

Программа курса
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЯ И РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ
2006-2007

Глава 1. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Топология, топологическое пространство. Гомеоморфизм, сравнение топологий. Открытые и замкнутые множества. Внутренность, замыкание и граница множества. Непрерывные отображения.

Примеры топологических пространств. Дискретная топология. Метрические пространства, метризуемые топологии. Подпространства топологического пространства, индуцированная топология. Произведение топологических пространств. Факторпространство. Склеивание топологических пространств по непрерывному отображению. Конечный клеточный комплекс, полиэдр, эйлерова характеристика полиэдра. Шары, сферы, действительное и комплексное проективные пространства, лист Мебиуса, бутылка Клейна.

Связность. Связные топологические пространства, связные множества в топологическом пространстве. Сохранение связности при непрерывном отображении. Компоненты связности.

Компактность. Компактные топологические пространства и компактные множества в топологическом пространстве. Сохранение компактности при непрерывном отображении. Связь компактных и замкнутых множеств. Теоремы Вейерштрасса. Компактность произведения. Нормальность хаусдорфова компактного пространства. Компактные метрические пространства. Компактные множества в евклидовом пространстве.

Гомотопия и гомотопическая эквивалентность. Деформационный ретракт. Инвариантность гомотопического типа клеточного комплекса по отношению к гомотопии приклеивающих отображений.

Глава 2. ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Топологические многообразия. Карты, атласы. Гладкие многообразия. Гладкие отображения, диффеоморфизмы. Примеры гладких многообразий: евклидово пространство, сфера, проективные пространства, грассмановы многообразия. Произведение многообразий. Разбиение единицы.

Касательный вектор, касательное пространство многообразия в точке. Координаты касательного вектора в локальной системе координат, преобразование координат вектора при замене координат. Дифференциал гладкого отображения. Цепное правило. Теорема об обратной функции.

Векторные поля на многообразии. Алгебраические операции над векторными полями, скобка Ли. Координатное представление векторного поля. Локальная однопараметрическая группа преобразований, порожденная векторным полем. Полные векторные поля.

Подмногообразия, погружения и вложения многообразий. Эквивалентность подмногообразия и образа вложения. Регулярные точки и регулярные значения гладкого отображения. Малая теорема о неявной функции. Трансверсальность отображения к подмногообразию. Большая теорема о неявной функции.

Теорема Сарда.

Вложение многообразий в евклидово пространство. Вложимость компактного многообразия в евклидово пространство большой размерности. Вложимость компактного n -мерного многообразия в евклидово пространство размерности $2n+1$. Теоремы Уитни (без доказательства).

Многообразия с краем. Инвариантность края. Теорема Брауэра о неподвижной точке.

Ориентированные многообразия. Индуцированная ориентация края.

Глава 3. ТЕОРИЯ МОРСА

Гомотопия и гомотопическая эквивалентность. Деформационный ретракт.

Невырожденные критические точки. Гессиан функции в критической точке. Лемма Морса. Функции Морса.

Риманова метрика. Существование римановой метрики. Градиент гладкой функции на римановом многообразии.

Строение многообразия вдали от критических точек. Строение многообразия вблизи критической точки. Гомотопические свойства конечных клеточных комплексов. Теорема Морса. Многообразия в евклидовом пространстве, фокальные точки. Существование функций Морса.

Ориентированные многообразия. Индуцированная ориентация края.

Степень гладкого отображения. Гомотопическая инвариантность степени. Степень непрерывного отображения. Степень отображения по модулю 2. Существование векторного поля на сфере, не обращающегося в нуль ни в одной точке. Теорема Хопфа (без доказательства).

Цепные комплексы. Группы гомологий цепного комплекса. Группы гомологий конечного клеточного комплекса. Гомотопическая инвариантность групп гомологий (без доказательства). Числа Бетти, эйлерова характеристика. Неравенства Морса.

Индекс векторного поля. Теорема Пуанкаре-Хопфа об индексе векторного поля.

Глава 4. ОСНОВЫ РИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Тензорные поля на многообразии. Координаты тензорного поля, правило преобразования координат тензора при замене координат.

Аффинные связности. Символы Кристоффеля. Ковариантная производная тензорного поля. Тензор кручения и тензор кривизны. Абсолютное дифференцирование и параллельный перенос вдоль кривой.

Римановы многообразия. Существование римановой метрики. Связь римановой геометрии с внутренней геометрией поверхности. Связности, совместные с метрикой. Тензоры кривизны и кручения. Риманова связность (связность Леви-Чивита). Абсолютное дифференцирование векторного поля вдоль кривой. Параллельный перенос вдоль кривой. Тензор кривизны риманова многообразия. Секционная кривизна, тензор Риччи, скалярная кривизна.

Длина кривой, естественная параметризация. Метрика на римановом многообразии, метрическая полнота. Геодезические, геодезическая полнота. Экспоненциальное отображение, его локальные свойства. Связь геодезических и кратчайших. Теорема Ринова-Хопфа.

Глава 5. Вариационная теория геодезических

Формула второй вариации. Индексная форма геодезической. Поля Якоби. Сопряженные точки. Индекс геодезической. Теорема Адамара-Картана. Теорема Мейерса.

Список литературы

- [1] Н. Бурбаки. Общая топология. Основные структуры. М. Наука, 1968.
- [2] Дж. Келли. Общая топология. М. Наука, 1968.
- [3] П. С. Александров. Введение в теорию множеств и общую топологию. М. Наука, 1977.
- [4] Б. А. Дубровин, П. С. Новиков, А. Т. Фоменко. Современная геометрия. М. Наука, 1979.
- [5] Дж. Милнор, А. Уоллес. Дифференциальная топология. Начальный курс. М. Мир, 1972.
- [6] Ф. Уорнер. Основы теории гладких многообразий и групп Ли. М. Мир, 1987.
- [7] Дж. Шварц. Дифференциальная геометрия и топология. М. Мир, 1970.
- [8] Дж. Милнор. Теория Морса. М. Мир, 1965.