**ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ**

**КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО**

**2 поток, 2012/2013 и 2013/2014 учебные годы**

*Лектор --- доцент П. А. Билута*

**4-й семестр**

**1. Комплексные числа**

Комплексные числа и основные операции над ними. Геометрическое изображение комплексных чисел. Комплексная плоскость. Интерпретация Римана комплексных чисел и расши-ренная комплексная плоскость. Множества точек на расширенной комплексной плоскости. Понятие области. Лемма Гейне-Бореля, принцип Больцано-Вейерштрасса, лемма о вложенных прямоугольниках (треугольниках) (без доказательства).

Последовательность комплексных чисел и ее предел. Критерий Коши. Ряды комплексных чисел. Абсолютно сходящиеся ряды.

**2. Функции комплексного переменного**

Понятие функции комплексного переменного. Предел функции в точке, непрерывность функции в точке, равномерная непрерывность функции на множестве. Свойства непрерывной на замкнутом множестве функции.

Функциональный ряд. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда непрерывных функций. Степенной ряд. Теорема Коши-Адамара. Радиус сходимости степенного ряда. Теоремы Абеля. Определение некоторых элементарных функций с помощью степенных рядов.

Кривая Жордана. Гладкая и кусочно-гладкая кривые Жордана. Понятие стандартного радиуса гладкой кривой Жордана, соответствующего острому углу.

**3. Аналитические функции**

Моногенность. Условия Коши-Римана. Формальные производные. Определение аналитической функции. Аналитичность суммы степенного ряда. Однолистные функции. Обращение функции комплексного переменного. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Конформное отображение. Конформность отображения, осуществляемого однолистной аналитической функцией. Одно свойство главной линейной части приращения аналитической функции. Области однолистности и обращение степенной и экспоненциальной функций. Понятие точки ветвления многозначной функции. Римановы поверхности корня и логарифма.

Дробно-линейные отображения и его основные свойства. Общий вид дробно-линейного отображения верхней полуплоскости на единичный круг и единичного круга на себя.

**4. Интегрирование функции комплексного переменного**

Определение криволинейных интегралов первого и второго рода. Понятие интеграла функции комплексного переменного по кривой и его основные свойства. Лемма Гурса. Теорема Коши. Обобщенная теорема Коши для односвязной и многосвязной области. Интегральная формула Коши. Интеграл типа Коши. Бесконечная дифференцируемость аналитической функции. Теорема Морера. Понятие неопределенного интеграла и формула Ньютона-Лейбница. Теорема Тейлора о разложении аналитической функции в степенной ряд. Внутренняя теорема един-ственности аналитической функции. Теорема о среднем для аналитической функции. Принцип максимума модуля аналитической функции. Нули аналитической функции. Неравенства Коши и теорема Лиувилля. Теоремы Вейерштрасса о рядах аналитических функций. Принцип компакт-ности.

Теорема Лорана. Классификация изолированных особых точек аналитической функции. Связь между нулем и полюсом функций *f(z)* и *1/f(z).* Поведение аналитической функции в окрестности изолированной особой точки, теорема Сохоцкого-Вейерштрасса. Бесконечно удаленная изолированная особая точка. Понятие аналитической функции в бесконечно удаленной точке. Понятия целой и мероморфной функций.

***Вопросы для коллоквиума***

*1. Принцип максимума модуля аналитической функции.*

*2. Первая теорема Вейерштрасса о рядах аналитических функций.*

*3. Принцип компактности.*

**5-й семестр**

**5. Элементы теории вычетов**

Понятие вычета функции относительно изолированной особой точки и его вычисление. Основная теорема о вычетах. Приложение теории вычетов к вычислению интегралов, лемма Жордана. Вычет функции относительно бесконечно удаленной изолированной особой точки. Интегральная формула Коши для внешней области. Формула логарифмического вычета. Принцип аргумента. Теорема Руше. Необращение в нуль производной однолистной аналитической функ-ции.

**6. Основные принципы конформного отображения**

Аналитическое продолжение, понятие и методы. Понятие полной аналитической функции в смысле Вейерштрасса. Теорема монодромии. Принцип непрерывности. Граничная теорема единственности аналитической функции. Принцип симметрии Римана-Шварца. Аналитическое продолжение действительной аналитической функции действительного переменного. Принцип Шварца. Конформное отображение односвязных областей. Лемма Шварца. Лемма об однолистности предела последовательности однолистных функций. Построение вспомогательной «раздувающей» функции. Теорема Римана. Соответствие границ при конформном отображении. Принцип взаимно однозначного соответствия.

**7. Краевые задачи теории функций**

Гармонические функции и их свойства. Восстановление аналитической функции по ее действительной части. Теорема о среднем для гармонической функции. Принцип экстремума для гармонической функции. Интегральные формулы Шварца и Пуассона.

Задача Дирихле (первая краевая задача). Решение задачи Дирихле для круга. Суще-ствование и единственность решения задачи Дирихле для односвязной жордановой области. Построение конформного отображения жордановой области на единичный круг с помощью решения задачи Дирихле. Функция Грина. Задача Неймана (вторая краевая задача). Необходимое условие разрешимости задачи Неймана. Формула Дини.

Интеграл в смысле главного значения по Коши. Формулы Сохоцкого-Племеля. Свойства интеграла типа Коши в замкнутой области. Понятие кусочно-аналитической функции. Нахождение кусочно-аналитической функции, имеющей конечный порядок на бесконечности, по заданному скачку. Однородная задача сопряжения и союзная с ней задача. Каноническое решение. Неоднородная задача сопряжения. Задача Римана-Гильберта. Сингулярное интегральное уравнение нормального типа. Решение характеристического уравнения. Решение уравнения, союзного с характеристическим. Три основные теоремы Нётера.

***Вопросы для коллоквиума***

*1. Лемма Шварца.*

*2. Лемма об однолистности предела последовательности однолистных функций.*

*3. Теорема Римана.*

**Библиографический список основной литературы.**

1. Билута П. А. Лекции по теории функций комплексного переменного.

Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2005.

2. Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Физматлит, 2002.

**Библиографический список дополнительной литературы.**

3. Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного.

М.: Наука, 1964.

4. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного.

М.: Наука, 1966.

5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965.

6. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. М.: Наука, 1968.

7. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1969.

8. Билута П. А. Многозначные функции. Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 1988.

9. Чуешев В. В., Чуешева Н. А. Справочное пособие по теории функций комплексного переменного. Кемерово, 1993, Ч. I-III.

**ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ**

**КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО**

**1 поток, 4-5 семестры**

**20113/2014 и 2014/2015 учебные годы**

*Лектор --- профессор А. Д. Медных*

**1. Комплексные числа**

Комплексные числа и основные операции над ними. Геометрическое изображение комплексных чисел. Комплексная плоскость. Интерпретация Римана комплексных чисел. Расши-ренная комплексная плоскость. Множества точек на расширенной комплексной плоскости. Понятие области. Лемма Гейне-Бореля, принцип Больцано-Вейерштрасса, лемма о вложенных прямоугольниках (без доказательства).

Последовательность комплексных чисел и ее предел. Критерий Коши. Ряды комплексных чисел. Абсолютно сходящиеся ряды.

**2. Функции комплексного переменного**

Понятие функции комплексного переменного. Предел функции в точке, непрерывность функции в точке, равномерная непрерывность функции на множестве. Свойства непрерывной на замкнутом множестве функции.

Функциональный ряд. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда непрерывных функций. Степенной ряд. Теорема Коши-Адамара. Радиус сходимости степенного ряда. Теоремы Абеля. Определение некоторых элементарных функций с помощью степенных рядов.

Кривая Жордана. Гладкая и кусочно-гладкая кривые Жордана. Понятие стандартного радиуса гладкой кривой Жордана.

**3. Аналитические функции**

Моногенность. Условия Коши-Римана. Формальные производные. Определение аналитической функции. Аналитичность суммы степенного ряда. Однолистные функции. Обращение функции комплексного переменного. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Конформное отображение. Конформность отображения, осуществляемого однолистной аналитической функцией. Одно свойство главной линейной части приращения аналитической функции. Области однолистности и обращение степенной и экспоненциальной функций. Понятие точки ветвления многозначной функции. Римановы поверхности корня и логарифма.

Дробно-линейные отображения и его основные свойства. Общий вид дробно-линейного отображения верхней полуплоскости на единичный круг и единичного круга на себя.

**4. Интегрирование функции комплексного переменного**

Определение криволинейных интегралов первого и второго рода. Понятие интеграла функции комплексного переменного по кривой и его основные свойства. Лемма Гурса. Теорема Коши. Обобщенная теорема Коши для односвязной и многосвязной области. Интегральная формула Коши. Интеграл типа Коши. Бесконечная дифференцируемость аналитической функции. Теорема Морера. Понятие неопределенного интеграла и формула Ньютона-Лейбница. Теорема Тейлора о разложении аналитической функции в степенной ряд. Неравенства Коши и теорема Лиувилля. Внутренняя теорема единственности аналитической функции. Нули аналитической функции. Теорема о среднем для аналитической функции. Принцип максимума модуля аналити-ческой функции. Теоремы Вейерштрасса о рядах аналитических функций. Интегральные формулы Шварца и Пуассона.

**5. Ряд Лорана. Элементы теории вычетов**

Теорема Лорана. Классификация изолированных особых точек аналитической функции. Связь между нулем и полюсом функций *f(z)* и *1/f(z).* Поведение аналитической функции в окрестности изолированной особой точки, теорема Сохоцкого-Вейерштрасса. Бесконечно удаленная изолированная особая точка. Понятие аналитической функции в бесконечно удаленной точке. Понятия целой и мероморфной функций.

Понятие вычета функции относительно изолированной особой точки и его вычисление. Основная теорема о вычетах. Приложение теории вычетов к вычислению интегралов, лемма Жордана. Вычет функции относительно бесконечно удаленной изолированной особой точки. Интегральная формула Коши для внешней области. Формула логарифмического вычета. Принцип аргумента. Теорема Руше. Необращение в нуль производной однолистной аналитической функ-ции.

**6. Основные принципы конформного отображения**

Аналитическое продолжение, понятие и методы. Понятие полной аналитической функции в смысле Вейерштрасса. Теорема монодромии. Принцип непрерывности. Граничная теорема единственности аналитической функции. Принцип симметрии Римана-Шварца. Аналитическое продолжение действительной аналитической функции действительного переменного. Принцип Шварца. Конформное отображение односвязных областей. Принцип компактности. Лемма Шварца. Лемма об однолистности предела последовательности однолистных функций. Построе-ние вспомогательной «раздувающей» функции. Теорема Римана. Соответствие границ при конформном отображении. Принцип взаимно однозначного соответствия.

**7. Краевые задачи теории функций**

Гармонические функции и их свойства. Восстановление аналитической функции по ее действительной части. Теорема о среднем для гармонической функции. Принцип экстремума для гармонической функции. **.**

Задача Дирихле (первая краевая задача). Решение задачи Дирихле для круга. Суще-ствование и единственность решения задачи Дирихле для односвязной жордановой области. Построение конформного отображения жордановой области на единичный круг с помощью решения задачи Дирихле. Функция Грина. Задача Неймана (вторая краевая задача). Необходимое условие разрешимости задачи Неймана. Формула Дини.

Интеграл в смысле главного значения по Коши. Формулы Сохоцкого-Племеля. Свойства интеграла типа Коши в замкнутой области. Понятие кусочно-аналитической функции. Нахождение кусочно-аналитической функции, имеющей конечный порядок на бесконечности, по заданному скачку. Однородная задача сопряжения и союзная с ней задача. Каноническое решение. Неоднородная задача сопряжения. Задача Римана-Гильберта. Сингулярное интегральное уравнение нормального типа. Решение характеристического уравнения. Решение уравнения, союзного с характеристическим.

*Вопросы для коллоквиумов*

*1. Теорема Коши.*

*2. Принцип максимума модуля аналитической функции.*

*3. Первая теорема Вейерштрасса о рядах аналитических функций.*

*4. Лемма Шварца.*

*5. Принцип компактности.*

*6. Теорема Римана.*

**Основная литература.**

1. Билута П. А. Лекции по теории функций комплексного переменного.

Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2005.

2. Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Физматлит, 2002.

**Дополнительная литература.**

3. Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного.

М.: Наука, 1964.

4. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного.

М.: Наука, 1966.

5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965.

6. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. М.: Наука, 1968.

7. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1969.

8. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М:, Физматгиз, 1960.

9. Чуешев В. В., Чуешева Н. А. Справочное пособие по теории функций комплексного переменного. Кемерово, 1993, Ч. I-III.

**Программа курса лекций по ТФКП**

**2 поток, 20113/2014 и 2014/2015 учебные годы**

*Лектор --- к.ф.-м.н. Д.Г. Кузин*

**4 семестр**

**Глава 0. Введение**

Комплексные числа и операции над ними. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная запись комплексного числа. Комплексная плоскость. Сфера Римана. Стереографическая проекция и расширенная комплексная плоскость. Топологические понятия на плоскости. Последовательности и ряды комплексных чисел. Критерий Коши. Абсолютно сходящиеся ряды. Функции комплексной переменной. Предел функции в точке, равномерная непрерывность функции на множестве. Кривые Жордана. Гладкая кривая Жордана и ее стандартный радиус. Кусочно-гладкие кривые Жордана. Функциональные ряды. Признак Вейерштрасса. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда непрерывных функций. Степенные ряды. Формула Коши-Адамара. Радиус сходимости.

**Глава 1. Аналитические функции**

Комплексное дифференцирование. Условия Коши-Римана. Формальные производные. Понятие аналитической функции. Аналитичность суммы степенного ряда. Однолистные функции. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Понятие конформного отображения. Дробно-линейные отображения и их основные свойства: круговое свойство, принцип симметрии, инвариантность ангармонического отношения. Дробно-линейные отображения канонических областей. Обращение степенной и экспоненциальной функций. Понятие римановой поверхности.

**Глава 2. Теория интеграла Коши**

Определение комплексного интеграла и его простейшие свойства. Лемма Гурса. Теорема Коши. Обобщенная теорема Коши. Теорема Коши для многосвязной области. Интегральная формула Коши. Интеграл типа Коши и его основное свойство. Бесконечная дифференцируемость аналитической функции. Понятие неопределенного интеграла. Теорема Морера. Формула Ньютона-Лейбница. Ряд Тейлора. Неравенства Коши. Теорема Лиувилля. Внутренняя теорема единственности. Нули аналитических функций. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля аналитической функции. Теоремы Вейерштрасса о рядах аналитических функций.

**5 семестр**

**Глава 3. Ряды Лорана. Теория вычетов**

Теорема Лорана. Изолированные особые точки и их классификация. Поведение аналитической функции в окрестности ее изолированной особой точки, теорема Сохоцкого-Вейерштрасса. Бесконечно удаленная изолированная особая точка. Понятие вычета. Формулы для вычисления вычетов. Основная теорема Коши о вычетах. Теорема о сумме вычетов. Несобственный интеграл. Понятие интеграла в смысле главного значения по Коши. Лемма Жордана. Лемма о полувычете. Применение теории вычетов к вычислению несобственных интегралов. Формула логарифмического вычета. Принцип аргумента. Теорема Руше. Основная теорема алгебры. Основное свойство производной однолистной аналитической функции. Топологическое свойство аналитической функции. Мероморфные функции. Разложение функций 1/sin2 z и ctg z в ряд простых дробей.

**Глава 4. Основные принципы теории конформных отображений**

Лемма Шварца и ее обобщение. Теорема о конформных автоморфизмах единичного круга. Принцип компактности. Теорема о пределе последовательности однолистных аналитических функций. Лемма о раздутии. Теорема Римана: единственность, исключительные случаи, случай ограниченной области, общий случай. Понятие аналитического продолжения. Теорема монодромии. Принцип непрерывности. Граничная теорема единственности. Принцип симметрии Римана-Шварца. Вещественные аналитические функции. Принцип Шварца продолжения через аналитическую дугу. Граничное соответствие при конформных отображениях. Принцип взаимно-однозначного соответствия.

**Глава 5. Краевые задачи теории функций**

Гармонические функции и их основные свойства. Восстановление аналитической функции по ее действительной части. Интегральные формулы Шварца и Пуассона. Задача Дирихле. Решение задачи Дирихле для единичного круга. Существование и единственность решения задачи Дирихле. Функция Грина. Задача Неймана. Необходимое условие разрешимости задачи Неймана. Формула Дини. Граничные значения интеграла типа Коши. Формулы Сохоцкого-Племеля. Интегральная формула Коши для внешней области. Задача о восстановлении кусочно-аналитической функции по заданному скачку. Однородная задача сопряжения. Неоднородная задача сопряжения.

**Библиографический список основной литературы**

1. Билута П. А. Лекции по теории функций комплексного переменного. Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2005.

2. Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Физматлит, 2002.

**Библиографический список дополнительной литературы**

3. Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного.

М.: Наука, 1964.

4. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.

5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965.

6. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. М.: Наука, 1968.

7. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1969.

8. Билута П. А. Многозначные функции. Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 1988.

9. Чуешев В. В., Чуешева Н. А. Справочное пособие по теории функций комплексного переменного. Кемерово, 1993, Ч. I-III.

**Программа курса «Обратные задачи»**

**2 поток, 10 семестр, 2013/2014 учебный год**

*Лектор --- член-корр. РАН профессор С. И. Кабанихин*

1. Корректные, некорректные и условно-корректные задачи.
2. Обратные и некорректные задачи физики, геофизики, химии, томографии.
3. Множество корректности.
4. Условная устойчивость.
5. Примеры некорректных задач (дифференцирование, интерполяция, задача Коши для уравнения Лапласа).
6. Регуляризация. Примеры.
7. Обратная задача акустики.
8. Метод регуляризации А.Н. Тихонова.
9. Квазирешение. Метод В.К. Иванова.
10. Компактные операторы в сепарабельных гильбертовых пространствах и их свойства.
11. Некорректность операторного уравнения первого рода с компактным оператором.
12. Метод регуляризации М.М. Лаврентьева.
13. Операторное уравнение первого рода A(q) =f. Производная Фреше.
14. Целевой функционал J(q)= <A(q)-f, A(q)-f) и его градиент J’q.
15. Лемма о том, что если J’q не равен нулю, то существует p такое, что J(p)<J(q).
16. Формула градиента J’q = 2[A’q]\*[A(q)-f)].
17. Метод наискорейшего спуска.
18. Метод простой итерации (итерации Ландвебера).
19. Прямая и обратная задача для уравнения колебаний струны. Построение градиента целевого функционала.
20. Теоремы существования и единственности решения.
21. Метод обращения разностной схемы.
22. Сходимость по функционалу метода простой итерации.
23. Сходимость по функционалу метода наискорейшего спуска.
24. Оценка скорости сходимости по функционалу метода простой итерации.
25. Оценка скорости сходимости по функционалу метода наискорейшего спуска.
26. Модуль непрерывности обратного оператора и оценка условной устойчивости.
27. Обратная задача акустики. Сведение к системе интегральных уравнений Вольтера
28. Прямая и обратная задача для уравнения колебаний струны. Нахождение производной Фреше и обратного оператора.
29. Метод Ньютона-Канторовича.
30. Обратная задача акустики. Замена переменной и сведение к задаче Гурса.
31. Метод Гельфанда-Левитана в обратной задаче для уравнения колебаний струны.

Литература:

1. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи. Сибирское научное издательство, 2009, 450 стр.
2. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. Наука, 1984.