УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ (2012–2013)

НЕКОТОРЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. Вывод уравнения малых поперечных колебаний струны. Волновое уравнение. Начальные данные. Краевые условия (закрепленный край, свободный край, упругое соединение). Вывод системы уравнений гидродинамики (уравнения движения, уравнение неразрывности). Вывод уравнения теплопроводности, уравнение диффузии, стационарный случай. Уравнение Лапласа.

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ. Общий вид системы уравнений m-го порядка: операторная запись, линейные и квазилинейные системы. Характеристический полином, характеристические направления, уравнение конуса характеристических нормалей, определение и уравнение характеристических поверхностей. Системы уравнений первого порядка: общий вид, уравнения конуса характеристических нормалей и характеристических поверхностей. Определение симметрической t-гиперболической системы. Система уравнений акустики: вывод из системы уравнений гидродинамики, векторная, покомпонентная и матричная формы записи; уравнения конуса характеристических нормалей и характеристических поверхностей. Система уравнений одномерной газовой динамики: векторная, покомпонентная и матричная формы записи, уравнения конуса характеристических нормалей и характеристических поверхностей.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА: КЛАССИФИКАЦИЯ И ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ. Общий вид линейного уравнения второго порядка, уравнение конуса характеристических нормалей, уравнения характеристических поверхностей. Примеры (волновое уравнение, уравнение теплопроводности, уравнение Лапласа). Классификация уравнений второго порядка (характеристический полином, его каноническая форма). Эллиптические, гиперболические и параболические уравнения (в точке и в области). Уравнения с постоянными коэффициентами. Канонический вид уравнения второго порядка (определение; вопрос приводимости к каноническому виду). Общее линейное уравнение в случае двух независимых переменных (вид, дискриминант, уравнения конуса характеристических нормалей и характеристик). Теорема о приведении к каноническому виду. Лемма о замене переменных. Приведение к каноническому виду в гиперболическом, эллиптическом и параболическом случаях.

ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ. Формула общего решения и ее графическая интерпретация. Вывод формулы Даламбера для решения задачи Коши однородного уравнения. Принцип конечной зависимости. Принцип Дюамеля. Смешанная задача на полуоси с условием закрепления в начале координат. Смешанная задача на конечном отрезке с условием закрепления на краях: решение с помощью формулы Даламбера.

ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО И ДВУМЕРНОГО ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ. Постановка задачи Коши в случае трех пространственных переменных. Определение сферического среднего, вывод для него дифференциального уравнения в переменных (x, y, z, r). Сферическое среднее от решения задачи Коши как решение специальной смешанной задачи в квадранте $r \geq 0$, $t \geq 0$. Решение задачи Коши как предел сферических средних при $r \to 0$. Формула Кирхгофа. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для трехмерного волнового уравнения. Принцип Гюйгенса, передний и задний волновые фронты. Сферические, цилиндрические и плоские волны. Вывод формулы Пуассона в случае двух пространственных переменных методом спуска. Принцип Дюамеля. Запаздывающий потенциал.

ИНТЕГРАЛЫ ЭНЕРГИИ ДЛЯ РЕШЕНИЙ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ. Конические характеристические поверхности для многомерного волнового уравнения. Лемма об энергетической оценке. Принцип конечной зависимости решения волнового уравнения от начальных данных. Единственность решения задачи Коши. Смешанная задача для волнового уравнения с нулевыми колебаниями на боковой границе цилиндра. Единственность ее решения. Закон сохранения энергии для решений волнового уравнения с финитными начальными данными.

ПОНЯТИЕ О КОРРЕКТНЫХ И НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. ПРИМЕР АДАМАРА. Пример и определение корректной задачи. Пример Леви (решение не существует). Пример задачи Коши с данными на характеристической плоскости (решение не единственно). Задача Коши для трехмерного волнового уравнения с данными при $x = 0$ (пример Адамара, отсутствие непрерывной зависимости). Задача Коши для системы уравнений Коши–Римана: пример Адамара. Формулировка теоремы Коши–Ковалевской для одного уравнения с данными Коши на плоскости. Критерий корректности задачи Коши для волнового уравнения с данными на плоскости. Пространственно подобные поверхности.

РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ ФУРЬЕ. Постановка смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка. Разделение переменных в уравнении. Задача о собственных значениях, разложения по собственным функциям. Поиск решения всей задачи в виде ряда по собственным функциям. Колебания прямоугольной мембраны с закрепленными краями. Колебания круглой мембраны с закрепленными краями.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ. Постановка задачи Коши. Инвариантность множества решений относительно специальных преобразований плоскости. Вывод формулы для фундаментального решения уравнения теплопроводности. Интеграл Пуассона как решение задачи Коши. Пример Ковалевской. Пример неединственности решения задачи Коши для уравнения теплопроводности. Принцип максимума. Единственность решения задачи Коши в классе ограниченных функций. Корректность задачи Коши в классе ограниченных функций. Определение класса $M_\sigma(T)$. Формулировка теоремы Тихонова. Принцип Дюамеля для неоднородного уравнения теплопроводности. Пример решения задачи Коши методом разделения переменных. Смешанная задача для параболического уравнения второго порядка в цилиндре.

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. Незамкнутость пространства решений линейного однородного уравнения по равномерной норме. Принцип двойственности. Классы $C^\infty(\Omega)$ и $C_0^\infty(\Omega)$. Отображение пространства $L_{loc}(\Omega)$ в пространство линейных на $C_0^\infty(\Omega)$ функционалов. Лемма дю Буа-Реймонда. Пространство основных функций и множество линейных непрерывных на нем функционалов. Дельта функция Дирака. Пространство $\mathfrak{D}'(\Omega)$, сходимость и полнота. Дельта функция Дирака как предел последовательности локально суммируемых функций. Равенство обобщенных функций в области. Носитель обобщенной функции. Финитные, регулярные и сингулярные обобщенные функции. Линейная замена переменной в обобщенных функциях и умножение на бесконечно дифференцируемую функцию. Дифференцирование обобщенных функций и свойства оператора обобщенного дифференцирования. Дифференциальные операторы на $\mathfrak{D}'$ и фундаментальные решения. Дифференцирование кусочно гладких функций. Фундаментальные решения обыкновенных дифференциальных операторов, оператора теплопроводности, а также одномерного и двумерного волновых операторов.

РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЛАПЛАСА И ПУАССОНА. Определения (уравнения Лапласа, Пуассона, гармонические функции, частное решение $U_n(x)$). Первая и вторая формулы Грина (вывод из формулы Гаусса — Остроградского). Лемма об интегральном представлении. Следствие о фундаментальности решения $U_n(x)$. Определения ньютонова потенциала, потенциалов простого и двойного слоёв. Простейшие свойства гармонических функций. Бесконечная дифференцируемость гармонических функций. Теорема о среднем для гармонических функций. Принцип максимума для решений уравнения Лапласа. Постановки основных краевых задач для уравнения Лапласа. Единственность решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

ФУНКЦИЯ ГРИНА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ. Определение функции Грина задачи Дирихле. Свойства функции Грина (неотрицательность, симметричность и т.п.). Представление гладкого решения внутренней задачи Дирихле через её функцию Грина.

ФУНКЦИЯ ГРИНА И ВНУТРЕННЯЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ШАРА. Построение функции Грина для шара методом изображений. Представление решения внутренней задачи Дирихле интегралом Пуассона. Интеграл Пуассона в сферических ($n = 3$) и полярных ($n = 2$) координатах. Гармоничность и непрерывность интеграла Пуассона с непрерывным весом.

СВОЙСТВА ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. Лемма, обратная теореме о среднем для гармонических функций. Первая теорема Гарнака. Неравенства Гарнака. Вторая теорема Гарнака. Теорема Лиувилля.

ВНЕШНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА. Лемма о решении задачи Дирихле во внешности шара. Лемма о поведении гармонической функции на бесконечности. Теоремы единственности для внешней и внутренней задач Неймана.

УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА В ОРТОГОНАЛЬНЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ. Теорема о преобразовании лапласиана при переходе к новым координатам. Ортогональные координаты, коэффициенты Ламе и вид лапласиана в ортогональных координатах. Определение сферических координат и их ортогональность. Коэффициенты Ламе сферических координат. Оператор Лапласа в сферических координатах. Разделение переменных в уравнении Лапласа в многомерных сферических координатах. Радиальная и угловая части оператора Лапласа.

СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В n-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ. Определение сферических гармоник как решений задачи на собственные значения для оператора Лапласа — Бельтрами. Пространство $L_2(S)$. Ортогональность сферических гармоник разных порядков. Определение шаровых многочленов. Формулировка теоремы о связи шаровых многочленов и сферических функций. Лемма о действии оператора Лапласа на произведение однородных функций. Доказательство теоремы о связи шаровых многочленов и сферических функций. Формулировка теоремы о представлении Гаусса. Лемма об области значений оператора Q_0. Доказательство теоремы о представлении Гаусса. Формула для размерности пространства шаровых многочленов заданной степени. Теорема о полноте последовательности сферических гармоник в $L_2(S)$. Теорема о последовательности собственных чисел угловой части оператора Лапласа. Канонический базис пространства сферических гармоник в случае двух независимых переменных.

СФЕРИЧЕСКИЕ ГАРМОНИКИ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ. Схема отыскания базиса в пространстве сферических гармоник заданного порядка. Теорема об ограниченных решениях уравнения Лежандра (полиномы Лежандра). Формула Родрига для полиномов Лежандра. Присоединенные функции Лежандра. Канонический базис пространства сферических гармоник в случае трех независимых переменных.

ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА. Определение и простейшие свойства пространства $L_p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$. Определение регулярной обобщенной производной локально суммируемой функции. Свойства оператора обобщенного дифференцирования. Определение пространства Соболева $W_p^{(m)}(\Omega)$ и его полнота. Свойства пространств $W_p^{(m)}(\Omega)$.

СРЕДНИЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА. Ядра усреднения, примеры, определение средней функции. Бесконечная дифференцируемость и финитность средних функций. Сходимость средних функций к исходной непрерывной в равномерной норме. Невозрастание L_p-нормы при усреднении. Сходимость средних функций к исходной в $L_p(\Omega)$. Лемма о перестановочности операций обобщенного дифференцирования и усреднения. Теорема о плотности бесконечно дифференцируемых функций в пространствах Соболева. След бесконечно дифференцируемой функции на гладкой гиперповерхности, теорема вложения. Следы на границе функций из пространств Соболева.

ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ. Множество допустимых функций, заданных на границе области. Интеграл Дирихле. Постановки обобщенной задачи Дирихле и сопутствующей вариационной задачи. Единственность решения вариационной задачи. Теорема о минимизирующей последовательности. Свойства решения вариационной задачи (лемма об ортогональности решения функциям из $W_2^{(1)}(\Omega)$ с нулевым следом на границе; лемма о гармоничности внутри области средних функций для решения вариационной задачи; лемма о непрерывности внутри области решения вариационной задачи; лемма о гармоничности внутри области решения вариационной задачи). Единственность решения обобщенной задачи Дирихле. Принцип Дирихле. Пример Адамара недопустимой функции.

ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА. Постановка обобщенной задачи Неймана. Слабое решение задачи Неймана. Постановка сопутствующей вариационной задачи. Теорема существования и единственности решения сопутствующей вариационной задачи. Теорема существования и единственности слабого решения задачи Неймана. Теорема о свойствах решения вариационной задачи.

ПРЕДМЕТ И ЭФФЕКТЫ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН. Предмет теории нелинейных волн, примеры. Эффекты, характерные для теории нелинейных волн. Дисперсия волн: дисперсионное соотношение для линейных уравнений и систем, примеры, размывание профиля волны в среде с дисперсией, нелинейный случай. Разрушение волны: задача Коши для уравнения простых волн, ее решение методом характеристик. Обобщенное решение уравнения простых волн. Условия на разрыве и поиск точки разрыва.

МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КДФ: ВВЕДЕНИЕ. Канонический вид и законы сохранения уравнения КдФ. Постановки прямой и обратной задач рассеяния. Схема решения задачи Коши для уравнения КдФ методом обратной задачи.

МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КДФ: ОБОСНОВАНИЕ. Свойства одномерного оператора Шредингера с быстроубывающим потенциалом. Определение пары Лакса. Критерий унитарной эквивалентности реализаций оператора Шредингера при разных значениях времени. Примеры операторов, образующих пары Лакса. Следствия о собственных числах. Уравнение для собственных функций оператора с постоянными во времени собственными числами. Зависимость от времени данных рассеяния в случае быстроубывающего потенциала. Функции Йоста. Матрица рассеяния, связь ее элементов с коэффициентами отражения и прохождения. Связь между потенциалом и ядром в треугольном представлении первой функции Йоста. Связь ядра в треугольном представлении первой функции Йоста с данными рассеяния (уравнение Гельфанда—Левитана—Марченко).

СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КДФ. Задача Коши для уравнения КдФ со специальными начальными данными (постановка, решение прямой задачи рассеяния с начальным потенциалом, зависимость данных рассеяния от времени). Построение и решение уравнения Гельфанда—Левитана—Марченко для положительного значения временной переменной. Определение солитона, качественный характер взаимодействия двух солитонов. Общий вид решения уравнения КдФ типа безотражательного потенциала. Определение $\boldsymbol{N}$-солитонного решения уравнения КдФ. Асимптотика такого решения на бесконечности.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В СРЕДАХ С ДИССИПАЦИЕЙ: УРАВНЕНИЕ БЮРГЕРСА. Точные решения уравнения Бюргерса. Преобразование Коула—Хопфа. Поведение решений уравнения Бюргерса при малой вязкости. Стационарная ударная волна.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Владимиров В.С., Жаринов В.В.** Уравнения математической физики. Физматлит, 2008.

2. **Годунов С.К.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.

3. **Михайлов В.П.** Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.

4. **Соболев С.Л.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1992.

5. **Соболев С.Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

6. **Олейник О.А.** Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Бином. Лаборатория знаний. 2007.

7. **Габов С.А.** Введение в теорию нелинейных волн. М.: Изд-во МГУ, 1988.

8. **Абловиц М., Сигур Х.** Солитоны и метод обратной задачи. Пер. с англ. М.: Мир, 1987.

Рекомендуемые темы семинарских занятий и упражнений

1. Уравнения с частными производными первого порядка, задача Коши. Уравнение Гамильтона — Якоби. (2 занятия).

2. Классификация уравнений и систем, характеристические поверхности. (1 занятие.) Приведение к каноническому виду уравнений и систем. Общее решение. (2 занятия, [**1**], § 1; [**2**], гл.1, § 2.)

3. Одномерное волновое уравнение, задача Коши, формула Даламбера, принцип Дюамеля, задачи в квадранте. (1 занятие.) Многомерное волновое уравнение, его характеристики, задача Коши, формулы Кирхгофа и Пуассона, принцип Дюамеля. (1 занятие, [**2**], гл.4, § 12, п.2; гл.6, § 21.)

4. Корректность задач математической физики. Пример Адамара. (1 занятие, [**1**], § 7, № 137–144.)

5. Смешанная задача для уравнений гиперболического и параболического типов. Решение методом Фурье. (3 занятия, [**2**], л.6, § 20.)

6. Уравнение теплопроводности, задача Коши, формула Пуассона, принцип Дюамеля, принцип максимума. (1 занятие, [**2**], гл.4, § 13; [**1**], § 7.)

7. Пространство обобщенных функций $\mathfrak{D}'$, действия с обобщенными функциями. Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. (2 занятия, [**2**], гл.3, § 6–9, § 11.)

8. Краевые задачи для уравнения Лапласа. Метод разделения переменных (квадрат, круг, кольцо). (1 занятие.) Уравнение Лапласа в ортогональных криволинейных координатах, коэффициенты Ламе. Уравнение Лапласа в сферических координатах, сферические гармоники. Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах. (2 занятия, [**2**], гл.5, § 16.)

9. Функция Грина. Метод изображений. (1 занятие, [**2**], гл.5, § 17; [**1**], § 6.)

10. Свойства гармонических функций (формула Пуассона, теорема о среднем, неравенства Гарнака, теорема Лиувилля). (1 занятие, [**1**], § 6.)

11. Смешанная задача для гиперболических систем с двумя переменными: постановка, приходящие и уходящие характеристики, соответствующие им римановы инварианты, интеграл энергии, диссипативные краевые условия, априорные оценки. (3 занятия.) [**1**], § 2–4.)

12. Функциональные пространства $L_p(\Omega)$, $L_{loc}(\Omega)$, $C_0^\infty(\Omega)$. Регулярная обобщенная производная функции из $L_{loc}(\Omega)$. Пространство Соболева $W_p^{(m)}(\Omega)$. (1 занятие) Ядра усреднения, свойства оператора усреднения в $L_p(\Omega)$, решение одномерных линейных дифференциальных уравнений в классах $W_p^{(m)}[a,b]$. (1 занятие.) Одномерные теоремы вложения, операторы продолжения в классах $W_p^{(m)}$. След функции из $W_p^{(m)}$. (1 занятие, [**2**], гл.2, § 4, п.3; [**1**], § 9.)

13. Вариационные методы решения краевых задач для уравнения Лапласа. Допустимые и недопустимые функции. Принцип Дирихле. (1 занятие, [**2**], гл.5, § 19)

ЛИТЕРАТУРА

1. **Годунов С.К., Золотарева Е.В.** Сборник задач по уравнениям математической физики. Новосибирск: НГУ, 1987.

2. **Владимиров В.С., Михайлов В.П. и др.** Сборник задач по уравнениям математической физики / под редакцией Владимирова В.С. М.: Физматлит, 2001.

3. **Вентцель Т.Д., Горицкий А.Ю. и др.** Сборник задач по уравнениям с частными производными / под редакцией Шамаева А.С. М.: Бином. Лаборатория знаний. 2005.

Программу составил
дфмн проф. кафедры диф. уравнений — В. Л. Васкевич

16 мая 2012 г.