Программа курса «ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ»
1-й курс, 2-й поток ММФ НГУ,

лектор – доцент С. Ю. Подзоров

1. Организационно-методический раздел.

1.1. Название курса.

Курс «Теория алгоритмов» является основным курсом для студентов ММФ НГУ, обучающихся по направлению «математика», специальности 010100 и 010200, и входит в раздел общих математических дисциплин. Данный курс относится к вузовской компоненте.

1.2. Цели и задачи курса.

Курс «Теория алгоритмов» предназначен для студентов 1-го курса ММФ НГУ (2-й поток). Основной целью освоения дисциплины является обучение студентов основам теории формальных языков, классической теории вычислимости и теории сложности. Для достижения поставленной цели выделяются следующие задачи курса: чтение теоретического лекционного материала в объеме, предусмотренном программой; параллельное проведение практических семинарских занятий в соответствие теоретическому материалу; осуществление текущего и итогового контроля над уровнем усвоения курса слушателями.

1.3. Требования к уровню освоения содержания курса.

По окончании изучения курса «Теория алгоритмов» студент должен иметь представление об основных научных направлениях, традиционно развиваемых в рамках данной теории. Студенты, прослушавшие курс, должны знать классические подходы к формализации понятия алгоритма, возникающие в теории формальных языков и теории вычислимых функций. Слушатели курса должны освоить методы теории алгоритмов и получить навыки "алгоритмического мышления". Прослушавшие данный курс должны уметь адекватно формализовывать алгоритмические проблемы из различных направлений математики и применять освоенные методы и результаты для их решения.

1.4. Формы контроля.

Итоговый контроль: для контроля усвоения курса в учебном плане предусмотрен экзамен.

Текущий контроль: в течение семестра выполняются контрольные работы, проводится проверка домашних заданий, также предусмотрены семестровые задания для самостоятельного выполнения. Выполнение указанных видов работ является обязательным для всех студентов, а результаты текущего контроля служат основанием для выставления оценок в ведомость контрольной недели на факультете.

2. Содержание дисциплины.

2.1. Новизна и актуальность курса.

Теория алгоритмов входит в число основных дисциплин, преподаваемых на математических факультетах ведущих университетов России и мира начиная со второй половины XX века. Она связана с основаниями математики; на нее опираются такие классические результаты, как теорема Геделя о неполноте. Вместе с тем бурное развитие вычислительной техники в последние десятилетия делает отдельные области теории алгоритмов (такие как теория вычислительной сложности) одними из основных направлений современных научных исследований. Таким образом, курс теории алгоритмов важен как для повышения общей математической культуры студентов, так и в качестве начального этапа подготовки специалистов, работающих в одном из наиболее приоритетных направлений современной математики. Все это позволяет говорить о высокой актуальности курса.

По содержанию первая и третья части курса, посвященные конечным автоматам и теории вычислительной сложности, являются сравнительно новыми и читаются в рамках курса теории алгоритмов на ММФ НГУ начиная с 2001 года. Вторая часть курса, посвященная классической теории вычислимости, более традиционна и носит фундаментальный характер. Однако здесь автор курса вводит понятия конструктивного пространства и геделевской нумерации в общем виде. Эти концепции, хорошо знакомые всем современным специалистам, работающим в этой области, хотя и не являются чем-то новым (скорее, это классика теории вычислимости), однако ранее в курсе теории алгоритмов, читаемом на ММФ НГУ, им практически не уделялось внимания.

2.2. Тематический план курса.

Наименование разделов и тем	Количество часов				
	Лекции	Семинары	Лабораторные работы	Самостоятельная работа	Всего часов
Введение	1	0	–	0	1
Конечные автоматы и регулярные языки	8	12	–	20	40
Формализация общего понятия вычислимости	16	14	–	20	50
Дальнейшие результаты о вычислимости	6	10	–	20	36
Введение в теорию сложности	5	0	–	12	17
Итого по курсу:	36	36	–	72	144

2.3. Содержание отдельных разделов и тем.

Введение. Цели и задачи курса. Обсуждение общего понятия алгоритма и свойств алгоритмов. Основные объекты теории алгоритмов: конструктивные объекты, конструктивные пространства, вычислимые функции.

Конечные автоматы и регулярные языки. Алфавиты, слова, конкатенация слов, языки. Определение детерминированного конечного автомата. Отношения эквивалентности, фактор-множества. Теорема Майхилла-Нероуда, минимизация числа состояний детерминированного конечного автомата. Недетерминированные конечные автоматы, теорема о совпадении классов языков, распознаваемых детерминированными и недетерминированными конечными автоматами. Операции над языками, определение регулярного языка, регулярные выражения. Теорема о совпадении класса регулярных языков и класса языков, распознаваемых конечными автоматами. Замкнутость класса регулярных языков относительно операций. Теорема о накачке, примеры нерегулярных языков. Регулярные языки как языки, распознаваемые устройствами с конечной памятью.

Формализация общего понятия вычислимости. Сведение общего понятия вычислимой функции к функции, аргументами и значениями которой являются слова конечного алфавита. Машины Тьюринга, вычислимость по Тьюрингу, тезис Тьюринга. Частичные числовые функции, операторы суперпозиции и примитивной рекурсии, примитивно рекурсивные функции и отношения. Функция $c(x, y)$ и обратные к ней функции. Оператор минимизации, частично рекурсивные и рекурсивные функции, тезис Черча. Машина Шенфилда, определение числовой функции, вычислимой на машине Шенфилда. Теорема об элиминации макрокоманд в программах для машины Шенфилда. Вычислимость частично рекурсивных функций на машине Шенфилда. Вычислимость числовых функций на машине Тьюринга, теорема о вычислимости на машине Тьюринга функций, вычислимых на машине Шенфилда. Кодирование программ и данных для машины Тьюринга. Частичная рекурсивность функций, вычислимых на машинах Тьюринга. Определение нумерации, виды нумераций, эквивалентность нумераций. Теорема о существовании эквивалентной разнозначной нумерации для любой разрешимой нумерации бесконечного семейства. Примеры нумераций. Понятие геделевской нумерации конструктивного пространства. Существование, разрешимость и единственность с точностью до эквивалентности геделевской нумерации произвольного конструктивного пространства. Изоморфизм конструктивных пространств, теорема об изоморфности всех бесконечных конструктивных пространств. Сведение общего понятия вычислимой функции к функции, аргументами и значениями которой являются натуральные числа. Особенности современной терминологии в теории вычислимости, точные формулировки некоторых результатов о неразрешимости (10-ая проблема Гильберта и теорема Геделя о неполноте).

Дальнейшие результаты о вычислимости. Понятие универсальной функции. Существование и несуществование универсальных функций с различными ограничениями на вычислимость для различных классов. $s-m-n$-теорема. Теорема о неподвижной точке, примеры применения теоремы о неподвижной точке (некоторые свойства универсальной частично рекурсивной функции, "самовоспроизводящиеся машины"). Определения рекурсивного множества и рекурсивно перечислимого множества. Теорема Поста.

Универсальная вычислимая нумерация семейства всех рекурсивно перечислимых множеств. Замкнутость классов рекурсивно перечислимых и рекурсивных множеств относительно операций, пример рекурсивно перечислимого, но не рекурсивного множества. Понятие m-сводимости, m-степени. Примеры множеств, принадлежащих наибольшей рекурсивно перечислимой m-степени. Проблема остановки, ее неразрешимость. Пример не рекурсивно перечислимого множества с не рекурсивно перечислимым дополнением.

Введение в теорию сложности. Примитивно рекурсивные функции как функции, вычислимые за примитивно рекурсивное время. Функция Аккермана, ее свойства. Ограниченность скорости роста примитивно рекурсивной функции уровнями функции Аккермана. Абстрактные меры вычислительной сложности, примеры; машинно независимые результаты. Теоремы о неограниченной сложности, Блюм об ускорении и Бородина о пробелах (формулировки). Вычислимость за полиномиальное и экспоненциальное время. Задачи распознавания языков, классы $\mathcal{P}$ и $\mathcal{EXP}$. Примеры задач распознавания. Недетерминированная машина Тьюринга, определение класса $\mathcal{NP}$. Отношения между классами $\mathcal{P}$, $\mathcal{NP}$ и $\mathcal{EXP}$ (без доказательства). Полиномиальная сводимость, понятие $\mathcal{NP}$-полной задачи. Примеры $\mathcal{NP}$-полных задач (без доказательств).

2.4. Перечень примерных контрольных вопросов и заданий для самостоятельной работы.

Контрольные вопросы в рамках данного курса не предусмотрены. Задания для самостоятельной работы предлагаются студентам по следующим темам семинарских занятий (в скобках – количество часов, отведенных для семинарских занятий по данной теме):

1. Детерминированные конечные автоматы (4).
2. Недетерминированные конечные автоматы (2).
3. Регулярные языки, их связь с конечными автоматами (4).
4. Теорема о накачке и примеры нерегулярных языков (2).
5. Примитивно рекурсивные и частично рекурсивные функции (6).
6. Машины Шенфилда (2).
7. Машины Тьюринга (2).
8. Геделевские нумерации и кодирование работы машин (4).
9. Универсальные функции, нормальная форма Клини (2).
10. $s-m-n$-теорема и теорема о неподвижной точке (2).
11. Рекурсивные и рекурсивно перечислимые множества (4).
12. m-сводимость и m-степени (2).

Кроме того, предусмотрена самостоятельная работа студентов, связанная с изучением вопросов, освещенных в лекциях, но не вошедших в темы семинарских занятий (вопросы, относящиеся к теории сложности, подразумевается работа с доступной в интернете литературой).

3. Учебно-методическое обеспечение дисциплины.

3.1. Темы рефератов (курсовых работ).

Рефераты и курсовые работы в рамках данного курса не предусмотрены.

3.2. Образцы вопросов для подготовки к экзамену.

1. Общие понятия конструктивного объекта и конструктивного пространства. Примеры конструктивных пространств. Общее определение вычислимой функции. Предмет теории алгоритмов.
2. Детерминированный конечный автомат. Язык, распознаваемый детерминированным конечным автоматом.

3. Бинарные отношения, их свойства. Отношение эквивалентности. Теорема о разбиении на классы эквивалентности. Классы эквивалентности, фактор-множество.

4. Теорема Майхила-Нероуда. Минимизация числа состояний детерминированного конечного автомата.

5. Недетерминированный конечный автомат. Язык, распознаваемый недетерминированным конечным автоматом.

6. Теорема о равенстве классов языков, распознаваемых детерминированными и недетерминированными конечными автоматами.

7. Операции над языками. Определение класса регулярных языков. Регулярные выражения.

8. Теорема о равенстве класса регулярных языков и класса языков, распознаваемых конечными автоматами.

9. Замкнутость класса регулярных языков относительно операций.

10. Теорема о накачке. Примеры нерегулярных языков.

11. Машина Тьюринга: описание машины, конфигурации, программы. Определение вычислимости на машине Тьюринга. Тезис Тьюринга.

12. Примитивно рекурсивные функции. Примитивная рекурсивность функций $x + y$, $x \cdot y$, $x \dot{-} y$, $\mathrm{sg}(x)$.

13. Примитивно рекурсивные предикаты. Свойства примитивно рекурсивных предикатов.

14. Ограниченная минимизация. Примитивная рекурсивность функций $\mathrm{div}(x, y)$, $\mathrm{rest}(x, y)$, $\log(x, y)$, $p(x)$ и предиката $P(x)$.

15. Функция $c(x, y)$ и обратные к ней функции. Свойства этих функций.

16. Частично рекурсивные и рекурсивные функции. Тезис Черча.

17. Машина Шенфилда. Описание машины, понятие макрокоманды. Теорема об элиминации макрокоманд.

18. Вычислимость частично рекурсивных функций на машине Шенфилда.

19. Вычислимость на машине Тьюринга функций, вычислимых на машине Шенфилда.

20. Кодирование конфигураций и программ машины Тьюринга.

21. Частичная рекурсивность функций, вычислимых на машине Тьюринга.

22. Нумерации. Понятия разнозначной нумерации и разрешимой нумерации. Эквивалентность нумераций. Существование для каждой разрешимой нумерации бесконечного множества эквивалентной ей разнозначной. Примеры нумераций.

23. Понятие геделевской нумерации. Свойства геделевских нумераций.

24. Понятие изоморфизма конструктивных пространств. Свойства изоморфизма. Изоморфность бесконечных конструктивных пространств.

25. Понятие универсальной функции. Существование и несуществование универсальных функций для различных классов.

26. $s - m - n$ теорема и теорема о неподвижной точке. Примеры применения теоремы о неподвижной точке.

27. Рекурсивные и рекурсивно перечислимые множества. Теорема Поста.

28. Замкнутость классов рекурсивных и рекурсивно перечислимых множеств относительно теоретико-множественных операций. Пример рекурсивно перечислимого не рекурсивного множества.

29. Понятие m-сводимости. m-степени. m-сводимость рекурсивных и рекурсивно перечислимых множеств.

30. Примеры множеств, принадлежащих наибольшей рекурсивно перечислимой m-степени. Проблема остановки.

31. Пример не рекурсивно перечислимого множества с не рекурсивно перечислимым дополнением.

32. Вычислимость примитивно рекурсивных функций за примитивно рекурсивное время.

33. Функция Аккермана. Ее основные свойства.

34. Ограниченность скорости роста примитивно рекурсивных функций уровнями функции Аккермана. Пример рекурсивной не примитивно рекурсивной функции.

35. Классы $\mathcal{P}$ и $\mathcal{EXP}$. Задачи распознавания языков; примеры задач распознавания. Определение класса $\mathcal{NP}$. Отношения между классами $\mathcal{P}$, $\mathcal{EXP}$ и $\mathcal{NP}$. Понятие об $\mathcal{NP}$-полных задачах.

3.3. Список основной и дополнительной литературы.

1. Подзоров, С. Ю., *Полный конспект лекций по курсу "Теория алгоритмов"*. Конспект лекций, подготовленный автором курса для студентов, доступен в сети интернет по адресу http://www.nsu.ru/education/podzorov/Alg/alg.html.

2. Роджерс, Х., *Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость*, Москва, Мир, 1972.

3. Мальцев, А. И., *Алгоритмы и рекурсивные функции*, Москва, Наука, 1986.

4. Морозов, А. С., *Машины Шенфилда. Методические указания*, Новосибирск, НГУ, 1996.

5. Ершов, Ю. Л., Палютин, Е. А., *Математическая логика*, Москва, Наука, 1987.

6. Соар, Р., *Вычислимо перечислимые множества и степени*, "Казанское математическое общество", Казань, 2000.

7. Китаев, А., Шень, А., Вялый, М, *Классические и квантовые вычисления*, М.: МЦНМО, 1999. Книга доступна в интернете по адресу http://www.mccme.ru/free-books.