Программа курса «Математическая логика»
2013–2014 учебный год

(2-й семестр 1-го курса и 1-й семестр 2-го курса)

Лектор – чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., проф. С.С. Гончаров

Элементы теории множеств

1. Основные понятия теории множеств. Операции над множествами.

2. Упорядоченные пары, декартово (прямое) произведение множеств.

3. Отношения и функции над множествами, образы, прообразы и композиция, аксиома выбора и бесконечные прямые произведения множеств.

4. Отношения эквивалентности, предпорядка, частичного порядка, линейного порядка. Фактор-множество. Лемма Цорна (без доказательства).

5. Вполне упорядоченные множества, ординалы и кардиналы, трансфинитная индукция, натуральные числа и ординалы в теории множеств, аксиома существования бесконечного множества и построение множества натуральных чисел. Теорема о сравнимости ординалов. Теорема о сравнимости вполне упорядоченных множеств. Теорема Цермело (без доказательства).

6. Теоремы Кантора и Кантора-Бернштейна. Операции на кардиналах и ординалах. Теорема о мощности квадрата (из теоремы Цермело).

Исчисление высказываний

1. Высказывания, их истинностная и теоретико-множественная семантика. Теорема о следовании в истинностной семантике из следования в теоретико-множественной семантике.

2. Секвенциальное исчисление высказываний. Линейный и древовидный выводы и их эквивалентность. Теорема о построении для квазивывода вывода. Теорема о двузначности секвенциального исчисления высказываний. Основные эквивалентности и нормальные формы. Доказательство теоретико-множественного следования из секвенциальной выводимости.

3. Гильбертовское исчисление высказываний. Теорема дедукции. Теорема о доказуемости следования в гильбертовском исчислении из секвенциального следования. Доказательство тождественной истинности в теоретико-множественной семантике формул доказуемых в гильбертовском исчислении высказываний.

4. Теорема об эквивалентности исчислений и семантик. Теорема о существовании конъюнктивной и дизъюнктивной нормальных форм в секвенциальном исчислении высказываний.

5. Теорема о характеризация доказуемых формул в секвенциальном исчислении высказываний и теорема Гёделя о полноте.

Теория моделей

1. Предикаты, сигнатуры, модели (алгебраические системы).

2. Синтаксис языка исчисления предикатов. Термы, формулы, свободные и связанные вхождения переменных.

3. Семантика языка исчисления предикатов. Истинность формул на модели и значение термов.

4. Гомоморфизмы, изоморфизмы. Подмодели, связь теоретико-модельных свойств с универсальными, экзистенциальными формулами и позитивными формулами.

5. Элементарные расширения и подсистемы, элементарные вложения, объединение элементарных цепей.

6. Фильтры, главные и неглавные, максимальные и ультрафильтры. Фильтрованные произведения и теорема Лося.

7. Теорема компактности Мальцева. Метод диаграмм и теорема Мальцева о расширении.

Исчисление предикатов

1. Предикатное исчисление в секвенциальной и гильбертовской форме.

2. Теорема о подстановке. Основные эквивалентности.

3. Теорема дедукции для гильбертовского исчисления. Теорема об эквивалентности секвенциального и гильбертовского исчислений.

4. Пренексная и предваренная нормальные формы. Теорема о приведении к нормальной форме.

5. Непротиворечивые множества формул и их свойства.

6. Теорема о существовании расширений Хенкина.

7. Каноническая модель теории Хенкина.

8. Теорема о существовании модели.

9. Теорема Гёделя о полноте классического исчисления предикатов.

Аксиоматические теории

1. Аксиоматика Цермело-Френкеля ZF.

2. Теорема об эквивалентности аксиомы выбора, леммы Цорна, теоремы Цермело и теоремы о мощности квадрата.

3. Аксиоматика Пеано и ее свойства.

4. Стандартные и нестандартные модели арифметики Пеано.

5. Концевые расширения. Формулы с ограниченными кванторами и Σ-формулы.

Теория вычислимости и теорема Гёделя о неполноте

1. Примитивно рекурсивные и частично рекурсивные и вычислимые функции. Теорема о представимости в стандартной модели арифметики.

2. Теорема о представимости в аксиоматике Пеано.

3. Гёделевская нумерация термов и формул и ее свойства.

4. Примитивная рекурсивность и возвратная рекурсия. Примитивная рекурсивность основных операций и отношений над термами и формулами: множества формул, множества термов, операции подстановки, множества аксиом гильбертовского исчисления предикатов, правил вывода, доказательств. Вычислимая перечислимость доказуемых формул.

5. Вычислимо перечислимые множества и их свойства. Перечислимость вычислимо аксиоматизируемых теорий и вычислимая аксиоматизируемость вычислимо перечислимо аксиоматизируемых теорий. Теорема об универсальной функции и нормальной форме Клини.

6. Теорема о неразрешимости непротиворечивых расширений аксиоматики Пеано.

7. Теорема Гёделя о неполноте. Теорема Чёрча о неразрешимости исчисления предикатов.

Программа семинарских занятий

2-й семестр 1-го курса

1. Теоретико-множественные отношения на множествах.
2. Частично-упорядоченные множества и отношения эквивалентности.
3. Мощности множеств.
4. Теоретико-множественная семантика высказываний и таблицы истинности.

5–6. Секвенциальное исчисление высказываний. Нормальные формы.

7–8. Исчисление высказываний гильбертовского типа. Независимость аксиом.

9. Контрольная работа.
10. Модели, гомоморфизмы, подмодели, произведения моделей.
11. Язык исчисления предикатов и его семантика.
12. Формульные множества и аксиоматизируемые классы. Элементарные подмодели.
13. Квазитождества и тождества. Свободные системы, конгруэнтности и фактор-системы.
14. Теорема компактности Мальцева и ее применения
15. Арифметика Пеано и ее модели.
16. Контрольная работа.

1-й семестр 2-го курса

1. Гильбертовское исчисление предикатов.
2. Истинность доказуемых формул.

3-4. Секвенциальное исчисление предикатов.

5. Приведение к пренексной и приведенной нормальной форме.
6. Устойчивость $\forall$-формул относительно подмоделей, $\exists$-формул относительно расширений и позитивных формул относительно гомоморфизмов. Аксоматика Пеано и типы индукции в арифметике.
7. Аксиоматическая теория множеств. Ординалы и их свойства.
8. Контрольная работа.

9–10. Примитивно-рекурсивные и частично рекурсивные функции.

11–12. Арифметика Пеано ее модели и Σ-формулы. Представимость рекурсивных функций в стандартной модели и теории арифметике Пеано.

13. Гёделевская нумерация термов и формул.

14–15. Неразрешимые проблемы. Теоремы неполноты расширений арифметики и разрешимости и неразрешимости теорий.

16. Контрольная работа.

Основная литература

1. Ю.Л. Ершов, Е.А. Палютин, Математическая логика, М.: Наука, 1979.

2. Э. Мендельсон, Введение в математическую логику, М.: Наука, 1971.

3. Ю.Л. Ершов, Определимость и разрешимость, НИИМИОО НГУ, Научная книга, 1996

4. П.С. Новиков, Элементы математической логики, М.: Наука, 1973.

5. С. Клини, Математическая логика, М.: Мир, 1973.

6. С. Клини, Введение в метаматематику, ИЛ, 1957.

7. Л.Л. Максимова, И.А. Лавров, Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов, М.: Физматлит, 2001.

8. С.С. Гончаров, Математическая логика, ч. 1, Новосибирск, НГУ, 2007.

9. С.С. Гончаров, Лекции по математической логики, ч. 2, Новосибирск, НГУ, 2009.

Дополнительная литература

10. Справочная книга по математической логике, под ред. Дж. Барвайса, М.: Наука, 1982, т.1–4.

11. Г. Кейслер, Ч.Ч. Чен, Теория моделей, М.: Мир, 1977.

12. С.С. Гончаров, Ю.Л. Ершов, Конструктивные модели, Новосибирск: Научная книга, 1999.

13. С.С. Гончаров, Счетные булевы алгебры и разрешимость, Новосибирск: Научная книга, 1996.

14. Х. Роджерс, Теория рекурсивных функций и вычислимость, М.: Мир, 1972.

15. Р. Соар, Вычислимо перечислимые множества и степени, Казань: Казанское мат. общ-во, 2000.

16. Ю.Л. Ершов, Проблемы разрешимости и конструктивные модели, М.: Наука, 1980.

17. К. Куратовский, А. Мостовский, Теория множеств, М.: Мир, 1970.

18. А.И. Мальцев, Алгоритмы и рекурсивные функции, М.: Наука, 1986.

19. Дж. Шёнфилд, Математическая логика, М.: Наука, 1975.

20. А. Робинсон, Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры, М.: Наука, 1967.

21. А. Чёрч, Введение в математическую логику, М.: Изд-во иностр. лит., 1960.

22. Дж. Булос, Р. Джеффри, Вычислимость и логика, М.: Мир, 1994.

23. Н. Катленд, Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций, М.: Мир, 1983.