

# ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

*Лектор: профессор П.А. Билута*

## 4 семестр

### 1. Комплексные числа

Комплексные числа и основные операции над ними. Геометрическое изображение комплексных чисел. Комплексная плоскость. Интерпретация Римана комплексных чисел и расширенная комплексная плоскость. Множества точек на расширенной комплексной плоскости. Понятие области. Лемма Гейне-Бореля, принцип Больцано-Вейерштрасса (без доказательства).

Последовательность комплексных чисел и ее предел. Критерий Коши. Ряды комплексных чисел. Абсолютно сходящиеся ряды.

### 2. Функции комплексного переменного

Понятие функции комплексного переменного. Предел функции в точке, непрерывность функции в точке, равномерная непрерывность функции. Свойства непрерывной на замкнутом множестве функции.

Функциональный ряд. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда непрерывных функций. Степенной ряд. Теорема Коши-Адамара. Радиус сходимости степенного ряда. Первая и вторая теоремы Абеля. Определение некоторых элементарных функций с помощью степенных рядов.

Кривая Жордана. Гладкая и кусочно-гладкая кривые Жордана. Понятие стандартного радиуса гладкой кривой Жордана.

### 3. Аналитические функции

Моногенность. Условия Коши-Римана. Формальные производные. Определение аналитической функции. Аналитичность суммы степенного ряда. Однолистные функции. Обращение функции комплексного переменного. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Конформное отображение. Конформность отображения, осуществляемого однолистной аналитической функцией. Одно свойство главной линейной части приращения аналитической функции. Области однолистности и обращение степенной и экспоненциальной функций. Понятие точки ветвления многозначной функции. Римановы поверхности корня и логарифма.

### 4. Интегрирование функций комплексного переменного

Определение криволинейных интегралов первого и второго рода. Понятие интеграла функции комплексного переменного по кривой и его основные свойства. Лемма Гурса. Теорема Коши. Обобщенная теорема Коши для односвязной и многосвязной области. Интегральная формула Коши. Интеграл типа Коши. Существование у аналитической функции производной любого порядка. Теорема Морера. Понятие неопределенного интеграла и формула Ньютона-Лейбница. Теорема Тейлора о разложении аналитической

функции в степенной ряд. Внутренняя теорема единственности аналитической функции. Нули аналитической функции. Неравенства Коши и теорема Лиувилля.

Гармонические функции и их свойства. Восстановление аналитической функции по ее действительной части. Теорема о среднем для гармонической и аналитической функций. Принцип максимума модуля для аналитической и принцип экстремума для гармонической функций. Интегральные формулы Шварца и Пуассона. Первая и вторая теоремы Вейерштрасса о рядах аналитических функций. Принцип компактности.

## 5 семестр

### 5. Ряд Лорана. Теория вычетов

Теорема Лорана. Классификация изолированных особых точек аналитической функции. Связь между нулем и полюсом функций  $f(z)$  и  $1/f(z)$ . Поведение аналитической функции в окрестности изолированной особой точки, теорема Сохоцкого-Вейерштрасса. Бесконечно удаленная изолированная особая точка. Понятие аналитичности функции в бесконечно удаленной точке. Понятие целой и мероморфной функций.

Понятие вычета функции относительно изолированной особой точки и его вычисление. Основная теорема о вычетах. Вычет функции относительно бесконечно удаленной изолированной особой точки. Интегральная формула Коши для бесконечной области. Формула логарифмического вычета. Принцип аргумента. Теорема Руше. Необращение в нуль производной однолистной аналитической функции. Приложение теории вычетов к вычислению интегралов, лемма Жордана.

### 6. Основные принципы конформного отображения

Аналитическое продолжение, понятие и методы. Понятие полной аналитической функции в смысле Вейерштрасса. Теорема монодромии. Принцип непрерывности. Граничная теорема единственности аналитической функции. Принцип симметрии Римана-Шварца. Аналитическое продолжение действительной аналитической функции действительного переменного. Принцип Шварца. Конформное отображение односвязных областей. Лемма Шварца. Лемма об однолистности предела последовательности однолистных функций. Признак сходимости к нулю последовательности аналитических функций. Построение вспомогательной "раздувающей" функции. Теорема Римана. Соответствие границ при конформном отображении.

### 7. Краевые задачи теории функций

Задача Дирихле (первая краевая задача). Решение задачи Дирихле для круга и для односвязной жордановой области. Построение конформного отображения жордановой области на единичный круг с помощью решения задачи Дирихле. Функция Грина. Задача Неймана (вторая краевая задача). Необходимое условие разрешимости задачи Неймана. Формула Дини.

Интеграл в смысле главного значения по Коши. Формулы Сохоцкого-Племеля. Свойства интеграла типа Коши в замкнутой области. Понятие кусочно-аналитической функции. Нахождение кусочно-аналитической функции, имеющей конечный порядок на бесконечности, по заданному скачку. Однородная задача сопряжения и союзная с ней задача. Каноническое решение. Неоднородная задача сопряжения. Задача Римана-Гильберта. Сингулярное интегральное уравнение нормального типа.

*В каждом семестре студенты должны сдать семестровое задание.*

### **Литература**

1. Билута П.А. *Лекции по теории функций комплексного переменного*. Новосибирск: НГУ, 1992.
2. Бицадзе А.В. *Основы теории аналитических функций комплексного переменного*. М.: Наука, 1964.
3. Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного*. М.: Наука, 1966.
4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного*. М.: Наука, 1965.
5. Маркушевич А.И. *Теория аналитических функций*. М.: Наука, 1968.
6. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения*. М.: Наука, 1969.
7. Билута П.А. *Многозначные функции*. Новосибирск: НГУ, 1988.
8. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. *Сборник задач по теории функций комплексного переменного*. М.: Наука, 1970.
9. Чуешев В.В., Чуешева Н.А. *Справочное пособие по теории функций комплексного переменного*. Части I, II, III. Кемерово, 1993.