Программа курса «Топологические пространства»

4 курс, 1 поток (010100.62 математика, бакалавриат) гр. 1111–1112

лектор Филатов П.С.

зимний семестр 2014/15 учебного года.

Глава 1. Топологические пространства.

§ 1. Фильтры.

Лемма об индуктивности множества фильтров. Критерий максимальности фильтра. Лемма об образе ультрафильтра.

§ 2. Предтопологии и топологии.

Лемма о полноте решётки предтопологий. Лемма о сравнении топологий. Лемма о задании топологии совокупностью открытых множеств. Теорема о полноте решётки топологий. Лемма о внутренности и замыкании. Лемма о сходимости фильтра. Теорема Биркгофа.

§ 3. Непрерывность.

Лемма об эквивалентных определениях непрерывности. Лемма о суперпозиции непрерывных отображений. Лемма о непрерывности тождественного отображения. Лемма о сохранении непрерывности. Теорема о прообразе топологии. Теорема об образе топологии. Теоремы о задании топологии требованием непрерывности семейства отображений.

§ 4. Типы топологических пространств.

Лемма об эквивалентных определениях отделимого пространства. Лемма об эквивалентных определениях хаусдорфова пространства. Лемма об эквивалентных определениях T_3-пространства. Малая лемма Урысона. Лемма о задании функции лебеговыми множествами. Лемма о сравнении функций, заданных лебеговыми множествами. Лемма о непрерывности функции, заданной лебеговыми множествами. Большая лемма Урысона. Теорема Урысона.

§ 5. Компактность.

Лемма о точках прикосновения базиса фильтра. Теорема об эквивалентных критериях компактности. Теорема Вейерштрасса (об образе компактного множества при непрерывном отображении). Лемма об абсолютности понятия компактности. Теорема Тихонова (о компактности произведения). Лемма о компактности замкнутого подмножества компактного пространства. Лемма о замкнутости компактного подмножества хаусдорфова пространства. Теорема о нормальности хаусдорфова компактного пространства.

§ 6. Покрытия и разбиения единицы.

Лемма Дьедонне. Лемма Лефшеца. Лемма о поточечной суммируемости семейства функций. Лемма о разбиении единицы в нормальном пространстве. Лемма о срезывателе. Теорема о разбиении единицы в $\mathbb{R}^n$.

Глава 2. Двойственность и ее приложения.

§ 1. Векторные топологии.

Лемма о свойствах векторной топологии. Теорема о строении векторной топологии. Теорема о полноте решётки векторных топологий. Теорема о прообразе векторной топологии. Лемма о произведении векторных топологий. Лемма о регулярности топологического векторного пространства. Принцип равномерной ограниченности в топологических векторных пространствах.

§ 2. Локально выпуклые топологии.

Теорема о строении локально выпуклой топологии. Теорема о непустоте субдифференциала. Лемма о топологии полуномированного пространства. Теорема о совпадении локально выпуклой топологии с топологией ассоциированного мультинормированного пространства. Теорема о сохранении точных верхних границ при штриховании. Принцип равномерной ограниченности в мультинормированных пространствах.

§ 3. Двойственность векторных пространств.

Лемма о бра-топологии. Лемма о слабых топологиях. Теорема о дуализациях.

§ 4. Топологии, согласованные с двойственностью.

Лемма о топологии Макки. Теорема Макки — Аренса. Теорема Макки. Теорема о строгой отделимости. Теорема Мазура.

§ 5. Поляры.

Лемма о свойствах поляр. Критерий Акилова. Теорема о биполяре. Теорема об абсолютной биполяре.

§ 6. Слабо компактные выпуклые множества.

Лемма о слабой компактности субдифференциала. Теорема о строении субдифференциала. Лемма о свойствах крайних множеств. Теорема Крейна — Мильмана. Лемма о полярах конического отрезка и абсолютно выпуклого множества. Теорема Алаоглу — Бурбаки.

§ 7. Рефлексивные пространства.

Критерий Какутани. Теорема Петтиса.

§ 8. Пространство $\mathbf{C}(\mathbf{Q}, \mathbb{R})$.

Леммы о носителе функционала. Лемма де Бранжа. Теорема Стоуна — Вейерштрасса. Теорема Титце — Урысона. Теорема Стоуна — Вейерштрасса в $C(Q, \mathbb{C})$.

Глава 3. Обобщенные функции.

§ 1. Пространства основных функций.

Лемма о метризуемости и полноте пространства $\mathscr{D}(Q)$. Лемма о пространстве $\mathscr{D}$ на объединении открытых множеств. Топология индуктивного предела.

§ 2. Распределения (обобщённые функции).

Топологии пространства распределений. Теорема о совпадении топологии индуктивного предела с топологией Макки $\tau(\mathscr{D}(\Omega), \mathscr{D}'(\Omega))$. Критерий ограниченности множества в топологии индуктивного предела. Носитель распределения $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Лемма о свойствах финитного распределения.

Литература:

1. Кутателадзе С.С. *Основы функционального анализа.* Изд. 5-е. Новосибирск: Институт математики СО РАН, 2006.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* Изд. 7-е. М.: Физматлит, 2009
3. Рудин У. *Функциональный анализ.* М.: Лань, 2005.
4. Хелемский А.Я. *Лекции по функциональному анализу.* М.: МЦНМО, 2004.
5. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* Изд. 4-е. С.-Петербург: БХВ, 2004.

6. Антоневич А.Б., Князев П.Н., Радыно Я.В. *Задачи и упражнения по функциональному анализу.* М.: УРСС, 2004.
7. Данфорд Н., Шварц Дж. *Линейные операторы.* Том 1: Общая теория. М.: УРСС, 2004.
8. Филатов П.С. *Топологические пространства.* — Тексты лекций в формате pdf. (обновляются ежегодно).