Программа курса

Вычислительные методы линейной алгебры

(Есть, также, Вопросы к экзамену)

2-й курс, 3-й семестр

Лектор: профессор С.Б. Сорокин

Часть 1. Численный анализ (Курс лекций)

Введение.

Численное моделирование и вычислительный эксперимент. Этапы решения прикладных задач на ЭВМ. Особенности машинной арифметики.

Тема 1. Алгебраические методы интерполирования.

Формулировка задачи алгебраического интерполирования. Теорема о существовании и единственности ее решения. Интерполяционный полином в форме Лагранжа. Постановка задачи о рекуррентном построении интерполяционного полинома и ее решение в простейших случаях. Разделенные разности. Эквивалентное представление разделенной разности k – того порядка. Интерполяционный полином в форме Ньютона. Оценка погрешности интерполирования. Постановка задачи оптимального выбора узлов интерполяции. Чебышевский альтернанс. Теорема о чебышевском альтернансе. Многочлен Чебышева, наименее уклоняющийся от нуля. Решение задачи оптимального выбора узлов интерполирования.

Тема 2. Численное интегрирование.

Квадратурные формулы. Интерполяционные квадратурные формулы. Алгебраическая степень точности квадратурной формулы. Теорема об алгебраической степени точности интерполяционной квадратурной формулы. Теорема о точности вычисления интеграла по интерполяционной квадратурной формуле. Квадратуры Гаусса наивысшей алгебраической степени точности. Теорема о возможной наивысшей алгебраической степени точности квадратурной формулы. Теоремы о необходимом и достаточном условиях существования квадратур наивысшей алгебраической степени точности. Теорема о существовании и единственности квадратуры Гаусса. Теорема о точности вычисления интеграла по квадратурной формуле Гаусса. Теорема о сходимости интерполяционных квадратурных формула с положительными весами. Положительность весов квадратур Гаусса. Понятие устойчивости квадратурных формул. Устойчивость интерполяционных квадратурных формула с положительными весами и квадратур Гаусса. Простейшие квадратурные формулы: прямоугольников (на одном узле), трапеций (на двух узлах), Симпсона (на трех узлах). Составные квадратурные формулы: прямоугольников, трапеций, Симпсона.

Тема 3. Численное дифференцирование.

Интерполяционные формулы численного дифференцирования. Метод неопределенных коэффициентов. Формулы численного дифференцирования, основанные на определении производной. Разностные отношения: вперед, назад, центральная разность. Погрешность вычисления производных с помощью разностных отношений. Порядок аппроксимации по h значения производной в точке. Разностные отношения высших порядков. Неустойчивость формул численного дифференцирования

Тема 4. Численные методы решения нелинейных уравнений.

Изолированный корень кратности p. Отделение (локализация) корней. Общие оценки погрешности приближения $\bar{x}$ к корню x. Метод деления пополам (бисекций). Сжимающее отображение. Неподвижная точка отображения. Теорема о неподвижной точке сжимающего отображения (принцип сжимающих отображений). Сведение задачи решения нелинейных уравнений к задаче поиска неподвижной точки отображения. Метод последовательных приближений (метод простой итерации) для решения нелинейных уравнений. Теоремы о достаточных условиях сходимости метода простой итерации. Метод Эйткена ускорения сходимости. Метод Ньютона. Теорема о достаточных условиях сходимости метода Ньютона. Оценки точности приближений, получаемых с помощью метода Ньютона. Квадратичная скорость сходимости метода Ньютона. Модификации метода Ньютона для отыскания кратных корней (метод Ньютона с параметром). Интерполяционные методы нахождения корней нелинейных уравнений (метод хорд, метод парабол).

Часть 2. Вычислительные методы линейной алгебры

Введение.

Классические задачи линейной алгебры. Корректная постановка задачи. Основные сведения о векторах и матрицах. Скалярное произведение векторов, норма вектора: аксиомы, примеры скалярных произведений, норм вектора и матрицы, эквивалентные нормы, константы эквивалентности. Симметричная матрица. Теорема о спектральных свойствах симметричной матрицы (формулировка). Положительно определенная матрица. Положительность собственных чисел симметричной положительно определенной матрицы. Норма вектора, порожденная симметричной положительно определенной матрицей. Вычисление констант эквивалентности для евклидовой (сферической) нормы вектора и нормы вектора, порожденной симметричной положительно определенной матрицей. Норма матрицы: аксиомы, норма матрицы как линейного отображения, примеры норм матрицы. Норма матрицы согласованная с нормой вектора и подчиненная норме вектора. Вычисление нормы матрицы (спектральной), подчиненной евклидовой (сферической) норме вектора. Спектральная норма симметричной матрицы. Определение числа обусловленности матрицы. Оценки возмущения решения системы линейных алгебраических уравнений при возмущении правой части и матрицы. Число обусловленности как коэффициент чувствительности погрешности в решении систем линейных алгебраических уравнений по отношению к возмущению входных данных. Число обусловленности в спектральной норме. Примеры задач, показывающие, что полученные оценки возмущения решения не могут быть улучшены.

Тема 1. Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений.

Правило Крамера, как пример алгоритма, неприемлемого для численной реализации. Теорема о LU разложении квадратной матрицы. Метод Гаусса для решения систем линейных алгебраических уравнений (схема единственного деления). Алгоритм вычисления определителя, основанный на схеме единственного деления. Вычисление обратной матрицы – алгоритм Гаусса-Жордана. Матричная форма метода Гаусса, как реализация теоремы о LU разложении. Теорема о LDU разложении. Теорема о LDL^* – разложении (разложение Холесского). Разложение симметричной положительно определенной матрицы вида $A = BB^*$, метод квадратного корня, связь обусловленности матрицы B с обусловленностью матрицы A. Связь числа обусловленности матрицы U из LU – разложения с числом обусловленности разлагаемой матрицы A. Метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу. Матрицы перестановок, матричная форма метода Гаусса с выбором главного элемента по столбцу. Ортогональные матрицы. Число обусловленности произведения

QA, где Q – ортогональная матрица. Матрицы вращения. Теорема о QR – разложении квадратной матрицы. Алгоритм ортогонализации Грамма - Шмидта. Матрицы отражения. Теорема о HR – разложении квадратной матрицы. Метод прогонки для решения систем линейных алгебраических уравнений с трехдиагональными матрицами: алгоритм, связь с LU – разложением в методе исключения Гаусса. Рекуррентная формула для вычисления главных миноров трехдиагональной матрицы. Матрицы со строгим диагональным преобладанием. Теорема об устойчивости решения системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей со строгим диагональным преобладанием. Обоснование алгоритма прогонки для матриц со строгим диагональным преобладанием: реализуемость, устойчивость обратного хода в методе прогонки. Принцип суперпозиции. Метод циклической прогонки: алгоритм, реализуемость в случае строгого диагонального преобладания. Алгоритм распараллеливания метода прогонки и его обоснование для систем со строгим диагональным преобладанием. Прямые методы, основанные на идее ортогонализации. Теорема о разложении решения по базису пространства Крылова. Метод минимальных итераций Ланцоша. Метод сопряженных градиентов.

Тема 2. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений.

Канонический вид двухслойного итерационного метода (процесса) для решения системы линейных алгебраических уравнений. Основные определения: вектор ошибки, сходимость, вектор невязки, матрица перехода, разрешающая матрица, стационарный и нестационарный, явные и неявные итерационные методы. Оценка скорости сходимости стационарного итерационного метода. Достаточное условие сходимости стационарного итерационного метода. Теорема о необходимом и достаточном условии сходимости стационарного итерационного метода. Константы энергетической эквивалентности. Метод простой итерации (Ричардсона): определение, достаточное условие сходимости, постановка задачи оптимизации метода, выбор оптимального параметра, оценка нормы оператора перехода и скорости сходимости при оптимальном параметре. Явный нестационарный итерационный метод с выбором в качестве параметров величин обратных к собственным числам матрицы, теоретические и практические аспекты его реализации. Метод простой итерации с чебышевским набором итерационных параметров: определение, постановка задачи оптимизации метода, выбор оптимального набора параметров, оценка нормы разрешающего оператора и скорости сходимости при оптимальном наборе параметров, устойчивый набор итерационных параметров. Определение функционала ошибки. Теорема об эквивалентности задач о нахождении решения системы линейных алгебраических уравнений и минимизации функционала ошибки. Вариационный принцип выбора параметров в явных нестационарных итерационных методах. Метод минимальных невязок: определение, выбор параметров, теорема о скорости сходимости для систем с положительно определенными матрицами. Метод скорейшего спуска: определение, выбор параметров, связь минимизируемого функционала с функционалом ошибки, вычислимость параметров, теорема о скорости сходимости для систем с симметричными, положительно определенными матрицами. Теорема Самарского о достаточном условии сходимости неявного двухслойного стационарного итерационного метода $(B > 0.5\tau A)$ (первая теорема Самарского). Необходимость условия $(B > 0.5\tau A)$ для симметричной, положительно определенной матрицы B. Теорема Самарского об энергетической эквивалентности (вторая теорема Самарского). Оптимизация неявных двухслойных итерационных методов. Метод Якоби для решения системы линейных алгебраических уравнений: определение, приведение к каноническому виду, необходимое и достаточное условие сходимости для систем с симметричными, положительно определенными матрицами (на основе первой теоремы Самарского). Лемма Гершгорина о локализации собственных чисел. Матрицы со строгим диагональным преобладанием. Следствие из леммы Гершгорина о невырожденности матрицы, обладающей свойством строгого диагонального преобладания. Неразложимые матрицы. Матрицы с нестрогим диагональным преобладанием. Теорема Таусски. Достаточные условия сходимости метода Якоби: сходимость для систем линейных алгебраических уравнений с матрицами, обладающими свойством строгого и нестрогого диагонального преобладания. Метод Зейделя (Гаусса-Зейделя) для решения системы линейных алгебраических уравнений: определение, приведение к каноническому виду, сходимость для систем с симметричными, положительно определенными матрицами (на основе первой теоремы Самарского). Сходимость метода Зейделя для систем линейных алгебраических уравнений с матрицами, обладающими свойством строгого диагонального преобладания. Метод релаксакции для решения системы линейных алгебраических уравнений: определение, приведение к каноническому виду, достаточное условие сходимости для систем с симметричными, положительно определенными матрицами (на основе первой теоремы Самарского). Попеременно-треугольный метод решения системы линейных алгебраических уравнений: алгоритм, достаточное условие сходимости для систем с симметричными, положительно определенными матрицами (на основе первой теоремы Самарского), оптимизация попеременно-треугольного метода. Метод переменных направлений для решения системы линейных алгебраических уравнений: алгоритм, теорема сходимости для систем с симметричными, положительно определенными матрицами, выбор оптимального параметра. Метод переменных направлений: сходимость, оптимизация.

Тема 3. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений с прямоугольными матрицами.

Обобщенное решение системы линейных алгебраических уравнений. Теорема о существовании обобщенного решения системы линейных алгебраических уравнений с прямоугольными матрицами. Обобщенное B – нормальное решение системы линейных алгебраических уравнений. Теорема о существовании и единственности обобщенного B – нормального решения. Система алгебраических уравнений для вычисления B – нормального решения, свойства матрицы этой системы. Метод регуляризации для нахождения обобщенного B – нормального решения. Теорема о сходимости регуляризованного решения к B – нормальному решению. Обобщенное нормальное решение. Выбор параметра в алгоритме регуляризации для нахождения обобщенного нормального решения для систем линейных алгебраических уравнений с прямоугольными матрицами.

Тема 4. Методы решения спектральных задач линейной алгебры.

Задача на собственные значения, характеристический многочлен, полная и частичная задачи на собственные значения. Вычисление приближения к собственному вектору по известному приближению к простому собственному числу. Степенной метод нахождения наибольшего собственного числа симметричной, положительно определенной матрицы, нахождение соответствующего собственного вектора. Метод обратной итерации нахождения наименьшего собственного числа симметричной, положительно определенной матрицы, нахождение соответствующего собственного вектора. Метод обратной итерации со сдвигом. Нахождение собственного числа симметричной, положительно определенной матрицы, ближайшего к наибольшему. Итерационный метод Якоби (вращений) решения полной проблемы собственных значений для симметричной матрицы: теорема об инвариантности сферической нормы матрицы относительно подобных преобразований вращения, алгоритм метода, стратегия выбора оптимального уничтожаемого элемента, скорость сходимости метода, приближения для собственных векторов. Теорема о спектральных свойствах конгруэнтных матриц (закон инерции, формулировка). Следствие закона инерции для LDL^* – разложения симметричной матрицы. Метод деления пополам (бисекций) в спектральной задаче для симметричной матрицы (алгоритм). Эквивалентность для матрицы A задач определения числа отрицательных ведущих элементов при реализации метода Гаусса и вычисления числа перемен знаков в последовательности главных миноров. Приведение симметричной матрицы к трехдиагональному виду ортогональными преобразованиями подобия (с помощью матриц вращения). Метод деления пополам решения полной проблемы в случае симметричной трехдиагональной матрицы: вычисление границ спектра, рекуррентное соотношение для вычисления последовательности главных миноров, два основных свойства элементов этой последовательности.

Литература

1. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1975.
2. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977.
3. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.
5. Годунов С.К. Решение систем линейных уравнений. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1980.
6. Годунов С.К., Антонов А.Г., Кирилюк О.П., Костин В.И. Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах. Новосибирск: Наука, 1988.
7. Икрамов Х.Д. Численные методы для симметричных линейных систем. М.: Наука, 1988.
8. Коновалов А.Н. Введение в вычислительные методы линейной алгебры. Новосибирск: ВО "Наука", Сибирская издательская фирма, 1993.
9. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1971.
10. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. М.: Мир, 1983.
11. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
12. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989.
13. Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения. М. :Мир, 1980.
14. Уилкинсон Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970
15. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Л.: Физматгиз, 1963.
16. Форсайт Дж., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. М.: Мир, 1969.