ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ
КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

4-5 семестры

Комплексные числа, операции над ними и их изображение на плоскости. Топология комплексной плоскости. Сфера Римана и стереографическая проекция. Компактность. Предел и непрерывность функции комплексного переменного. Жордановы кривые на плоскости. Гладкие кривые и лемма о стандартном радиусе (без доказательства). Предел последовательности. Числовые ряды с комплексными членами. Функциональные ряды, абсолютная и равномерная сходимость. Степенные ряды. Первая теорема Абеля. Радиус сходимости. Формула Коши-Адамара. Экспонента и показательная форма записи комплексных чисел. Производная по комплексному переменному. Необходимые и достаточные условия комплексной дифференцируемости в точке. Понятие аналитической функции. Геометрический смысл модуля и аргумента производной аналитической функции. Обращение аналитических функций, области однолистности. Понятие конформного отображения. Конформность отображения, осуществляемого однолистной аналитической функцией. Непрерывные ветви многозначных функций. Выделение ветвей функции $Arg(Z)$. Целые степенные функции. Элементарное понятие о римановой поверхности и точках ветвления. Римановы поверхности комплексного логарифма и корня натуральной степени. Функция Жуковского и ее обращение. Линейные и дробно-линейные отображения. Групповые свойства. Геометрические свойства дробно-линейных отображений: круговое свойство, принцип симметрии, инвариантность ангармонического отношения четверки точек.

Комплексный криволинейный интеграл и его основные свойства. Теорема Коши для односвязной и многосвязной области, лемма о треугольнике, лемма о треугольнике, лемма Гурса и доказательство теоремы Коши. Интегральная формула Коши. Теорема о среднем. Понятие интеграла типа Коши (комплексного потенциала), ядро Коши. Аналитичность комплексного потенциала и существование производных всех порядков. Бесконечная дифференцируемость аналитической функции. Интегральная формула Коши для производных аналитической функции. Принцип максимума модуля аналитической функции. Теоремы Вейерштрасса о рядах и последовательностях аналитических функций. Первообразная, существование первообразной у аналитической функции в односвязной области. Теорема Морера. Формула Ньютона-Лейбница. Интегральные формулы Шварца и Пуассона. Сингулярный интеграл в смысле главного значения по Коши, теорема существования. Граничные значения комплексного потенциала (интеграла типа Коши), формулы Сохоцкого-Племеля, формула скачка. Теорема Привалова о гельдеровости граничных значений интеграла типа Коши (без доказательства).

Разложение аналитической функции в ряд Тейлора. Внутренние теоремы единственности. Нули аналитической функции, порядок нуля. Неравенства Коши и теорема Лиувилля. Разложение аналитической функции в кольце (теорема Лорана). Изолированные особые точки аналитической функции, лорановское разложение в изолированной особой точке. Классификация изолированных особых точек. Порядок полюса. Связь между нулями и полюсами. Существенно особые точки, теорема Пикира (без доказательства). Разложение в бесконечно удаленной изолированной особой точке. Понятие целой и мероморфной функции. Теорема Миттаг-Лефлера. Вычет аналитической функции в изолированной особой точке. Основная теорема о вычетах. Вычисление вычета в полюсах. Вычет в бесконечно удаленной точке. Вычисление некоторых контурных интегралов с помощью вычетов. Лемма Жордана. Логарифмический вычет и принцип аргумента. Теорема Руше, ее применение к доказательству основной теоремы алгебры. Основное свойство производной однолистной аналитической функции. Интегральная формула Коши для области, содержащей бесконечно удаленную точку. Условие продолжения непрерывной функции с границы области до аналитической функции во всей области. Разложение в ряд простейших дродей мероморфных функций на примере функций $1/sin^2(Z)$ и $ctg(z)$. Аналитическое продолжение. Понятие общей и полной аналитической функции. Теорема монодромии. Основные теоремы геометрической теории функций: принцип непрерывности, принцип симметрии Римана-Шварца, лемма Шварца, принцип компактности, теорема Вейерштрасса для последовательности однолистных аналитических функций. Аналитическое продолжение через аналитическую кривую (теорема Шварца). Граничная теорема единственности. Теорема Римана о конформных отображениях. Теоремы о соответствии границ при конформных отображениях областей.

Гармонические функции их связь с аналитическими функциями. Восстановление аналитической функции по ее действительной части. Основные свойства гармонических функций: теорема о среднем, принцип экстремума, теоремы сходимости. Понятие об основных краевых задачах теории функций. Задача Дирихле, существование и единственность решения. Решение задачи Дирихле в круге с помощью формулы Пуассона. Функция Грина, выражение решения задачи Дирихле в произвольной жордановой области через ее функцию Грина. Задача Неймана ее решение для случая единичного круга (формула Дини). Сведение задачи Неймана к задаче Дирихле. Кусочно-аналитические функции и решение задачи о скачке. Однородная и неоднородная задача сопряжения, задача Римана-Гильберта (обзор результатов).

Литература

1. Билута П.А. *Лекции по теории функций комплексного переменного.* Изд-во НГУ, Новосибирск, 1991.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного.* М.: Наука, 1973.
3. Бицадзе А.В. *Основы теории аналитических функций комплексного переменного*. М.: Наука, 1972.
4. Волковыский Л.И., Лунц Г.А., Араманович И.Г. *Сборник по теории функций комплексного переменного*. М.: Наука, 1970.

Дополнительная литература

5. Привалов И.И. *Введение в теорию функций комплексного переменного.* М.: Наука, 1977.
6. Шабат Б.В. *Введение в комплексный анализ*. М.: Наука, 1969.
7. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Проблемы гидродинамики и их математические модели.* М.: Наука, 1973.
8. Евграфов М.А. *Аналитические функции*. М.: Наука, 1965.
9. Тичмарш Е. *Теория функций*. М.: Наука, 1980.
10. Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* М.: Наука, 1966.
11. Коппенфельс В., Штальман Ц. *Практика конформных отображений.* М.: ИЛ, 1963.
12. Спрингер Г. *Введение в теорию римановых поверхностей*. М.: ИЛ, 1963.
13. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения*. М.: Наука, 1968.

Методические пособия

14. Билута П.А. *Многозначные функции*. Новосибирск: НГУ, 1988.
15. Пятков С.Г. *Теория функций комплексного переменного*. Части 1,2. Новосибирск: НГУ, 1997.