

# ТЕОРИЯ ГАЛУА

(7-й семестр)

1. Группа, примеры. Порядок элемента. Подгруппа. Циклическая подгруппа, описание циклических групп. Подгруппа, порождённая множеством. Смежные классы по подгруппе. Теорема Лагранжа.

2. Гомоморфизм групп. Действие группы на множестве. Вложение конечной группы в группу подстановок. Орбиты и стабилизаторы. Сопряжение в группе. Нормальная подгруппа и факторгруппа. Теорема о гомоморфизмах для групп. Прямое произведение групп. Строение конечно порождённых абелевых групп.

3. Существование в конечной группе элемента простого порядка, делящего порядок группы. Теорема Силова. Описание групп порядка  $pq$ .

4. Коммутаторы и коммутант. Разрешимая группа. Существование субнормального ряда с циклическими факторами в конечной разрешимой группе. Ряд коммутантов группы  $S_4$ . Неразрешимость группы  $S_n$  при  $n \geq 5$ . Центр группы. Разрешимость конечной  $p$ -группы.

5. Кольцо, примеры. Идеал в кольце, фактор-кольцо. Теорема о гомоморфизмах для колец. Разложение кольца вычетов в прямую сумму примарных колец. Функция Эйлера.

6. Поле, примеры. Характеристика поля, простое подполе. Расширение полей. Степень расширения, степень башни расширений. Подполе, порождённое множеством. Алгебраическое расширение. Свойства простого алгебраического расширения, изоморфизм простых расширений. Конечное расширение. Поле разложения. Композит расширений.

7. Алгебраическое замыкание. Продолжение изоморфизма полей на алгебраические замыкания.
8. Нормальное расширение. Сепарабельная степень. Сепарабельное расширение. Теорема о примитивном элементе.
9. Конечные поля: существование, единственность, автоморфизмы, подполя.
10. Расширение Галуа, группа Галуа. Теорема Артина. Основная теорема теории Галуа.
11. Корни из единицы. Линейная независимость автоморфизмов поля. Описание расширений с циклической группой Галуа. Критерий разрешимости уравнений в радикалах.
12. Построения с помощью циркуля и линейки, их алгебраический эквивалент. Задачи древних греков на построение.
13. Проконечная группа. Пополнение финитно аппроксимируемой группы в проконечной топологии. Кольцо целых  $p$ -адических чисел. Бесконечное расширение Галуа и его группа Галуа. Основная теорема Галуа для бесконечных расширений Галуа.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ленг С. Алгебра. М. Мир. 1968.
2. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М. Наука. 1979.
3. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. М. Наука. 1982.

Программу составил

профессор Н.С.Романовский