

## Программа курса «Топологические пространства»

4 курс, 2 поток (010100.62 математика, бакалавриат)

лектор Филатов П.С.

зимний семестр 2012/13 учебного года.

### Глава 1. Топологические пространства.

#### § 1. Фильтры.

Лемма об индуктивности множества фильтров. Критерий максимальности фильтра. Лемма об образе ультрафильтра.

#### § 2. Предтопологии и топологии.

Лемма о полноте решётки предтопологий. Лемма о сравнении топологий. Лемма о задании топологии совокупностью открытых множеств. Теорема о полноте решётки топологий. Лемма о внутренности и замыкании. Лемма о сходимости фильтра. Теорема Биркгофа.

#### § 3. Непрерывность.

Лемма об эквивалентных определениях непрерывности. Лемма о суперпозиции непрерывных отображений. Лемма о непрерывности тождественного отображения. Лемма о сохранении непрерывности. Теорема о прообразе топологии. Теорема об образе топологии. Теоремы о задании топологии требованием непрерывности семейства отображений.

#### § 4. Типы топологических пространств.

Лемма об эквивалентных определениях отделимого пространства. Лемма об эквивалентных определениях хаусдорфова пространства. Лемма об эквивалентных определениях  $T_3$ -пространства. Малая лемма Урысона. Лемма о задании функции лебеговыми множествами. Лемма о сравнении функций, заданных лебеговыми множествами. Лемма о непрерывности функции, заданной лебеговыми множествами. Большая лемма Урысона. Теорема Урысона.

#### § 5. Компактность.

Лемма о точках прикосновения базиса фильтра. Теорема об эквивалентных критериях компактности. Теорема Вейерштрасса (об образе компактного множества при непрерывном отображении). Лемма об абсолютности понятия компактности. Теорема Тихонова (о компактности произведения). Лемма о компактности замкнутого подмножества компактного пространства. Лемма о замкнутости компактного подмножества хаусдорфова пространства. Теорема о нормальности хаусдорфова компактного пространства.

#### § 6. Покрытия и разбиения единицы.

Лемма Дьедонне. Лемма Лефшеца. Лемма о поточечной суммируемости семейства функций. Лемма о разбиении единицы в нормальном пространстве. Лемма о срезывателе. Теорема о разбиении единицы в  $\mathbb{R}^n$ .

### Глава 2. Двойственность и ее приложения.

#### § 1. Векторные топологии.

Лемма о свойствах векторной топологии. Теорема о строении векторной топологии. Теорема о полноте решётки векторных топологий. Теорема о прообразе векторной топологии. Лемма о произведении векторных топологий. Лемма о регулярности топологического векторного пространства. Принцип равномерной ограниченности в топологических векторных пространствах.

## § 2. Локально выпуклые топологии.

Теорема о строении локально выпуклой топологии. Теорема о непустоте субдифференциала. Лемма о топологии полунормированного пространства. Теорема о совпадении локально выпуклой топологии с топологией ассоциированного мультинормированного пространства. Теорема о сохранении точных верхних границ при штриховании. Принцип равномерной ограниченности в мультинормированных пространствах.

## § 3. Двойственность векторных пространств.

Лемма о бра-топологии. Лемма о слабых топологиях. Теорема о дуализациях.

## § 4. Топологии, согласованные с двойственностью.

Лемма о топологии Макки. Теорема Макки — Аренса. Теорема Макки. Теорема о строгой отделимости. Теорема Мазура.

## § 5. Поляры.

Лемма о свойствах поляр. Критерий Акилова. Теорема о биполяре. Теорема об абсолютной биполяре.

## § 6. Слабо компактные выпуклые множества.

Лемма о слабой компактности субдифференциала. Теорема о строении субдифференциала. Лемма о свойствах крайних множеств. Теорема Крейна — Мильмана. Лемма о полярах конического отрезка и абсолютно выпуклого множества. Теорема Алаоглу — Бурбаки.

## § 7. Рефлексивные пространства.

Критерий Какутани. Теорема Петтиса.

## § 8. Пространство $C(Q, \mathbb{R})$ .

Свойства подрешёток. Обобщённая теорема Дини. Лемма Какутани. Теорема Стоуна. Леммы о носителе функционала. Лемма де Бранжа. Теорема Стоуна — Вейерштрасса. Теорема Титце — Урысона. Теорема Стоуна — Вейерштрасса в  $C(Q, \mathbb{C})$ .

## Глава 3. Обобщенные функции.

### § 1. Пространства основных функций.

Лемма о метризуемости и полноте пространства  $\mathcal{D}(Q)$ . Лемма о пространстве  $\mathcal{D}$  на объединении открытых множеств. Топология индуктивного предела.

### § 2. Распределения (обобщённые функции).

Топологии пространства распределений. Теорема о совпадении топологии индуктивного предела с топологией Макки  $\tau(\mathcal{D}(\Omega), \mathcal{D}'(\Omega))$ . Критерий ограниченности множества в топологии индуктивного предела. Носитель распределения  $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . Лемма о свойствах финитного распределения.

## ЛИТЕРАТУРА:

1. Кутателадзе С.С. Основы функционального анализа. Изд. 5-е. Новосибирск: Институт математики СО РАН, 2006.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Изд. 7-е. М.: Физматлит, 2009
3. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Лань, 2005.
4. Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу. М.: МЦНМО, 2004.

5. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. Изд. 4-е. С.-Петербург: БХВ, 2004.
6. Антоневич А.Б., Князев П.Н., Радыно Я.В. Задачи и упражнения по функциональному анализу. М.: УРСС, 2004.
7. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Том 1: Общая теория. М.: УРСС, 2004.