\varkappa_m} \ln\left[\frac{c_m^2(0)}{2\varkappa_m}\prod_{j=1}^{m-1}\left(\frac{\varkappa_j - \varkappa_m}{\varkappa_j + \varkappa_m}\right)^2\right] \tag{7}$$

и, соответственно,

$$\xi_m^- = \frac{1}{2\varkappa_m} \ln\left[\frac{c_m^2(0)}{2\varkappa_m}\prod_{j=m+1}^{N}\left(\frac{\varkappa_m - \varkappa_j}{\varkappa_m + \varkappa_j}\right)^2\right]. \tag{7'}$$

Кроме того на плоскости переменных (x,t) каждому из параметров $\varkappa_m$ поставим в соответствие полосу ширины $2C$, имеющую в качестве оси симметрии прямую $x - 4\varkappa_m^2 t = 0$:

$$\Pi_m(C) = \{(x,t) \mid |x - 4\varkappa_m^2 t| \leqslant C\}.$$

Теорема (асимптотика безотражательного потенциала)**.** *Если точка* (x,t)*, находясь в полосе* $\Pi_m(C)$*, стремится при* $t \to +\infty$ *к бесконечно удаленной точке, то разность между безотражательным потенциалом*

$$u(x,t) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{\ln \Delta(x;t)\}$$

и солитоном

$$u_m^+(x,t) = -\frac{2\varkappa_m}{\operatorname{ch}^2[\varkappa_m(x - 4\varkappa_m^2 t - \xi_m^+)]} \tag{8}$$

стремится к нулю.

Если же (x,t)*, находясь в полосе* $\Pi_m(C)$*, стремится к бесконечно удаленной точке при* $t \to -\infty$*, то к нулю стремится разность между потенциалом* $u(x,t)$ *и солитоном*

$$u_m^-(x,t) = -\frac{2\varkappa_m}{\operatorname{ch}^2[\varkappa_m(x - 4\varkappa_m^2 t - \xi_m^-)]}. \tag{8'}$$

Доказательство. Ядро интегрального уравнения (**GLM**), с помощью которого строится потенциал $u(x,t)$, имеет следующий вид

$$K(x,y;t) = -\sum_{m=1}^{N} c_m(t)\varphi_m(x,t)e^{-\varkappa_m y}. \tag{9}$$

Функции $\varphi_m(x,t)$ здесь удовлетворяют следующей системе уравнений

$$\varphi_m(x,t) + c_m(t)\sum_{n=1}^{N} c_n(t)\frac{e^{-(\varkappa_m+\varkappa_n)x}}{\varkappa_m+\varkappa_n}\varphi_n(x,t) = c_m(t)e^{-\varkappa_m x},$$

$$m = 1,\ldots,N.$$

Полагая $k_m(x,t) = c_m(t)\varphi_m(x,t)e^{-\varkappa_m x}$, запишем последнюю систему в этих новых переменных:

$$\frac{e^{2\varkappa_m x}}{c_m^2(t)}k_m(x,t) + \sum_{n=1}^{N}\frac{k_n(x,t)}{\varkappa_m+\varkappa_n} = 1, \quad m = 1,\ldots,N. \tag{10}$$

Дифференцируя эти равенства по x, получаем систему для $k_m'(x,t) = \partial k_m/\partial x$:

$$\frac{e^{2\varkappa_m x}}{c_m^2(t)}k_m'(x,t) + \sum_{n=1}^{N}\frac{k_n'(x,t)}{\varkappa_m+\varkappa_n} = -\frac{2\varkappa_m e^{2\varkappa_m x}}{c_m^2(t)}k_m(x,t), \tag{11}$$

$$m = 1,\ldots,N.$$

Как вытекает из (9), функция $K(x,y;t)$ выражается через коэффициенты $k_m(x,t)$ по следующей формуле

$$K(x,y;t) = -\sum_{m=1}^{N} e^{\varkappa_m x}k_m(x,t)e^{-\varkappa_m y}.$$

Следовательно, для потенциала $u(x,t)$ справедливо такое представление:

$$u(x,t) = -2\frac{\partial}{\partial x}K(x,x;t) = 2\sum_{n=1}^{N}k_n'(x,t). \tag{12}$$

Исследуем асимптотику $u(x,t)$ на бесконечности опираясь на представление (12), но прежде уточним, как именно точка (x,t) стремится к бесконечности при неограниченном возрастании t.

Зафиксируем номер p, $1 \leqslant p \leqslant N$, и предположим, что при всех $t > 0$ точки $x = x(t)$ лежат на прямой $x - 4\varkappa_p^2 t = \xi_*$, целиком содержащейся в полосе $\Pi_p(C)$, т.е. $|\xi_*| \leqslant C$. Ясно, что $x(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Введя обозначения

$$A_m(\xi_*) = \frac{e^{2\varkappa_m \xi_*}}{c_m^2(0)} \neq 0, \quad m = 1, \dots N,$$

воспользуемся тем, что $c_m^2(t) = c_m^2(0)e^{8\varkappa_m^3 t}$, а также соотношениями

$$e^{2\varkappa_m x - 8\varkappa_m^3 t} = e^{2\varkappa_m(x-4\varkappa_p^2 t)+8\varkappa_m(\varkappa_p^2-\varkappa_m^2)t} = e^{2\varkappa_m\xi_* - 8\varkappa_m(\varkappa_m^2-\varkappa_p^2)t}.$$

Тогда получим

$$\frac{e^{2\varkappa_m x}}{c_m^2(t)} = \frac{e^{2\varkappa_m x - 8\varkappa_m^3 t}}{c_m^2(0)} = A_m(\xi_*)e^{-8\varkappa_m(\varkappa_m^2-\varkappa_p^2)t}.$$

Подставив эти соотношения в (10)–(11), перепишем их в эквивалентном виде. Имеем сначала из (10):

$$A_m(\xi_*)e^{-8\varkappa_m(\varkappa_m^2-\varkappa_p^2)t}k_m(x,t) + \sum_{n=1}^{N} \frac{k_n(x,t)}{\varkappa_m + \varkappa_n} = 1, \tag{13}$$

а затем из (11):

$$A_m(\xi_*)e^{-8\varkappa_m(\varkappa_m^2-\varkappa_p^2)t}k'_m(x,t) + \sum_{n=1}^{N} \frac{k'_n(x,t)}{\varkappa_m + \varkappa_n} =$$

$$= -2\varkappa_m A_m(\xi_*)e^{-8\varkappa_m(\varkappa_m^2-\varkappa_p^2)t}k_m(x,t). \tag{14}$$

Здесь $m = 1, \ldots, N$.

Нам интересны *ограниченные при* $t \to +\infty$ *решения* $k_n(x,t)$ *и* $k'_n(x,t)$ *систем* (10)–(11). Найдем соответствующие пределы.

Пусть сначала $m > p$, т.е. $m = p+1, \ldots, N$. Тогда $\varkappa_m^2 < \varkappa_p^2$. Домножая m-е уравнение системы (10) на $e^{8\varkappa_m(\varkappa_m^2 - \varkappa_p^2)t}$ и переходя к пределу при $t \to +\infty$, получим

$$k_m(x,t)\big|_{t\to+\infty} = 0, \quad m = p+1, \ldots, N. \tag{15}$$

Пусть теперь $m \leqslant p$, тогда $\varkappa_m^2 \geqslant \varkappa_p^2$. Переходя в этом случае к пределу при $t \to +\infty$ и пользуясь (15), получим

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{k_n(x,t)}{\varkappa_m + \varkappa_n}\bigg|_{t\to+\infty} == 1 - \delta_m^p A_p(\xi_*) k_p(x,t)\big|_{t\to+\infty}. \tag{16}$$

Здесь δ_m^p — символ Кронекера. Совершенно аналогично из системы (14) находим

$$k'_m(x,t)\big|_{t\to+\infty} = 0, \quad m = p+1, \ldots, N. \tag{17}$$

Далее с учетом (17) имеем для $m = 1, \ldots, p$:

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{k'_n(x,t)}{\varkappa_m + \varkappa_n}\bigg|_{t\to+\infty} = -\delta_m^p A_p(\xi_*) \left[2\varkappa_p k_p(x,t) + k'_p(x,t)\right]\Big|_{t\to+\infty}. \tag{18}$$

Равенства (16) будем рассматривать как систему линейных уравнений относительно величин $k_m(x,t)\big|_{t\to+\infty}$, $m = 1, \ldots, p$.

Матрица системы (16) — это матрица Коши

$$\widehat{K}^{(p)} = \left(\frac{1}{\varkappa_i + \varkappa_j}\right)_{i,j=1}^{p}$$

с положительным определителем. По правилу Крамера получаем теперь

$$k_m(x,t)\big|_{t\to+\infty} = \frac{\det \widehat{K}_m^{(p)}}{\det \widehat{K}^{(p)}}, \quad m = 1,\dots,p. \tag{19}$$

Здесь матрица $\widehat{K}_m^{(p)}$ получается заменой m-го столбца в матрице $\widehat{K}^{(p)}$ на следующий вектор-столбец высоты p:

$$\uparrow \Big(1,\dots,1,1-\delta_m^p A_p(\xi_*)k_p(x,t)\big|_{t\to+\infty}\Big).$$

Например, $\widehat{K}_p^{(p)}$ равна следующей матрице

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\varkappa_1+\varkappa_1} & \cdots & \frac{1}{\varkappa_1+\varkappa_{p-1}} & 1 \\ \frac{1}{\varkappa_2+\varkappa_1} & \cdots & \frac{1}{\varkappa_2+\varkappa_{p-1}} & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\varkappa_{p-1}+\varkappa_1} & \cdots & \frac{1}{\varkappa_{p-1}+\varkappa_{p-1}} & 1 \\ \frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_1} & \cdots & \frac{1}{\varkappa_p+\varkappa_{p-1}} & 1-A_p(\xi_*)k_p\big|_{t\to+\infty} \end{bmatrix}.$$

Раскрывая определитель $\widehat{K}_m^{(p)}$ в (18) по m-му столбцу и обозначая алгебраическое дополнение к элементу (n,m) в определителе $\det \widehat{K}^{(p)}$ через $\widehat{K}_{nm}$, приходим к соотношению

$$k_m(x,t)\big|_{t\to+\infty} = \frac{1}{\det \widehat{K}^{(p)}} \left[\sum_{n=1}^{p} \widehat{K}_{nm} - A_p(\xi_*)k_p(x,t)\big|_{t\to+\infty}\widehat{K}_{pm}\right].$$

Взяв здесь $m=p$ и воспользовавшись определением матрицы L_p, в силу которого справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{p} \widehat{K}_{np} = \det L_p,$$

получим

$$\left[\det \widehat{K}^{(p)} + A_p(\xi_*)\widehat{K}_{pp}\right] k_p(x,t)\Big|_{t\to+\infty} = \det L_p. \tag{20}$$

Учитывая еще, что $\widehat{K}_{pp} = \det \widehat{K}^{(p-1)}$, получаем из (20):

$$k_p(x,t)\Big|_{t\to+\infty} = \frac{\det L_p}{\det \widehat{K}^{(p)} + A_p(\xi_*) \det \widehat{K}^{(p-1)}}. \tag{21}$$

Аналогично, равенства (18) — это система линейных уравнений относительно неизвестных $k'_m(x,t)\big|_{t\to+\infty}$, $m = 1,\ldots,p$. Матрица системы (18) — это все та же матрица Коши $\widehat{K}^{(p)}$ с положительным определителем. По правилу Крамера получаем при $m = 1,\ldots,p$:

$$k'_m(x,t)\Big|_{t\to+\infty} = -\frac{A_p(\xi_*)\widehat{K}_{pm}}{\det \widehat{K}^{(p)}} \left[2\varkappa_p k_p(x,t) + k'_p(x,t)\right]\Big|_{t\to+\infty}. \tag{22}$$

Полагая здесь $m = p$ и учитывая, что $\widehat{K}_{pp} = \det \widehat{K}^{(p-1)}$, находим далее

$$k'_p(x,t)\Big|_{t\to+\infty} = -\frac{2\varkappa_p A_p(\xi_*) \det \widehat{K}^{(p-1)}}{\det \widehat{K}^{(p)} + A_p(\xi_*)\widehat{K}_{pp}} k_p(x,t)\Big|_{t\to+\infty}. \tag{23}$$

Подставив в правую часть равенства (23) выражение $k_p(x,t)\Big|_{t\to+\infty}$ из (21), представим $k'_p(x,t)\big|_{t\to+\infty}$ в следующем виде

$$-\frac{2\varkappa_p A_p(\xi_*) \det \widehat{K}^{(p-1)} \det L_p}{\left[\det \widehat{K}^{(p)} + A_p(\xi_*) \det \widehat{K}^{(p-1)}\right]^2}. \tag{24}$$

Далее, справедливы соотношения

$$\sum_{m=1}^{N} k'_m(x,t)\Big|_{t\to+\infty} = \sum_{m=1}^{p} k'_m(x,t)\Big|_{t\to+\infty}. \tag{25}$$

Здесь использованы равенства (17). Подставляя в правую часть (25) представления (22), имеем далее

$$\sum_{m=1}^{p} k'_m(x,t)\Big|_{t\to+\infty} = \frac{-A_p(\xi_*)\left[2\varkappa_p k_p(x,t) + k'_p(x,t)\right]\Big|_{t\to+\infty}}{\det \widehat{K}^{(p)}} \sum_{m=1}^{p} \widehat{K}_{pm}.$$

Воспользовавшись здесь соотношениями $\sum\limits_{m=1}^{p} \widehat{K}_{pm} = \det L_p$, получим

$$\sum_{m=1}^{p} k'_m(x,t)\Big|_{t\to+\infty} = \frac{-A_p(\xi_*)\det L_p}{\det \widehat{K}^{(p)}} \left[2\varkappa_p k_p(x,t) + k'_p(x,t)\right]\Big|_{t\to+\infty}. \tag{26}$$

Предел в квадратных скобках в правой части этого равенства подсчитаем с помощью формул (21) и (24):

$$\left[2\varkappa_p k_p(x,t) + k'_p(x,t)\right]\Big|_{t\to+\infty} =$$

$$\frac{2\varkappa_p \det L_p}{\det \widehat{K}^{(p)} + A_p(\xi_*)\det \widehat{K}^{(p-1)}} \left\{1 - \frac{A_p(\xi_*)\det \widehat{K}^{(p-1)}}{\det \widehat{K}^{(p)} + A_p(\xi_*)\det \widehat{K}^{(p-1)}}\right\},$$

или

$$\left[2\varkappa_p k_p(x,t) + k'_p(x,t)\right]\Big|_{t\to+\infty} = \frac{2\varkappa_p \det L_p \det \widehat{K}^{(p)}}{[\det \widehat{K}^{(p)} + A_p(\xi_*)\det \widehat{K}^{(p-1)}]^2}.$$

Подставляя это равенство в (26), имеем

$$\sum_{m=1}^{p} k'_m(x,t)\Big|_{t\to+\infty} = \frac{-2\varkappa_p A_p(\xi_*)(\det L_p)^2}{[\det \widehat{K}^{(p)} + A_p(\xi_*)\det \widehat{K}^{(p-1)}]^2}.$$

Разделив числитель и знаменатель дроби в правой части на $(\det L_p)^2$ и воспользовавшись соотношением $u(x,t) = 2\sum\limits_{n=1}^{N} k'_n(x,t)$, получим

$$u(x,t)\big|_{t\to+\infty} = 2\sum_{m=1}^{p} k'_m(x,t)\big|_{t\to+\infty},$$

и далее

$$u(x,t)\big|_{t\to+\infty} == \frac{-4\varkappa_p A_p(\xi_*)}{\left[\frac{\det \widehat{K}^{(p)}}{\det L_p} + A_p(\xi_*)\frac{\det \widehat{K}^{(p-1)}}{\det L_p}\right]^2}. \tag{27}$$

Как уже установлено (6), имеют место равенства

$$\frac{\det \widehat{K}^{(p)}}{\det L_p} = \frac{\det L_p}{\det \widehat{K}^{(p-1)}} = \frac{\prod\limits_{m=1}^{p-1}(\varkappa_p - \varkappa_m)}{\prod\limits_{m=1}^{p}(\varkappa_p + \varkappa_m)} = \frac{1}{2\varkappa_p}\prod_{m=1}^{p-1}\frac{\varkappa_p - \varkappa_m}{\varkappa_p + \varkappa_m}.$$

Пользуясь ими в (1), получаем

$$u(x,t)\big|_{t\to+\infty} = \frac{-16\varkappa_p^3 A_p(\xi_*)\prod\limits_{m=1}^{p-1}\left(\frac{\varkappa_p+\varkappa_m}{\varkappa_p-\varkappa_m}\right)^2}{\left[1 + 2\varkappa_p A_p(\xi_*)\prod\limits_{m=1}^{p-1}\left(\frac{\varkappa_p+\varkappa_m}{\varkappa_p-\varkappa_m}\right)^2\right]^2}. \tag{28}$$

Вспоминая обозначение (7), находим

$$\xi_p^+ = \frac{1}{2\varkappa_p}\ln\frac{c_p^2(0)}{2\varkappa_p} + \frac{1}{\varkappa_p}\sum_{j=1}^{p-1}\ln\frac{\varkappa_j - \varkappa_p}{\varkappa_j + \varkappa_p}.$$

Учитывая, что $\xi_* = x - 4\varkappa_p^2 t$ и $c_p^2(0)A_p(\xi_*) = e^{2\varkappa_p\xi_*}$, получаем из (1):

$$u(x,t)\big|_{t\to+\infty} \sim \frac{-8\varkappa_p^2 e^{2\varkappa_p(\xi-\xi_p^+)}}{\left[1 + e^{2\varkappa_p(\xi-\xi_p^+)}\right]^2} == \frac{-2\varkappa_p^2}{\operatorname{ch}^2[\varkappa_p(x - 4\varkappa_p^2 t - \xi_p^+)]}.$$

Это асимптотическое равенство означает, что на любой кривой $x = x(t)$, лежащей в полосе $\Pi_p(C)$ и стремящейся к бесконечности при $t \to +\infty$, разница между потенциалом $u(x,t)$ и солитоном

$$u_p^+(x,t) = -\frac{2\varkappa_p}{\operatorname{ch}^2[\varkappa_p(x - 4\varkappa_p^2 t - \xi_m^+)]}$$

стремится к нулю. Асимптотика потенциала $u(x,t)$ при $t \to -\infty$ исследуется аналогично. □

В условии предыдущей теоремы параметр m может принимать произвольные значения от 1 до N. При этом в каждой из полос $\Pi_m(C)$ потенциал $u(x,t)$ имеет при $t \to +\infty$ свое асимптотическое представление. В объединении же полос $\Pi_m(C)$ по всем допустимым m потенциал $u(x,t)$ ведет себя при $t \to +\infty$ как сумма солитонов $\sum\limits_{m=1}^{N} u_m^+(x,t)$, а при $t \to -\infty$ — как сумма солитонов $\sum\limits_{m=1}^{N} u_m^-(x,t)$.

Таким образом, потенциал $u(x,t)$ можно рассматривать в любой момент времени как результат взаимодействия N солитонов $u_m^-(x,t)$, $m = 1, \ldots, N$, которые с разными скоростями распространяются вдоль оси x из $-\infty$ в $+\infty$, превращаясь в пределе в солитоны $u_m^+(x,t)$, $m = 1, \ldots, N$.

При этом солитоны $u_m^-(x,t)$ и $u_m^+(x,t)$ имеют одинаковую форму, но различные фазы, сдвиг которых определяется формулой:

$$\xi_m^+ - \xi_m^- = \frac{1}{\varkappa_m}\left[\sum_{j=1}^{m-1} \ln\frac{\varkappa_j - \varkappa_m}{\varkappa_j + \varkappa_m} - \sum_{j=m+1}^{N} \ln\frac{\varkappa_m - \varkappa_j}{\varkappa_m + \varkappa_j}\right].$$

ТЕМА: Нелинейные волны в средах с диссипацией: уравнение Бюргерса. **1**^{0}. Уравнение Бюргерса. **2**^{0}. Преобразование Коула–Хопфа. **3**^{0}. Поведение решений уравнения Бюргерса при малой вязкости. **4**^{0}. Стационарная ударная волна. **5**^{0}. Автомодельные решения уравнения Бюргерса.

1^0. В настоящей лекции будет рассмотрен случай волновых процессов, сопровождающихся диссипативными эффектами. Модельным уравнением при этом нам послужит *уравнение Бюргерса*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Рассмотренное ранее уравнение простых волн удобно рассматривать как предел уравнения Бюргерса при $\nu \to 0$. Заметим, что уравнение (1) допускает запись в виде закона сохранения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \tag{1'}$$

где ρ — плотность сохраняющейся величины, $q = Q(\rho) - \nu\rho_x$ — поток. Точнее, уравнение (1) имеет вид закона сохранения (1'), в котором $\rho = u$ и $Q(\rho) = \rho^2/2$, т.е. эквивалентно следующему

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2} - \nu\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0.$$

Отсюда следует, что интеграл $\int u(x,t)\,dx$ постоянен во времени, т.е. является интегралом движения.

Уравнение Бюргерса записывается также в иной форме:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha u\frac{\partial u}{\partial t} = \delta\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{2}$$

В этом виде уравнение содержит производную по координате только первого порядка, что более удобно при рассмотрении задачи с граничным условием (задачи о распространении сигнала). Уравнение же в форме (1) более подходит для задачи с начальным условием.

Уравнение Бюргерса в виде (2) часто используется в нелинейной акустике и обобщено на случай цилиндрических, сферических волн и волн в средах с релаксацией. Отметим, что диссипативные эффекты способны приостановить укручение волны и привести к образованию ударной волны.

$\mathbf{2}^0$. Очевидно, что уравнение Бюргерса (1) представляет собой нелинейную модификацию уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}. \tag{3}$$

Гораздо важнее, однако, то обстоятельство, что уравнение Бюргерса удается свести к линейному уравнению (3) с помощью специального преобразования, найденного независимо Коулом и Хопфом.

Проведем *преобразование Коула—Хопфа* в два этапа. Сначала положим $u = \psi_x$. При этом уравнение (1) после однократного интегрирования по dx преобразуется к виду

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 = \nu\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}. \tag{4}$$

Полагая здесь $\psi = -2\nu\ln\varphi$, находим

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -2\nu\frac{\varphi_t}{\varphi}, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2\nu\varphi_x}{\varphi}\right)^2,$$

$$\nu\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -2\nu^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi}\right) = -2\nu^2\frac{\varphi_{xx}\varphi - \varphi_x^2}{\varphi^2}.$$

После подстановки этих выражений в (4) получаем

$$-2\nu\frac{\varphi_t}{\varphi}+\frac{1}{2}\left(\frac{2\nu\varphi_x}{\varphi}\right)^2=-2\nu^2\frac{\varphi_{xx}\varphi-\varphi_x^2}{\varphi^2}.$$

Сокращая в обеих частях слагаемые, содержащие φ_x^2, имеем уравнение

$$-2\nu\frac{\varphi_t}{\varphi}=-2\nu^2\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}\quad\Leftrightarrow\quad\varphi_t=\nu\varphi_{xx}.$$

Таким образом, уравнение Бюргерса (1) при помощи замены

$$u=-2\nu\frac{\partial}{\partial x}(\ln\varphi)\tag{5}$$

переходит в уравнение теплопроводности (3).

Если задано начальное условие $u(x,0)=F(x)$, где $F(x)$ быстроубывающая функция, то для функции φ имеем следующее условие:

$$\varphi(x,0)=\exp\left[-\frac{1}{2\nu}\int\limits_0^x F(y)\,dy\right]\equiv\Phi(x).\tag{6}$$

Функция $\Phi(x)$ здесь непрерывна и ограничена на всей числовой оси.

Решение уравнения теплопроводности с начальным условием (6) находим по формуле Пуассона:

$$\varphi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi(\eta)\exp\left[-\frac{(x-\eta)^2}{4\nu t}\right]\,d\eta.$$

Введя здесь обозначение

$$G(\eta;x,t)=\int\limits_0^\eta F(\xi)\,d\xi+\frac{(x-\eta)^2}{2t},$$

перепишем полученную для $\varphi(x,t)$ формулу в виде

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{G(\eta;x,t)}{2\nu}\right)\, d\eta.$$

Подставляя это равенство в (5), получаем

$$u(x,t) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\eta}{t} \exp\left(-\frac{G(\eta;x,t)}{2\nu}\right)\, d\eta}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{G(\eta;x,t)}{2\nu}\right)\, d\eta}. \tag{7}$$

Формулы (6) и (7) позволяют, в принципе, получать точные решение уравнения Бюргерса для произвольного начального волнового профиля.

Конечно, далеко не всегда интегралы, входящие в эти формулы, аналитически вычислимы. Однако в ряде важных случаев это сделать удается.

3^0. Исследуем поведение решений уравнения Бюргерса при $\nu \ll 1$. Нас будет интересовать вопрос:

стремятся ли решения уравнения Бюргерса в пределе при $\nu \to 0$ *к соответствующим разрывным решениям уравнения простых волн*?

Заметим, что в случае $\nu \ll 1$ экспонента

$$\exp\left(-\frac{G(\eta;x,t)}{2\nu}\right)$$

в подынтегральных выражениях формулы (7) мала всюду, за исключением окрестностей тех точек η, в которых функция $G(\eta;x,t)$ достигает минимум. Стационарные точки функции

$G(\eta; x, t)$ являются решением уравнения

$$\frac{\partial G}{\partial \eta}(\eta; x, t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F(\eta) - \frac{x - \eta}{t} = 0.$$

Предположим, что у этого уравнения имеется единственное решение $\eta = \xi(x, t)$, т.е. что точка $\xi(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$F(\xi) - \frac{x - \xi}{t} = 0 \tag{8}$$

и является точкой минимума функции $G(\eta; x, t)$ по первому аргументу. Тогда имеем

$$G''(\xi) \equiv \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2}(\xi; x, t) > 0.$$

Разложим функцию $G(\eta; x, t)$ в ряд Тейлора в окрестности точки ξ по первому аргументу, оставив в этом разложении лишь два первых не обращающихся в нуль слагаемых:

$$G(\eta; x, t) \approx G(\xi; x, t) + \frac{(\eta - \xi)^2}{2} G''(\xi).$$

Используем это асимптотическое равенство для приближения интеграла вида

$$I \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\eta) e^{(-\frac{G(\eta)}{2\nu})}\, d\eta,$$

где функция $g(\eta)$ меняется медленно по сравнению с экспонентой. Подставив под интеграл I полученное выше асимптотическое представление функции $G(\eta; x, t)$, придем к соотношению

$$I \approx g(\xi) e^{-\frac{G(\xi)}{2\nu}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\eta - \xi)^2 G''(\xi)}{4\nu}}\, d\eta.$$

Правую часть этого равенства преобразуем с помощью замены

$$\zeta^2 = \frac{(\eta - \xi)^2 G''(\xi)}{4\nu}.$$

В результате получим

$$I \approx g(\xi) e^{-\frac{G(\xi)}{2\nu}} \sqrt{\frac{4\nu}{G''(\xi)}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\zeta^2}\, d\zeta,$$

или

$$I \approx \sqrt{\frac{4\pi\nu}{G''(\xi)}} g(\xi) e^{-\frac{G(\xi)}{2\nu}}.$$

Приближая по этой формуле интегралы в числителе и знаменателе равенства (7), придем к следующему соотношению

$$u(x,t) \approx \frac{x - \xi(x,t)}{t} = F(\xi). \tag{9}$$

Последнее равенство справедливо в силу определения (8) точки ξ. Полученное для $u(x,t)$ представление перепишем в виде двух равенств

$$u = F(\xi), \quad x - \xi = F(\xi)t. \tag{10}$$

Как видно из (10), функция $u(x,t)$ удовлетворяет соотношению

$$u = F(x - ut). \tag{10'}$$

Последнее равенство, как вы помните, представляет собой неявное задание решения задачи Коши для уравнения простых волн:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u(x,0) = F(x).$$

В отличие от однозначных и непрерывных решений уравнения Бюргерса, определяемых соотношением (7), формула (10) предсказывает опрокидывание волны.

Как было показано ранее, волна опрокидывается, если в соответствующий момент времени пересекаются как минимум две характеристики уравнения простых волн. Следовательно, в этом случае имеется две стационарные точки $\xi_j = \xi_j(x,t)$, $j = 1, 2$, удовлетворяющие уравнению (8).

Это означает, что в выражении (7) необходимо учитывать вклад от обеих точек ξ_1 и ξ_2, что дает нам равенство

$$u \approx \frac{\frac{x-\xi_1}{t\sqrt{G''(\xi_1)}}e^{-G_1/2\nu} + \frac{x-\xi_2}{t\sqrt{G''(\xi_2)}}e^{-G_2/2\nu}}{\frac{1}{\sqrt{G''(\xi_1)}}e^{-G_1/2\nu} + \frac{1}{\sqrt{G''(\xi_2)}}e^{-G_2/2\nu}}, \qquad (11)$$

где $G_j = G(\xi_j)$, $j = 1, 2$.

Если $G_1 < G_2$, то в формуле (11) доминируют члены, содержащие G_1, и

$$u(x,t) \approx \frac{x - \xi_1(x,t)}{t} = F(\xi_1).$$

В противном случае доминируют члены, содержащие G_2, и

$$u(x,t) \approx \frac{x - \xi_2(x,t)}{t} = F(\xi_2).$$

Таким образом, решение состоит из двух частей, приближенно удовлетворяющих уравнению простой волны и соединенных переходной областью, ширина которой пропорциональна ν.

4^0. Найдем решение уравнения Бюргерса в виде стационарной ударной волны.

Стационарными называются волны, которые распространяются вдоль оси x с постоянной скоростью U, не изменяя при этом своей формы.

Решения такого типа зависят от x и t в комбинации $\xi = x - Ut$, т.е. имеют вид $u = u(x-Ut)$.

Напомним, что уравнение Бюргерса записывается следующим образом

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Искомое его решение в виде стационарной ударной волны подчиним дополнительным условиям на бесконечности:

$$\lim_{x\to+\infty} u(x,t) = u_1, \quad \lim_{x\to-\infty} u(x,t) = u_2. \tag{12}$$

Здесь $u_2 > u_1$. Кроме того потребуем, чтобы пределы производной $u'(\xi)$ при $\xi \to \pm\infty$ равнялись нулю:

$$\lim_{\xi\to+\infty} u'(\xi) = 0, \quad \lim_{\xi\to-\infty} u'(\xi) = 0. \tag{12'}$$

Подставляя функцию $u(x - Ut)$ в уравнение (1), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-Uu'(\xi) + \left(\frac{u^2(\xi)}{2}\right)' = \nu u''(\xi).$$

Штрихи здесь обозначают дифференцирование по ξ.

Интегрируя полученное уравнение сначала по отрезку $(-\infty, \xi)$, а затем по отрезку $(\xi, +\infty)$, с учетом граничных условий (12)-(12') получим:

$$-Uu(\xi) + \frac{u^2(\xi)}{2} - \nu u'(\xi) = -Uu_1 + \frac{u_1^2}{2}, \tag{13'}$$

$$-Uu(\xi) + \frac{u^2(\xi)}{2} - \nu u'(\xi) = -Uu_2 + \frac{u_2^2}{2}. \tag{13''}$$

Вычитая второе уравнение из первого, находим

$$U = \frac{u_1 + u_2}{2}, \tag{14}$$

т.е. скорость ударной волны описывается в точности тем же выражением, что и скорость разрыва.

Пользуясь (14), получаем из (13'):

$$\nu u'(\xi) = \frac{(u-u_1)(u-u_2)}{2}.$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Интегрируя его, получаем функцию u в неявном виде как решение следующего уравнения:

$$\frac{1}{u_2-u_1}\ln\frac{u_2-u}{u-u_1} = \frac{\xi-\xi_0}{2\nu}. \tag{15}$$

Постоянная ξ_0 здесь определяет положение фронта ударной волны и ее можно положить равной нулю без ограничения общности.

Разрешая уравнение (15) относительно переменной u, находим ее явный вид

$$u(\xi) = u_1 + \frac{u_2-u_1}{1+\exp\left(\frac{u_2-u_1}{2\nu}\,\xi\right)}. \tag{16}$$

или, что то же самое:

$$u(x,t) = u_1 + \frac{u_2-u_1}{1+\exp\left(\frac{u_2-u_1}{2\nu}\,(x-Ut)\right)}. \tag{16'}$$

Вводя *амплитуду ударной волны*

$$u_m = (u_2-u_1)/2,$$

запишем выражение (16) в эквивалентном виде

$$u(\xi) = U - u_m \,\mathrm{th}\left(\frac{u_m\xi}{2\nu}\right) = U - u_m\,\mathrm{th}\left(\frac{\xi}{\Delta}\right), \tag{17}$$

где $\Delta = \frac{2\nu}{u_m}$ — *характерная ширина фронта* ударной волны. Эта величина обратно пропорциональна амплитуде волны и прямо пропорциональна ν.

Рассмотрим следующую задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x,0) = F(x),$$

в предположении, что начальный профиль волны представляет собой ступеньку:

$$F(x) = u_1 \quad \text{при} \quad x > 0,$$

$$F(x) = u_2 \quad \text{при} \quad x < 0.$$

Здесь $u_2 > u_1$. Применим найденную ранее формулу для решения этой задачи:

$$u(x,t) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\eta}{t} \exp\left(-\frac{G(\eta;x,t)}{2\nu}\right)\, d\eta}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{G(\eta;x,t)}{2\nu}\right)\, d\eta}. \tag{18}$$

Для функции $G(\eta;x,t)$ в формуле (18) имеем следующее выражение

$$G(\eta;x,t) = \int\limits_0^{\eta} F(\xi)\, d\xi + \frac{(x-\eta)^2}{2t},$$

или, в применении к ступенчатому профилю:

$$G(\eta;x,t) = u_1\eta + \frac{(x-\eta)^2}{2t} \equiv G_1 \quad \text{при} \quad \eta > 0,$$

$$G(\eta;x,t) = u_2\eta + \frac{(x-\eta)^2}{2t} \equiv G_2 \quad \text{при} \quad \eta < 0.$$

Введем обозначения

$$E_j = \exp\left(-\frac{x^2 - (x - u_j t)^2}{4\nu t}\right), \quad j = 1, 2,$$

тогда получим

$$\exp\left(-\frac{G_j}{2\nu}\right) = E_j \exp\left(-\frac{(\eta - x + u_j t)^2}{4\nu t}\right).$$

Теперь вычислим интеграл в знаменателе формулы (18).

Сначала разбиваем его на два слагаемых:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-\frac{G}{2\nu}\right)}\, d\eta = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{\left(-\frac{G_2}{2\nu}\right)}\, d\eta + \int\limits_{0}^{\infty} e^{\left(-\frac{G_1}{2\nu}\right)}\, d\eta,$$

а затем при помощи замены $\zeta^2 = \frac{(\eta - x + u_j t)^2}{4\nu t}$ получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-\frac{G}{2\nu}\right)}\, d\eta =$$

$$= \sqrt{\pi\nu t}\left[E_1 \mathrm{erfc}\left(-\frac{x - u_1 t}{\sqrt{4\nu t}}\right) + E_2 \mathrm{erfc}\left(\frac{x - u_2 t}{\sqrt{4\nu t}}\right)\right].$$

Здесь erfc — специальная функция, называемая *дополнительным интегралом вероятностей* (или дополнительным интегралом ошибок):

$$\mathrm{erfc}(z) = 1 - \mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{z}^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Вычислим еще интеграл в числителе формулы (18). Имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x - \eta}{t} \exp\left(-\frac{G_2(\eta; x, t)}{2\nu}\right)\, d\eta =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\eta - x + u_2 t}{t} \exp\left(-\frac{G_2(\eta; x, t)}{2\nu}\right)\, d\eta +$$

$$+ u_2 \int\limits_{-\infty}^{0} \exp\left(-\frac{G_2(\eta; x, t)}{2\nu}\right)\, d\eta.$$

Первый интеграл в правой части преобразуется с помощью замены $\zeta = \frac{(\eta - x + u_2 t)^2}{4\nu t}$, второй же интеграл уже вычислен ранее. Таким образом, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x - \eta}{t} \exp\left(-\frac{G_2(\eta; x, t)}{2\nu}\right)\, d\eta =$$

$$\sqrt{\pi\nu t}\, u_2 E_2 \operatorname{erfc}\left(\frac{x - u_2 t}{\sqrt{4\nu t}}\right) + 2\nu E_2 \exp\left(-\frac{(x - u_2 t)^2}{4\nu t}\right) =$$

$$= \sqrt{\pi\nu t}\, u_2 E_2 \operatorname{erfc}\left(\frac{x - u_2 t}{\sqrt{4\nu t}}\right) + 2\nu \exp\left(-\frac{x^2}{4\nu t}\right).$$

Аналогичное выражение получаем для интеграла в числителе формулы (18), содержащего функцию $G_1(\eta; x, t)$:

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x - \eta}{t} \exp\left(-\frac{G_1(\eta; x, t)}{2\nu}\right)\, d\eta =$$

$$= \sqrt{\pi\nu t}\, u_1 E_1 \operatorname{erfc}\left(-\frac{x - u_1 t}{\sqrt{4\nu t}}\right) - 2\nu \exp\left(-\frac{x^2}{4\nu t}\right).$$

Таким образом, числитель в формуле (18) представлен как следующая сумма

$$\sqrt{\pi\nu t}\left[u_1 E_1 \operatorname{erfc}\left(-\frac{x - u_1 t}{\sqrt{4\nu t}}\right) + u_2 E_2 \operatorname{erfc}\left(\frac{x - u_2 t}{\sqrt{4\nu t}}\right)\right].$$

Окончательно получаем для решения $u(x,t)$ следующее выражение

$$u(x,t) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{1 + AE_1/E_2},$$

где

$$A = A(x,t) = \frac{\operatorname{erfc}\left(-\frac{x-u_1 t}{\sqrt{4\nu t}}\right)}{\operatorname{erfc}\left(\frac{x-u_2 t}{\sqrt{4\nu t}}\right)}.$$

Нетрудно подсчитать, что

$$\frac{E_1}{E_2} = \exp\left(\frac{(x-u_1 t)^2 - (x-u_2 t)^2}{4\nu t}\right),$$

или

$$\frac{E_1}{E_2} = \exp\left(\frac{u_2 - u_1}{2\nu}(x - Ut)\right),$$

где U определяется формулой (14).

Окончательно имеем для решения рассматриваемой задачи Коши:

$$u(x,t) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{1 + A\exp\left(\frac{u_2-u_1}{2\nu}(x-Ut)\right)}.$$

Заметим, что для фиксированного x/t из интервала

$$u_1 < x/t < u_2$$

и при $t \to \infty$ коэффициент $A = A(x,t)$ стремится к единице. Тем самым полученное решение $u(x,t)$ с течением времени превращается в стационарную ударную волну, т.е. принимает следующий вид:

$$u(x,t) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{1 + \exp\left(\frac{u_2-u_1}{2\nu}(x-Ut)\right)}.$$

5^0. Рассмотрим еще один важный класс решений уравнения Бюргерса, называемых *автомодельными*. Этим термином обозначаются решения, зависящие от переменных x и t в определенной комбинации, благодаря чему задача сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению. Простейший пример автомодельных решений дают уже рассмотренные стационарные волны.

Полагая $t > 0$ и вводя обозначение $z = x/\sqrt{t}$, будем искать решение уравнения Бюргерса в виде

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\psi(z). \tag{$\mathbf{A}$}$$

Подставляя это соотношение в уравнение (1), получаем для $\psi(z)$ следующее обыкновенное уравнение $-\frac{\psi + z\psi'}{2} + \left(\frac{\psi^2}{2}\right)' = \nu\psi''$, или

$$\left(\frac{\psi^2 - z\psi}{2\nu}\right)' = \psi''. \tag{$\mathbf{A}'$}$$

Будем искать те решения уравнения ($\mathbf{A}'$), которые локализованы в пространстве, т.е. убывают к нулю на бесконечности вместе со всеми своими производными. Интегрируя уравнение ($\mathbf{A}'$) по dz один раз, получаем $\frac{\psi^2 - z\psi}{2\nu} = \psi'$, или

$$\psi' + \frac{z}{2\nu}\psi = \frac{1}{2\nu}\psi^2.$$

Это *уравнение Бернулли*. Сделав в нем замену

$$\psi = -2\nu\frac{v'}{v},$$

получим для функции v следующее уравнение $zv' = -2\nu v''$. Интегрируя это соотношение, получаем $v'(z) = \exp\left(-\frac{z^2}{4\nu}\right)$. Далее имеем $v(z) = \int\limits_0^z e^{-\frac{\xi^2}{4\nu}} d\xi + C = \sqrt{4\nu} \int\limits_0^{\frac{z}{\sqrt{4\nu}}} e^{-\zeta^2} d\zeta + C$, или

$$v(z) = \sqrt{\pi\nu}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{4\nu}}\right) + C\right].$$

Здесь C — постоянная интегрирования, а специальная функция erfc, называемая *интегралом вероятностей* (или интегралом ошибок), определяется соотношением

$$\operatorname{erf}(z) = 1 - \operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^z e^{-t^2} dt.$$

Возвращаясь к переменной ψ, получаем

$$\psi = -2\nu\frac{v'}{v} = -2\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\,\frac{\exp\left(-\frac{z^2}{4\nu}\right)}{\operatorname{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{4\nu}}\right) + C}.$$

Подставляя найденное выражение функции ψ в (**A**), получаем искомое автомодельное решение уравнения Бюргерса:

$$u(x,t) = -2\sqrt{\frac{\nu}{\pi t}}\,\frac{\exp\left(-\frac{x^2}{4\nu t}\right)}{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4\nu t}}\right) + C}.$$

График полученного решения представляет собой несимметричный колоколообразный импульс, который с течением времени расплывается и затухает.

Уравнение Бюргерса имеет и другие автомодельные решения. Существует целый раздел математики, основанный на теории групп Ли и позволяющий отыскать все автомодельные подстановки, допускаемые тем или иным уравнением.

Лекция 17.

ТЕМА: Задача Коши для уравнения теплопроводности **1**^{0}. Постановка задачи Коши. **2**^{0}. Инвариантность множества решений. **3**^{0}. Вывод формулы для фундаментального решения уравнения теплопроводности. **4**^{0}. Интеграл Пуассона как решение задачи Коши. **5**^{0}. Пример Ковалевской. **6**^{0}. Пример неединственности решения задачи Коши для уравнения теплопроводности. **7**^{0}. Принцип максимума.

1^0. Пусть функция $u = u(x,t)$ от переменных (x,t) из $\mathbb{R}^{n+1}$ является решением однородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u \tag{\textbf{He}}$$

с постоянным положительным коэффициентом a^2. Поставим для этого уравнения *задачу Коши* с данными при $t = 0$.

Отметим, что плоскость $t = 0$ — характеристическая для уравнения теплопроводности, что должно учитываться как при постановке задачи, так и в процессе ее решения.

Задача (Коши)**.** *Найти функцию $u(x,t)$ такую, что*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u & \textit{при} \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x) & \textit{при} \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{$\mathbf{CP_{He}}$}$$

Здесь функция $\varphi(x)$ непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}^n$.

Существенно, что решение задачи требуется найти именно при $t > 0$, а не при $t < 0$.

2^0. Прежде чем привести формулу для решения задачи Коши ($\mathbf{CP_{He}}$), исследуем общие свойства множества решений уравнения теплопроводности. Сделаем в уравнении (**He**) замену переменных (x,t), положив

$$x = \alpha z, \;\; t = \lambda s, \quad \text{где} \quad \alpha \neq 0, \; \lambda > 0. \tag{\textbf{TSD}}$$

В переменных (z, s) каждой функции $u = u(x, t)$ сопоставлена функция $v(z, s) = u(\alpha z, \lambda s) = u(x, t)$.

Если постоянные α, λ *в* (**TSD**) *таковы что* $\lambda = \alpha^2$, *а* $u(x, t)$ *решает уравнения* (**He**), *то соответствующая функция* $v(z, s)$ *является решением уравнения теплопроводности в переменных* (z, s), т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial s} = a^2 \Delta_z v.$$

Проверим, что это действительно так. Имеем, очевидно:

$$\frac{\partial v}{\partial z_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial z_j} = \alpha \frac{\partial u}{\partial x_j},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial {z_j}^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial {x_j}^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial s} = \lambda \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \Delta_x = \frac{1}{\alpha^2} \Delta_z v.$$

Учитывая, что $u(x, t)$ решает уравнение (**He**), получаем

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \lambda \frac{\partial u}{\partial t} = \lambda a^2 \Delta_x u = a^2 \frac{\lambda}{\alpha^2} \Delta_z v = a^2 \Delta_z v,$$

ибо по предположению $\lambda = \alpha^2$. Таким образом, функция *действительно является решением уравнения теплопроводности в переменных* (z, s).

Свойство решений $u(x, t)$ уравнения теплопроводности переходить при замене (**TSD**), в которой $\lambda = \alpha^2$, в решения $v(z, s)$ такого же уравнения теплопроводности, но уже в новых переменных, формулируют иногда по-другому. Именно, говорят, что *уравнение теплопроводности* (**He**) *инвариантно относительно однопараметрической группы преобразований*

$$x = \sqrt{\lambda} z, \;\; t = \lambda s, \quad \text{где} \quad \lambda > 0. \qquad (\mathbf{TSD'})$$

Упражнение. *Убедитесь, что при $\lambda > 0$ преобразования вида* (**TSD′**) *пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ образуют группу.*

3^0. Вернемся к уравнению (**He**) и *найдем специальное его решение* $u_*(x,t)$, обладающее сферической симметрией по пространственным переменным, т.е. такое, что

$$u_*(x,t) = u_*(|x|,t) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \quad \text{и} \quad \forall\, t > 0.$$

Потребуем еще, чтобы функция $u_*(|x|,t)$ оставалась "почти" неизменной при замене (**TSD′**) с произвольным $\lambda > 0$. Точнее, потребуем выполнения следующего соотношения:

$$u_*(|x|,t) = \lambda^{n/2} u_*(\sqrt{\lambda}|x|, \lambda t), \qquad \lambda > 0. \tag{1}$$

Кроме того подчиним $u_*(x,t)$ еще двум условиям:

$$\begin{cases} u_*(|x|,0) = 0 & \text{при} \quad x \neq 0, \\ \displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n} u_*(|x|,t)\,dx = 1 & \text{при} \quad t > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Предположив, что функция $u_*(|x|,t)$ с нужными свойствами существует, найдем её.

Зафиксировав $x \neq 0$ и $t > 0$, положим в (1) $\lambda = 1/t > 0$. Тогда получим

$$u_*(|x|,t) = \frac{1}{t^{n/2}}\, u_*\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}, 1\right) \equiv \frac{1}{t^{n/2}}\, g\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right).$$

Таким образом, искомое решение $u_*(|x|,t)$ будет найдено, если будет указана функция $g(\xi) = u_*(\xi,1)$ одной переменной $\xi > 0$.

Лемма. *Функция* $u_*(|x|,t) = \frac{1}{t^{n/2}}\, g\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)$ *решает уравнение теплопроводности* (**He**) *тогда и только тогда, когда функция* $g(\xi) = u_*(\xi,1)$ *удовлетворяет при* $\xi > 0$ *обыкновенному дифференциальному уравнению*

$$2a^2 g''(\xi) + \left(\xi + \frac{2a^2(n-1)}{\xi}\right) g'(\xi) + n g(\xi) = 0. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $u_*(|x|,t)$ решает уравнение теплопроводности (**He**). Тогда

$$\frac{\partial u_*}{\partial t} = a^2\, \frac{\partial^2 u_*}{\partial r^2} + a^2\, \frac{n-1}{r}\, \frac{\partial u_*}{\partial r}, \quad \text{где} \quad r = |x|.$$

Это соотношение есть ни что иное, как уравнение теплопроводности с лапласианом Δ_x, записанным в сферических координатах, в применении к функции $u_*(r,t)$. Докажем, что для функции $g(\xi) = u_*(\xi,1)$ в этом случае имеет место (3).

Дифференцируя по r и t равенство $u_*(r,t) = \frac{1}{t^{n/2}}\, g\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right)$, получаем

$$\frac{\partial u_*}{\partial r} = \frac{1}{t^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}}\, g'\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right), \qquad \frac{\partial^2 u_*}{\partial r^2} = \frac{1}{t^{\frac{n}{2}+1}}\, g''\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right),$$

$$\frac{\partial u_*}{\partial t} = -\frac{n}{2t^{\frac{n}{2}+1}}\, g\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right) + \frac{1}{t^{n/2}}\, g'\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right) \frac{(-r)}{2t^{3/2}} =$$

$$= -\frac{1}{2t^{\frac{n}{2}+1}} \left[n g\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right) + \frac{r}{\sqrt{t}}\, g'\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right)\right].$$

Подставляя найденные выражения для производных в уравнение

$$\frac{\partial u_*}{\partial t} = a^2\, \frac{\partial^2 u_*}{\partial r^2} + a^2\, \frac{n-1}{r}\, \frac{\partial u_*}{\partial r},$$

приходим к соотношению

$$-\frac{1}{2t^{\frac{n}{2}+1}}\left[ng\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right)+\frac{r}{\sqrt{t}}\,g'\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right)\right]=$$
$$\frac{a^2}{t^{\frac{n}{2}+1}}\,g''\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right)+\frac{a^2(n-1)}{r}\,\frac{1}{t^{\frac{n+1}{2}}}\,g'\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right).$$

Взяв здесь $\xi = r/\sqrt{t}$ и домножив обе части на $2t^{\frac{n}{2}+1}$, придем к уравнению (3).

Обратные рассуждения показывают достаточность (3) для выполнения (**He**). □

Первое из соотношений (2) накладывает на поведение функции $g(\xi)$ при $\xi \to +\infty$ дополнительные ограничения. Точнее, из условия $u_*(r,0)=0$ при $r \neq 0$ и соотношения

$$u_*(r,t)=\frac{1}{t^{n/2}}\,g\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right) \tag{4}$$

следует, что

$$\lim_{\xi\to+\infty}\xi^n g(\xi)=r^n\lim_{t\to+0}u_*(r,t)=0. \tag{5}$$

Аналогично, из условия $\dfrac{\partial u_*}{\partial r}(r,0)=0$ при $r\neq 0$ и соотношений

$$g\left(\xi\right)=t^{\frac{n}{2}}u_*(\sqrt{t}\xi,t),\qquad g'\left(\xi\right)=t^{\frac{n+1}{2}}\frac{\partial u_*}{\partial r}(\sqrt{t}\xi,t) \tag{4'}$$

вытекает, что

$$\lim_{\xi\to+\infty}\xi^{n+1}g'(\xi)=0. \tag{6}$$

Решим уравнение (3) с условиями (5) – (6).

Домножив обе части (3) на ξ^{n-1}, получим

$$2a^2\,\xi^{n-1}\,g''(\xi)+\left\{\xi^n+2a^2(n-1)\xi^{n-2}\right\}g'(\xi)++n\xi^{n-1}g(\xi)=0,$$

или, что то же самое,

$$2a^2\Big(\xi^{n-1}g''(\xi)+(n-1)\xi^{n-2}g'(\xi)\Big)+\Big(\xi^n\,g'(\xi)+n\xi^{n-1}\,g(\xi)\Big)=0.$$

Записав левую часть полученного уравнения как полную производную, придем к соотношению

$$2a^2\Big(\xi^{n-1}\,g'(\xi)\Big)'+\Big(\xi^n\,g(\xi)\Big)'=0,$$

или

$$\Big\{2a^2\xi^{n-1}\,g'(\xi)+\xi^n\,g(\xi)\Big\}'=0.$$

Следовательно, существует такая постоянная M, что

$$2a^2\xi^{n-1}\,g'(\xi)+\xi^n\,g(\xi)=M,\qquad \xi>0.$$

Устремив здесь ξ к $+\infty$ и пользуясь условиями (5) – (6), получим: $M=0$.

Таким образом, имеем для $g(\xi)$ следующее обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$2a^2\xi^{n-1}\,g'(\xi)+\xi^n\,g(\xi)=0,$$

или $2a^2\,g'(\xi)+\xi\,g(\xi)=0$. Решим его, разделив переменные:

$$\frac{dg}{g}=-\frac{\xi}{2a^2}\,d\xi\ \Rightarrow\ \ln g(\xi)=-\frac{\xi^2}{4a^2}+C_1.$$

Следовательно,

$$g(\xi)=A\,e^{-\left(\frac{\xi}{2a}\right)^2},$$

где A — некоторая постоянная. Найдем A. Пользуясь вторым из условий (2), имеем при любом $t>0$:

$$1=\int\limits_{\mathbb{R}^n}u_*(|x|,t)\,dx.$$

Подставляя сюда вытекающее из (4) представление

$$u_*(|x|,t) = \frac{A}{t^{n/2}} e^{-\left(\frac{|x|}{2a\sqrt{t}}\right)^2},$$

получаем соотношение

$$1 = \frac{A}{t^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\left(\frac{|x|}{2a\sqrt{t}}\right)^2}\, dx, \qquad t > 0.$$

Сделав замену $x = 2a\sqrt{t}y$, при которой $dx = (2a)^n\, t^{n/2}\, dy$, имеем далее

$$1 = A(2a)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2} dy = A(2a)^n \prod_{j=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-{y_j}^2} dy_j.$$

Пользуясь известным равенством

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-{y_j}^2} dy_j = \sqrt{\pi},$$

получаем окончательно $1 = A(2a)^n \prod\limits_{j=1}^{n} (\sqrt{\pi}) = A(2a\sqrt{\pi})^n$. Следовательно, чтобы выполнялось второе из условий (2), необходимо и достаточно взять $A = \frac{1}{(2a)^n \pi^{n/2}}$.

Таким образом, искомая функция $u_*(x,t)$, если только она существует, при $t > 0$ обязана иметь следующий вид

$$u_*(x,t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{2at}}. \tag{$\mathbf{FS_{He}}$}$$

Функцию в правой части равенства (**FS**$_{\mathbf{He}}$) называют также *фундаментальным решением уравнения теплопроводности* и обозначают через $G(x,t)$.

4^0. Получим с помощью фундаментального решения $G(x,t)$ уравнения теплопроводности *интегральное представление решения задачи Коши* (**CP$_{\mathbf{He}}$**). Рассмотрим по всему $\mathbb{R}^n$ интеграл

$$u(x,t) = \int G(x-\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{\textbf{PI}}$$

или, что то же самое,

$$u(x,t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\int e^{-\frac{|x-\xi|^2}{2at}}\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{\textbf{PI}$'$}$$

Этот интеграл называется *интегралом Пуассона*.

Теорема. *Интеграл Пуассона с непрерывной и ограниченной функцией* $\varphi(\xi)$ *задает решение следующей задачи Коши*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u & \textit{при} \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x) & \textit{при} \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Доказательство. Функция $\varphi(\xi)$ по условию ограничена в $\mathbb{R}^n$. Следовательно, интеграл Пуассона при $t > 0$ можно дифференцировать по x и t любое число раз.

Учитывая еще, что $G(x-\xi,t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности по переменным (x,t), видим, что и интеграл (**PI$'$**) при $t > 0$ также является решением уравнения теплопроводности.

Проверим выполнение условия $u(x,0) = \varphi(x)$. Заметим, что в силу установленных свойств фундаментального решения $G(x,t)$ при всех x и $t > 0$ справедливо равенство

$$\int G(x-\xi,t)\,d\xi = 1.$$

Домножая обе его части на $\varphi(x)$ и вычитая результат из формулы Пуассона, получим

$$u(x,t)-\varphi(x)=\int G(x-\xi,t)\Big(\varphi(\xi)-\varphi(x)\Big)\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\int e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2t}}\Big(\varphi(\xi)-\varphi(x)\Big)\,d\xi.$$

Пусть $y=\frac{\xi-x}{2a\sqrt{t}}$, тогда

$$dy=\frac{1}{(2a\sqrt{t})^n}\,d\xi,\quad \xi=x+2a\sqrt{t}y,\quad |y|^2=\frac{|x-\xi|^2}{4a^2t}.$$

С учетом этих соотношений формула разность $u(x,t)-\varphi(x)$ запишется в виде

$$u(x,t)-\varphi(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^n\int e^{-|y|^2}\Big(\varphi(x+2a\sqrt{t}y)-\varphi(x)\Big)\,dy.$$

Взяв произвольное $R>0$, запишем правую часть последнего равенства в виде суммы двух интегралов, первый из которых берется по шару $|y|\leqslant R$, а второй — по внешности этого шара:

$$(\mathrm{I})=\frac{1}{\pi^{n/2}}\int\limits_{|y|\leqslant R} e^{-|y|^2}\Big(\varphi(x+2a\sqrt{t}y)-\varphi(x)\Big)\,dy,$$

$$(\mathrm{II})=\frac{1}{\pi^{n/2}}\int\limits_{|y|\geqslant R} e^{-|y|^2}\Big(\varphi(x+2a\sqrt{t}y)-\varphi(x)\Big)\,dy.$$

По условию, постоянная $M=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}|\varphi(x)|$ конечна. Учитывая это, для данного $\varepsilon>0$ найдем такой радиус $R=R(\varepsilon,M)>0$, с которым слагаемое (II) допускает оценку

$$|(\mathrm{II})|\leqslant\frac{2M}{\pi^{n/2}}\int\limits_{|y|\geqslant R} e^{-|y|^2}\,dy\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

По условию, функция $\varphi(x)$ непрерывна в $\mathbb{R}^n$ и, следовательно, равномерно непрерывна на шаре с центром в x и радиуса $R = R(\varepsilon, M)$. Это означает, что для данного $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое что для любой пары точек x' и x'', обладающей свойствами

$$|x' - x| \leqslant R, \quad |x'' - x| \leqslant R, \quad |x'' - x'| \leqslant \delta,$$

имеет место оценка $|\varphi(x'') - \varphi(x')| \leqslant \varepsilon/2$. Величина δ здесь, конечно же, зависит от ε. Предполагаем, что $\delta \leqslant R$, что не ограничит общности.

Далее, рассмотрим t: $0 < t < t_0$, где $\sqrt{t_0} = \frac{\delta}{2aR}$. Пусть $x' = x$ и $x'' = x + 2a\sqrt{t}y$, где $|y| \leqslant R$. Тогда имеем:

$$|x'' - x| = |x'' - x'| = 2a\sqrt{t}|y| \leqslant 2a\sqrt{t_0}R = \delta \leqslant R.$$

Таким образом, x' и x'' принадлежат шару с центром в x и радиуса R, причем $|x'' - x'| \leqslant \delta$. В соответствии с выбором δ при $|y| \leqslant R$ и $0 < t < t_0$ имеем:

$$|\varphi(x + 2a\sqrt{t}y) - \varphi(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Учитывая последнее неравенство, оценим введенный выше интеграл (I) при $0 < t \leqslant t_0$:

$$|(\mathrm{I})| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi^{n/2}} \int\limits_{|y| \leqslant R} e^{-|y|^2}\, dy \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi^{n/2}} \pi^{n/2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Складывая полученные для (I) и (II) оценки и учитывая, что $u(x,t) - \varphi(x) = (\mathrm{I}) + (\mathrm{II})$, приходим к неравенству

$$|u(x,t) - \varphi(x)| \leqslant |(\mathrm{I})| + |(\mathrm{II})| \leqslant \varepsilon, \qquad 0 < t \leqslant t_0.$$

Поскольку ε здесь произвольно малое, постольку предел $u(x,t)$ при $t \to +0$ существует и равен $\varphi(x)$. $\square$

Установленное в предыдущей теореме равенство

$$u(x,t) = \int G(x-\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi$$

называется *формулой Пуассона*. Здесь $u(x,t)$ обозначает решение задачи Коши для уравнения теплопроводности.

5^0. Интеграл Пуассона, как уже отмечено ранее, представляет собой в полупространстве $t>0$ *бесконечно дифференцируемое* решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u & \text{при} \quad t>0, \\ u(x,0) = \varphi(x) & \text{при} \quad x\in\mathbb{R}^n, \end{cases}$$

в которой заданная функция $\varphi(x)$ непрерывна и ограничена. При этом следует подчеркнуть одно важное обстоятельство: *интеграл Пуассона, вообще говоря, не является аналитической функцией в окрестности плоскости* $t=0$.

Известен следующий подтверждающий последнее утверждение пример.

Пример (С.В. Ковалевская)**.** *Задача Коши для уравнения теплопроводности*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \textit{при} \quad t>0, \\ u(x,0) = \dfrac{1}{1+x^2} & \textit{при} \quad x\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

имеет бесконечно дифференцируемое решение, которое не является аналитическим ни в какой окрестности начала координат.

Доказательство. Рассмотрим соответствующий непрерывной и ограниченной функции $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$ интеграл Пуассона ($n = 1$):

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} \frac{1}{1+\xi^2}\, d\xi.$$

Предположим, что этот интеграл — функция, аналитическая в какой-либо окрестности начала координат. Тогда в этой окрестности $u(x,t)$ разлагается в абсолютно сходящийся степенной ряд:

$$u(x,t) = \sum_{i,j=0}^{\infty} u_{i,j}\, x^i\, t^j.$$

Следовательно, имеют место равенства

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\substack{i=0\\ j=1}}^{\infty} j\, u_{i,j}\, x^i\, t^{j-1} = \sum_{i,j=0}^{\infty} (j+1)\, u_{i,j+1}\, x^i\, t^j,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{\substack{j=0\\ i=2}}^{\infty} i(i-1)\, u_{i,j}\, x^{i-2}\, t^j = \sum_{i,j=0}^{\infty} (i+2)(i+1)\, u_{i+2,j}\, x^i\, t^j.$$

Подставляя эти разложения в уравнение $u_t = u_{xx}$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем последовательность рекуррентных соотношений

$$(j+1)u_{i,j+1} = (i+2)(i+1)u_{i+2,j}, \qquad (\mathbf{R}_1)$$

где $i, j = 0, 1, \ldots$. При $t = 0$ и $|x| < 1$ согласно начальному условию имеем:

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_{i,0}\, x^i = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots .$$

Следовательно,

$$u_{i,0} = \begin{cases} (-1)^s & \text{при} \quad i = 2s, \\ 0 & \text{при} \quad i = 2s+1. \end{cases} \qquad (\mathbf{R}_2)$$

Из ($\mathbf{R}_1$)–($\mathbf{R}_2$) заключаем, что

$$u_{2s+1,k} = 0, \quad u_{2s,k} = (-1)^{k+s} \frac{(2s+2k)!}{(2s)!k!}$$

при $s, k = 0, 1, 2, \ldots$. Следовательно, гипотетическое разложение функции $u(x,t)$ в степенной ряд с необходимостью имеет следующий вид:

$$u(x,t) = \sum_{k,s=0}^{\infty} (-1)^{k+s} \frac{(2s+2k)!}{(2s)!k!} x^{2s} t^k.$$

По предположению ряд справа обязан абсолютно сходиться, на самом же деле он расходится в любой окрестности начала координат. Полагая $x = 0$, получаем

$$u(0,t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{k!} t^k.$$

Проверьте самостоятельно, что на любом отрезке вида $|t| \leqslant \varepsilon$ ряд в правой части расходится. $\square$

Отметим, что в рассмотренном примере теорема Коши — Ковалевской к задаче Коши неприменима, ибо начальные данные здесь заданы при $t = 0$, т.е. на характеристической для исходного уравнения поверхности.

6^0. Приведем пример, подтверждающий, что *решение задачи Коши для уравнения теплопроводности, вообще говоря,* *неединственно.* Рассмотрим однородное уравнение теплопроводности с нулевыми данными Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{при} \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 0 & \text{при} \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Тождественно нулевая функция, очевидно, является решением этой задачи. С другой стороны, имеется нетривиальное ее решение, определяемое формулой

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k}, \tag{7}$$

где функция $f(t)$ равна нулю при $t \leqslant 0$, а при $t > 0$ задается равенством $f(t) = e^{-1/t^m}$ (здесь $m > 1$).

Задача. *Доказать, что функция $f(t)$ бесконечно дифференцируема на вещественной оси и при любом натуральном k справедлива оценка*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(t)| \leqslant M k^{\varkappa k + 1} A^k, \quad \varkappa = 1 + \frac{1}{m}, \tag{8}$$

где M и A — постоянные, от k не зависящие.

Из серии неравенств (8) вытекает, что при фиксированном $t > 0$ ряд (7) сходится абсолютно при всех вещественных x. Имеем, очевидно:

$$\Big| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k} \Big| \leqslant M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{\varkappa k+1}}{(2k)!} A^k |x|^{2k}.$$

Радиус сходимости степенного ряда в правой части бесконечен:

$$a_k = \frac{k^{\varkappa k+1} A^k}{(2k)!} \quad \Rightarrow \quad R = \lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{a_{k+1}} = +\infty.$$

Последнее равенство справедливо в силу условия $m > 1$.

Взяв в (7) $t = 0$, получим

$$f^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow \quad u(x, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} = 0.$$

Далее, ряд (7) можно почленно дифференцировать любое число раз, получая при этом абсолютно сходящиеся ряды. Учитывая это, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k+1)}(t)}{(2k)!} x^{2k}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} == \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(t)}{(2k-2)!} x^{2k-2}.$$

Сделав замену $k' = k - 1$, придем к равенству

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{f^{(k'+1)}(t)}{(2k')!} x^{2k'} = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Таким образом, *функция* $u(x, t)$, *задаваемая рядом* (7), *решает однородное уравнение теплопроводности, обращается в нуль при* $t = 0$ *и при этом нетривиальна*.

7^0. Чтобы обеспечить единственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности, необходимо искомую функцию $u(x, t)$ подчинить дополнительным условиям. Сформулируем эти условия чуть позже, а пока установим важный *принцип максимума*, справедливый для решений однородного уравнения теплопроводности.

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, Q — цилиндр в полупространстве $t > 0$ с основанием Ω: $Q = \{(x, t) \mid x \in \Omega, \quad t > 0\}$. Обозначим через D_T часть Q, заключенную между плоскостями $t = 0$ и $t = T$:

$$D_T = \{(x, t) \in Q \mid 0 < t < T\}.$$

Часть границы D_T, состоящую из точек Ω и точек боковой поверхности Q, обозначим через Γ. Иными словами, положим

$$\Gamma = \{(x,t) \in \partial D_T \mid t \neq T \quad \text{или} \quad (t = T \,\text{и}\, x \in \partial\Omega)\}.$$

Теорема (принцип максимума). *Функция u, имеющая внутри D_T непрерывные вторые производные, непрерывная в замыкании D_T и удовлетворяющая однородному уравнению теплопроводности, наибольшее и наименьшее значения на компакте $\overline{D}_T$ принимает либо на нижнем основании Ω цилиндра D_T, либо на его боковой поверхности, т.е. на множестве Γ.*

Доказательство. Ограничимся рассмотрением наибольшего значения. Утверждение о наименьшем значении сводится к случаю наибольшего заменой функции $u(x,t)$ на $-u(x,t)$.

Пусть M — наибольшее значение $u(x,t)$ на $\overline{D}_T$, а m — наибольшее значение $u(x,t)$ на Γ:

$$M = \max_{(x,t)\in\overline{D}_T} u(x,t), \quad m = \max_{(x,t)\in\Gamma} u(x,t).$$

Числа m и M конечны, а из вложения $\Gamma \subset \overline{D}_T$ вытекает, что $m \leqslant M$.

Предположим, что имеет место строгое неравенство $m < M$. Тогда найдется такая точка (x_0,t_0), что $0 < t_0 \leqslant T$, а x_0 лежит строго внутри Ω и при этом $u(x_0,t_0) = M$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$v(x,t) = u(x,t) + \frac{M-m}{2nd^2}|x-x_0|^2,$$

где через d обозначен диаметр ограниченной области Ω. Ясно, что $0 < d < +\infty$. В (x_0,t_0) значения $u(x,t)$ и $v(x,t)$ совпадают:

$$v(x_0,t_0) = M = u(x_0,t_0).$$

В силу предположения, что $m < M$, справедливы неравенства

$$\max_{(x,t)\in\Gamma} v(x,t) \leqslant \max_{(x,t)\in\Gamma} u(x,t) + \frac{M-m}{2nd^2} \max_{x\in\Omega} |x - x_0|^2 \leqslant$$

$$\leqslant m + \frac{M-m}{2nd^2} d^2 = \frac{M}{2n} + \frac{2n-1}{2n} m < M.$$

Следовательно, функция $v(x,t)$, как и $u(x,t)$, не может принимать наибольшее на $\overline{D}_T$ значение в какой-либо точке на Γ.

В то же время, в силу непрерывности $v(x,t)$, в компакте $\overline{D}_T$ обязательно найдется такая точка (x_1, t_1), что

$$v(x_1, t_1) = \max_{(x,t)\in\overline{D}_T} v(x,t).$$

При этом с необходимостью $0 < t_1 \leqslant T$, а x_1 лежит строго внутри Ω. Как известно из анализа, в точке максимума (x_1, t_1) вторые производные функции $v(x,t)$ неположительны. В частности,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}(x_1, t_1) \leqslant 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Следовательно, лапласиан от $v(x,t)$ в точке (x_1, t_1) также неположителен: $\Delta v(x_1, t_1) \leqslant 0$. Первая же производная $\partial v/\partial t$ в точке максимума (x_1, t_1) неотрицательна. Точнее, если $0 < t_1 < T$, то $\frac{\partial v}{\partial t}(x_1, t_1) = 0$. Если же $t_1 = T$, то $\frac{\partial v}{\partial t}(x_1, T) \geqslant 0$. Таким образом, всегда справедливо неравенство

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \Delta v\right)(x_1, t_1) \geqslant 0. \tag{9}$$

С другой стороны, из определения $v(x,t)$ имеем равенство

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \Delta v = \left(\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u\right) - a^2 \frac{M-m}{2nd^2} \Delta(|x - x_0|^2).$$

Функция $u(x,t)$, по условию, решает однородное уравнение теплопроводности и поэтому выражение в круглых скобках равно нулю. Таким образом, имеем:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2\Delta v = -a^2\frac{M-m}{2nd^2}\cdot 2n < 0. \tag{10}$$

Последнее неравенство вытекает из предположения, что $M > m$.

Неравенства (9) и (10) взаимоисключающие, и, следовательно, неравенство $M > m$ не выполняется.

Таким образом, $M = m$, т.е. принцип максимума и в самом деле справедлив. □

Лекция 18.

ТЕМА: Задачи для уравнения теплопроводности **8**^{0}. Единственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в классе ограниченных функций. Следствие. **9**^{0}. Корректность задачи Коши в классе ограниченных функций. **10**^{0}. Определение класса $M_\sigma(T)$. Формулировка теоремы Тихонова. **11**^{0}. Задача Коши для неоднородного уравнения теплопроводности (принцип Дюамеля). **12**^{0}. Пример решения задачи Коши методом разделения переменных. Следствие о преобразовании Фурье фундаментального решения.

8^0. Установим *единственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в классе ограниченных функций*. Для заданного конечного положительного числа T условимся говорить, что *функция* $v(x,t)$ *принадлежит классу* $M_0 = M_0(T)$ *ограниченных функций*, если она ограничена по модулю в полосе $\{(x,t) \mid x \in \mathbb{R}^n,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$:

$$M = \sup_{0 \leqslant t \leqslant T,\, x \in \mathbb{R}^n} |v(x,t)| < +\infty.$$

Теорема (единственности в классе $M_0(T)$)**.** *Пусть* $\varphi(x)$ *— непрерывная и ограниченная на* $\mathbb{R}^n$ *функция. Тогда решение задачи Коши*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u & \text{при} \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x) & \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

в классе $M_0(T)$ *ограниченных функций единственно.*

Доказательство. Пусть $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ — два ограниченных при $0 \leqslant t \leqslant T$ решения уравнения теплопроводности с одинаковым условием при $t = 0$, т.е.

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T,\, x \in \mathbb{R}^n} |u_j(x,t)| = M_j < +\infty, \quad j = 1, 2,$$

и при этом

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_j}{\partial t} = a^2 \Delta u_j \quad \text{при} \quad t > 0, \\ u_j(x,0) = \varphi(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Разность $w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial w}{\partial t} - a^2 \Delta w = 0 \quad \text{при} \quad t > 0, \quad w(x,0) = 0.$$

При этом функция $w(x,t)$ принадлежит классу $M_0(T)$:

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T,\, x \in \mathbb{R}^n} |w(x,t)| \leqslant M_1 + M_2 = 2M < +\infty.$$

Задавшись положительным L, рассмотрим вспомогательную функцию

$$v(x,t) = \frac{4nM}{L^2} \left(\frac{|x|^2}{2n} + a^2 t \right), \quad L > 0.$$

Здесь $M = (M_1 + M_2)/2$ — параметр из предыдущей оценки. Легко убедиться, что $v(x,t)$ — это решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \Delta v = \frac{4nM}{L^2} \left(a^2 - \frac{a^2}{2n} \Delta \left[|x|^2 \right] \right) = 0.$$

Кроме того $v(x,0) \geqslant 0 = w(x,0)$, а при $0 \leqslant t \leqslant T$ справедливо:

$$v(x,t)\big|_{|x|=L} \geqslant 2M \geqslant |w(x,t)|\Big|_{|x|=L}.$$

Разность $u(x,t) = v(x,t) - w(x,t)$ в ограниченном замкнутом цилиндре

$$\overline{D}_T = \{(x,t) \mid |x| \leqslant L, 0 \leqslant t \leqslant T\}$$

удовлетворяет следующим условиям

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u & \text{при} \quad |x| < L,\ 0 < t \leqslant T, \\ u(x,0) \geqslant 0 & \text{при} \quad |x| < L, \\ u(x,t)\big|_{|x|=L} \geqslant 0 & \text{при} \quad 0 < t \leqslant T. \end{cases}$$

По принципу максимума функция $u(x,t)$, будучи решением однородного уравнения теплопроводности, достигает минимального на замкнутом цилиндре $\overline{D}_T$ значения либо при $t = 0$, либо при $|x| = L$. Но на указанных множествах функция $u(x,t)$ неотрицательна. Следовательно, $u(x,t)$ неотрицательна и всюду в $\overline{D}_T$, т.е.

$$w(x,t) \leqslant v(x,t) \quad \text{при} \quad |x| \leqslant L,\ 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Аналогично доказывается, что

$$-w(x,t) \leqslant v(x,t) \quad \text{при} \quad |x| \leqslant L,\ 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Таким образом, для любого $L > 0$ справедлива оценка

$$|w(x,t)| = \max\{-w(x,t), w(x,t)\} \leqslant$$
$$\leqslant v(x,t) = \frac{M}{L^2}\left(2|x|^2 + 4na^2 t\right),$$

где $|x| \leqslant L$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Применим эту оценку в фиксированной точке (x_0, t_0), где $0 \leqslant t_0 \leqslant T$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда для всех L с условием $L \geqslant |x_0|$ получим

$$|w(x_0,t_0)| \leqslant \frac{2M}{L^2}\left(|x_0|^2 + 2na^2 t_0\right).$$

Устремляя здесь L к $+\infty$, получим в пределе: $w(x_0,t_0) = 0$. Следовательно, в полосе $0 \leqslant t \leqslant T$ функция $w(x,t)$ тождественно нулевая. Иными словами, при $0 \leqslant t \leqslant T$ решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ обязаны совпадать. $\square$

Отметим, что *интеграл Пуассона ограничен, если ограничена соответствующая ему функция* $\varphi(\xi)$.

Следствие. *Единственное в классе* $M_0(T)$ *ограниченных функций решение задачи Коши для уравнения теплопроводности задается интегралом Пуассона.*

9^0. Покажем, что в классе $M_0(T)$ ограниченных функций решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u & \text{при} \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x) & \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

непрерывно зависит от начальных данных. Иными словами, докажем, что *в* $M_0(T)$ *задача Коши для уравнения теплопроводности корректна*.

По условию, функция $\varphi(x)$ непрерывна и ограничена в $\mathbb{R}^n$:

$$M = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x)| < +\infty.$$

Как установлено, в $M_0(T)$ решение рассматриваемой задачи Коши существует, единственно и представимо интегралом Пуассона:

$$u(x,t) = \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \right)^n \int e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi)\, d\xi, \qquad t > 0.$$

Учитывая положительность фундаментального решения для уравнения теплопроводности, имеем для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $t > 0$:

$$|u(x,t)| \leqslant M \int G(x-\xi, t)\, d\xi = M.$$

Следовательно, справедлива оценка

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T,\, x\in\mathbb{R}^n} |u(x,t)| \leqslant M = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|.$$

Это означает, что интеграл Пуассона действительно непрерывно зависит от вариаций функции $\varphi = \varphi(x)$. Таким образом, задача Коши для уравнения теплопроводности в классе $M_0(T)$ ограниченных функций корректна.

10^0. Единственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности имеет место в классах, более широких, чем класс $M_0(T)$. Приведем здесь точную формулировку соответствующего результата.

Для заданного $\sigma \geqslant 0$ определим функциональный класс

$$M_\sigma(T) = \{u(x,t) \mid \exists A, a > 0\colon\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n \sup_{0\leqslant t\leqslant T} |u(x,t)| \leqslant Ae^{a|x|^\sigma}\}.$$

Класс $M_\sigma(T)$ — это линейное пространство и, если $\sigma \leqslant \sigma_1$, то $M_\sigma \subset M_{\sigma_1}$. При $\sigma = 0$ получим рассмотренное в предыдущей теореме пространство $M_0(T)$ ограниченных в полосе $0 \leqslant t \leqslant T$ функций.

Теорема (А.Н. Тихонов). *В классе $M_2(T)$ может существовать не более одного решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.*

11^0. Задача Коши для *неоднородного уравнения теплопроводности* решается с помощью *принципа Дюамеля*.

Задача. *Пусть функция $f = f(x,t)$ принадлежит классу $M_0(T)$. Тогда решение задачи Коши*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u + f(x,t) & \textit{при} \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0 & \textit{при} \quad x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

существует в классе $M_0(T)$*, единственно в нем и задается формулой*

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\xi,\tau)}{(2a\sqrt{\pi(t-\tau)})^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}}\, d\xi\, d\tau.$$

12^0. В ряде случаев единственное в классе $M_0(T)$ решение задачи Коши для уравнения теплопроводности удобно искать методом разделения переменных. Проиллюстрируем это на примере следующей задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = 0 & \text{при} \quad t > 0, \\ u(x,0) = e^{i\xi x} & \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Здесь $\xi \in \mathbb{R}^n$ — заданный вектор, $\xi x = \sum\limits_{i=1}^n \xi_i x_i$. Ясно, что функция $\varphi(x) = e^{i\xi x}$ непрерывна и ограничена в $\mathbb{R}^n$. Следовательно, у рассматриваемой задачи Коши в классе ограниченных функций существует единственное решение.

Будем искать его в виде $u(x,t) = T(t)e^{i\xi x}$. Учитывая, что $\Delta_x(e^{i\xi x}) = -|\xi|^2 e^{i\xi x}$, получим после подстановки в уравнение теплопроводности:

$$T'(t)e^{i\xi x} + a^2|\xi|^2 T(t)e^{i\xi x} = 0.$$

Таким образом, для наших целей достаточно потребовать выполнения условий

$$\begin{cases} T'(t) + a^2|\xi|^2 T(t) = 0, & t > 0, \\ T(0) = 1. \end{cases}$$

Решая эту задачу, получаем $T(t) = e^{-a^2|\xi|^2 t}$ и далее:

$$u(x,t) = e^{-a^2|\xi|^2 t} e^{i\xi x}.$$

Это — ограниченная при $t \geqslant 0$ функция, и по теореме единственности других решений в $M_0(T)$ у рассматриваемой задачи Коши нет.

Из полученной формулы для $u(x,t)$ получаем, в частности, полезное равенство

$$\frac{1}{(2a\sqrt{\pi}t)^n} \int e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}} e^{i\xi y}\, dy = e^{-a^2 t|\xi|^2} e^{i\xi x}. \qquad (\widehat{\mathbf{G}})$$

Слева здесь выписан интеграл Пуассона, соответствующий функции $\varphi(x) = e^{i\xi x}$, справа же — только что найденное его представление.

Формула $(\widehat{\mathbf{G}})$ *дает явный вид преобразования Фурье фундаментального решения уравнения теплопроводности*.

Список литературы

1. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М.: Мир. 1966. 351 с.

2. Бхатнагар П. Нелинейные волны в одномерных диспергирующих системах. М.: Мир, 1983. 136 с.

3. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1990. 432 с.

4. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. 512 с.

5. Габов С.А. Введение в теорию нелинейных волн. М.: Изд-во МГУ, 1988. 176 с.

6. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979. 391 с.

7. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. Метод обратной задачи, М.: Наука, 1980. 320 с.

8. Кузнецов Е.А. Методические указания по специальному курсу "Теория солитонов". Новосиб. гос. ун-т им. Ленин. комсомола, Каф. теорет. физики .— Новосибирск : НГУ, 1986. 43 с.

9. Рысков Н.М., Трубецков Д.И.. Нелинейные волны. М.: Наука, 2000. 272 с.

10. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1992. 431 с.

11. Соболев С.Л. Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций. М.: Наука, 1989. 254 с.

12. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. 808 с.

13. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.

14. Шаповалов А.В. Введение в нелинейную физику. Томск, Изд-во ТПУ, 2002. 129 с.