

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Национальный исследовательский университет  
Новосибирский государственный университет  
Механико-математический факультет**

УТВЕРЖДАЮ

\_\_\_\_\_

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

Рабочая программа дисциплины  
**Случайные процессы**

Направление подготовки  
**010100 – Математика**

Квалификация (степень) выпускника  
**Магистр**

Форма обучения  
**Очная**

Новосибирск 2014

## Аннотация рабочей программы

Дисциплина «Случайные процессы» является частью математического цикла ООП по направлению подготовки «010100 – », все профили подготовки. Дисциплина реализуется на Механико-математическом факультете Национального исследовательского университета Новосибирский государственный университет кафедрой теории вероятностей и математической статистики ММФ НИУ НГУ.

Курс предназначен для подготовки специалистов, обладающих глубокими знаниями в области случайных процессов и навыками использования этих знаний в дальнейшей исследовательской работе. Содержание курса охватывает основные разделы случайных процессов, к которым относятся: однородные процессы с независимыми приращениями (в том числе винеровский процесс и пуассоновский процесс), цепи Маркова и марковские процессы с непрерывным временем, сходимость процессов частных сумм, пуассоновские точечные процессы,  $L_2$ -теория случайных процессов, системы массового обслуживания.

Дисциплина нацелена на формирование общекультурных компетенций ОК-6, ОК-8, ОК-9, ОК-10, профессиональных компетенций ПК-1, ПК-6, ПК-8, ПК-11, ПК-16 выпускника.

Преподавание дисциплины предусматривает следующие формы организации учебного процесса: лекции, практические занятия, контрольные работы, контрольные задания, коллоквиум, самостоятельная работа студента.

Программой дисциплины предусмотрены следующие виды контроля: текущий контроль успеваемости в форме двух контрольных работ, двух контрольных заданий и коллоквиума, промежуточный контроль в форме зачета и экзамена. Формы рубежного контроля определяются решениями Ученого совета, действующими в течение текущего учебного года.

Общая трудоемкость дисциплины составляет 6 зачетных единиц, 216 академических часов. Программой дисциплины предусмотрены 68 часов лекционных и 18 часов практических занятий, а также 48 часов самостоятельной работы студентов. Остальное время отведено контрольным работам, контрольным заданиям, зачету и экзамену.

## 1. Цели освоения дисциплины

Основной целью курса является выработка у студентов навыков использования вероятностных методов при решении математических задач как в рамках исследований по теории случайных процессов, так и в иных областях математики.

Для достижения поставленной цели выделяются следующие задачи курса: познакомить слушателей с основными понятиями и методами теории случайных процессов, дать представление о современном состоянии и развитии этой науки, сформировать у студентов навыки работы с понятийным аппаратом теории случайных процессов.

## 2. Место дисциплины в структуре ООП магистратуры

Дисциплина «Случайные процессы» является частью профессионального цикла образовательной магистерской программы по направлению подготовки «010100 – », все профили подготовки.

Дисциплина «Случайные процессы» опирается на следующие дисциплины:

- Математический анализ (теория пределов, ряды, дифференцирование, интегралы Римана, Лебега, Стильбеса);
- Высшая алгебра (алгебраические системы, матрицы и детерминанты);
- Математическая логика (исчисление высказываний, теория множеств);
- Теория функций комплексного переменного (интегрирование и дифференцирование, степенные ряды);
- Функциональный анализ (гильбертовы пространства, анализ Фурье);
- Теория вероятностей (в полном объеме).

Результаты освоения дисциплины «010100 – » используются в следующих дисциплинах:

- Случайные блуждания с тяжелыми хвостами;
- Дополнительные главы теории вероятностей;
- Теория мартингалов.

## 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины «Случайные процессы»:

- общекультурные компетенции: ОК-6, ОК-8, ОК-9, ОК-10;
- профессиональные компетенции: ПК-1, ПК-6, ПК-8, ПК-11, ПК-16.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

- иметь представление о месте и роли изучаемой дисциплины среди других наук;
- знать основные положения теоретических разделов курса, их прикладное значение;
- уметь применять полученные знания для решения математических задач;
- владеть навыками применения основных теорем и методов теории случайных процессов.

## 4. Структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 6 зачетных единиц, 216 часов.

№ п/п	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)							Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
				Лекция	Практическое занятие	Контр. работа	Самост. работа	Контрольное задание	Коллоквиум	Зачет	

1.1	Цепи Маркова. Определение. Основные свойства	9	1	2	2														
1.2	Существенные и несущественные состояния. Классы сообщающихся состояний цепи Маркова. Теорема солидарности для периодов состояний.	9	2	2			2												
1.3	Возвратность состояния цепи Маркова. Теорема солидарности для возвратных состояний цепи Маркова. Теорема солидарности для положительно возвратных состояний.	9	3	2	2														
1.4	Теорема о том, что неразложимая цепь Маркова имеет стационарное распределение тогда и только тогда, когда все состояния положительно возвратны.	9	4	2			2												
1.5	Теорема о предельном поведении переходных вероятностей неразложимой непериодичной цепи Маркова.	9	5	2	2														
1.6	Ветвящиеся процессы (процессы Гальтона-Ватсона). Вероятность выживания.	9	6	2			2	2											Расчетное задание, см. п. 6
1.7	Свойства однородных процессов с независимыми приращениями.	9	7	2	2	2													контрольная, см. п. 6
1.8	Пуассоновский процесс. Непрерывность слева (справа) траекторий пуассоновского процесса. Совместное распределение скачков пуассоновского процесса.	9	8	2			2												
1.9	Пуассоновское поле и его свойства.	9	9	2	2														
1.10	Винеровский процесс. Недифференцируемость его траекторий.	9	10	2			2												
1.11	Цилиндрическая $\sigma$ -алгебра. Выборочное вероятностное пространство.	9	11	2	2														
1.12	Теорема Колмогорова о существовании непрерывной модификации процесса. Непрерывность траекторий винеровского процесса.	9	12	2			2												
1.13	Закон повторного логарифма.	9	13	2	2														
1.14	Гауссовские процессы.	9	14	2			2												
1.15	Марковские процессы (с непрерывным временем). Критерий конечности процесса чистого рождения.	9	15	2	2														
1.16	Переходные вероятности марковского процесса. Прямая и обратная системы дифференциальных уравнений Колмогорова.	9	16	2			2	2											Расчетное задание, см. п. 6
1.17	Теорема о предельном поведении переходных вероятностей неразложимого марковского процесса.	9	17	2	2	2													контрольная, см. п. 6
1.18	Процесс рождения и гибели. Его стационарное распределение.	9	18	2			2		2										коллоквиум, см. п. 6
		5																	36 Экзамен
2.1	Система $\langle M/M/1 \rangle$ . Стационарное распределение. Время ожидания обслуживания в системе $\langle M/M/1 \rangle$ .	10	1	2			2												
2.2	Система $\langle M/G/1 \rangle$ . Переходные вероятности для вложенной цепи Маркова. Теорема о стационарном распределении для вложенной цепи Маркова.	10	2	2			2												
2.3	Время ожидания обслуживания в системе $\langle M/G/1 \rangle$ . Время занятости обслуживающего прибора в системе $\langle M/G/1 \rangle$ .	10	3	2			2												

2.4	Система <G/M/1>. Переходные вероятности для вложенной цепи Маркова. Стационарное распределение вложенной цепи Маркова.	10	4	2			2						
2.5	Время ожидания обслуживания в системе <G/M/1>.	10	5	2			2						
2.6	Система <G/G/1>. Время ожидания обслуживания.	10	6	2			2	2					Расчетное задание, см. п. 6
2.7	Вложенное случайное блуждание для системы <G/G/1>.	10	7	2		2	2						контрольная, см. п. 6
2.8	Система <G/G/1>. Время ожидания обслуживания.	10	8	2			2						
2.9	Процессы миграции (сети Джексона). Замкнутые процессы миграции. Открытые процессы миграции.	10	9	2			2						
2.10	Функциональная центральная предельная теорема.	10	10	2			2						
2.11	Сходимость процесса Бернулли к пуассоновскому процессу.	10	11	2			2						
2.12	Критерий непрерывности процесса в $L_2$ . Дифференцирование процессов в $L_2$ .	10	12	2			2						
2.13	Интеграл Римана для случайных процессов в $L_2$ .	10	13	2			2						
2.14	Элементарная ортогональная стохастическая мера. Стохастический интеграл от неслучайной функции.	10	14	2			2						
2.15	Стохастический интеграл Ито.	10	15	2			2						
2.16	Теорема о существовании и единственности решения стохастического дифференциального уравнения.	10	16	2				2					Расчетное задание, см. п. 6
		5										36	Экзамен
	ИТОГО:			68	18	4	48	4	2			72	

## 5. Образовательные технологии

Традиционная лекционно-семинарская система обучения.

## 6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

Перечень примерных контрольных вопросов и заданий для самостоятельной работы:

1. По шахматной доске ходит конь, переходя за один шаг на одно из полей, куда он может перейти, причем это поле выбирается на удачу. Найти стационарное распределение этой цепи Маркова.
2. Пусть  $\xi(t)$  – стандартный винеровский процесс. Вычислить  $E(\xi(4) - \xi(2))(\xi(3) - \xi(1))(\xi(2) - \xi(0))$ .
3. Пусть  $\xi(t)$  – пуассоновский процесс с параметром интенсивности 1. Найти распределение  $\int_0^1 \xi(t) dt$ .
4. Пусть  $\xi(t)$  – стандартный винеровский процесс. Найти распределение  $\int_0^1 t d\xi(t)$ .
5. Пусть  $\xi(t)$  – стандартный винеровский процесс. Найти  $P(\xi(s) > 0, \xi(t) > 0)$ .
6. Классифицируйте состояния цепи Маркова с матрицей переходных вероятностей

$$\begin{pmatrix} 1-2p & 2p & 0 \\ p & 1-2p & p \\ 0 & 2p & 1-2p \end{pmatrix}$$

и вычислите переходные вероятности за  $n$  шагов.

7. Привести пример случайного процесса  $\xi(t)$ , производная которого в  $L^2$  определена и имеет невырожденное распределение (при всех  $t$ ).

### Экзаменационный билет № 1.

1. Возвратность случайного блуждания с задержкой в нуле.
2. Пусть  $\xi(t)$  -- процесс чистого рождения с интенсивностями  $\lambda_n = n\lambda$ . С помощью прямой системы дифференциальных уравнений Колмогорова докажите, что

$$p_{ij}(t) = C_{j-1}^{i-1} e^{-i\lambda} (1 - e^{-t\lambda})^{j-i}, \quad j \geq i.$$

*Указание.* Сначала докажите, что  $p_{ii}(t) = e^{-i\lambda}$ . Затем перепишите дифференциальное уравнение для  $p_{ij}(t)$  в виде  $\frac{d}{dt}(p_{ij}(t)e^{j\lambda}) = \lambda(j-1)p_{i,j-1}(t)e^{j\lambda}$  и воспользуйтесь индукцией по  $j$ .

### Экзаменационный билет № 2.

1. Цилиндрическая сигма-алгебра. Распределение процесса. Существование процесса с заданным распределением.
2. Пусть для марковского процесса для некоторого  $i$  выполнено  $p_{ii}(h) \rightarrow 1$  при  $h \rightarrow +0$ . Докажите, что  $p_{ij}(t)$  равномерно непрерывна по  $t$ .

*Указание.* Воспользуйтесь тождеством  $p_{ij}(t+h) = \sum_k p_{ik}(h)p_{kj}(t)$ .

### Экзаменационный билет № 3.

1. Функциональная центральная предельная теорема.
2. Привести пример процесса рождения и гибели (но не чистого рождения), который не имеет стационарного распределения.

### Экзаменационный билет № 4.

1. Винеровский процесс. Недифференцируемость его траекторий.
2. Пусть  $\lambda, \mu > 0$  и  $\xi(t)$  – марковский процесс с производящей матрицей

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}.$$

Решите прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова. Найдите стационарное распределение  $\pi$  и проверьте сходимость  $p_{ij}(t) \rightarrow \pi_j$ .

## 7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: Либроком, 2009, 656 с.
2. Розанов Ю.А. Случайные процессы. Краткий курс. М.: Наука, 1979.

б) дополнительная литература:

1. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 2005, 478 с..

## 8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Нет.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО с учетом рекомендаций и **ПрООП ВПО** по направлению «010100 - Математика».

Автор: \_\_\_\_\_ Рузанкин Павел Сергеевич  
к.ф.-м.н., доцент ММФ НГУ, с.н.с. ИМ СО РАН

Рецензент (ы) \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Программа одобрена на заседании \_\_\_\_\_  
(Наименование уполномоченного органа вуза (УМК, НМС, Ученый совет))  
от \_\_\_\_\_ года, протокол № \_\_\_\_\_