МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет» (Новосибирский государственный университет, НГУ)
Механико-математический факультет

Кафедра теории вероятностей и математической статистики

Теория вероятностей

(программа учебного курса)

Направление подготовки
010100 Математика,
010200 Математика и компьютерные науки

Квалификация (степень) выпускника
Бакалавр

Форма обучения
Очная

Новосибирск 2014

Программа авторского учебного курса «Теория вероятностей» разработана в соответствии с ФГОС ВПО для студентов, обучающихся по ООП бакалавра по направлениям 010100 «Математика» и 010200 «Математика и компьютерные науки». Курс является новым. Классические разделы дисциплины — элементарная теория вероятностей, случайные величины, предельные теоремы, случайные процесссы — дополнены новыми современными результатами. Программа составлена на кафедре теории вероятностей и математической статистики механико-математического факультета НГУ в соответствии с требованиями к обязательному минимуму содержания и уровню подготовки дипломированного бакалавра по направлениям 010100 «Математика» и 010200 «Математика и компьютерные науки» по дисциплинам профессионального цикла, а также задачами, стоящими перед Новосибирским государственным университетом по реализации Программы развития НИУ-НГУ.

Автор
профессор, доктор физ.-мат. наук И. С. Борисов

Программа учебного курса подготовлена в рамках реализации
Программы развития НИУ-НГУ на 2009–2018 гг.

Аннотация рабочей программы

Дисциплина «Теория вероятностей» является частью профессионального цикла ООП по направлению подготовки 010100 «Математика» и направлению 010200 «Математика и компьютерные науки». Дисциплина реализуется в рамках профессионального цикла на Механико-математическом факультете Национального исследовательского университета Новосибирский государственный университет кафедрой теории вероятностей и математической статистики ММФ НИУ НГУ.

Курс предназначен для подготовки специалистов, обладающих глубокими знаниями в области теории вероятностей и навыками использования этих знаний в дальнейшей исследовательской работе. Содержание курса охватывает основные разделы теории вероятностей, к которым относятся комбинаторная теория вероятностей (классическая и дискретная вероятностные модели, модель геометрической вероятности), аксиоматика теории вероятностей, случайные величины и их характеристики (распределения, плотности, моменты), вероятностные и моментные неравенства, условное математическое ожидание, характеристические функции, предельные теоремы (законы больших чисел, центральная предельная теорема, а также классическая и обобщенная теоремы Пуассона).

Дисциплина нацелена на формирование общекультурных компетенций ОК-6, ОК-8, ОК-11, ОК-12, ОК-14, ОК-15 профессиональных компетенций ПК-1, ПК-2, ПК-3, ПК-4, ПК-5, ПК-6, ПК-7, ПК-8, ПК-9, ПК-10, ПК-22, ПК-27 выпускника по направлению подготовки 010100 «Математика», соответственно компетенций ОК-5, ОК-6, ОК-8, ОК-10, ПК-2, ПК-5, ПК-6, ПК-8, ПК-10, ПК-12, ПК-16 — по направлению 010200 «Математика и компьютерные науки».

Преподавание дисциплины предусматривает следующие формы организации учебного процесса: лекции, практические занятия, контрольные работы, контрольные задания, коллоквиум, самостоятельная работа студента.

Программой дисциплины предусмотрены следующие виды контроля: текущий контроль успеваемости в форме двух контрольных работ, двух контрольных заданий и коллоквиума, промежуточный контроль в форме зачета и экзамена. Формы рубежного контроля определяются решениями Ученого совета, действующими в течение текущего учебного года.

Общая трудоемкость дисциплины составляет 5,5 зачетных единиц, 199 академических часов. Программой дисциплины предусмотрены 54 часов лекционных и 36 часов практических занятий, а также 61 час самостоятельной работы студентов. Остальное время отведено контрольным работам, контрольным заданиям, зачету и экзамену.

1. Цели освоения дисциплины

Основной целью курса является выработка у студентов навыков использования вероятностных методов при решении математических задач как в рамках исследований по теории вероятностей, так и в иных областях математики.

Для достижения поставленной цели выделяются следующие задачи курса: познакомить слушателей с основными понятиями и методами теории вероятностей, дать представление о современном состоянии и развитии этой науки, сформировать у студентов навыки работы с понятийным аппаратом теории вероятностей.

2. Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата

Дисциплина «Теория вероятностей» является частью математического цикла ООП по направлению подготовки 010100 «Математика».

Дисциплина «Теория вероятностей» опирается на следующие дисциплины данной ООП:

- Математический анализ (теория пределов, ряды, дифференцирование, интегралы Римана, Лебега, Стилтьеса);
- Высшая алгебра (алгебраические системы, матрицы и детерминанты);
- Аналитическая геометрия (кривые и поверхности второго порядка, параметризация);
- Математическая логика (исчисление высказываний, теория множеств);
- Теория функций комплексного переменного (интегрирование и дифференцирование, степенные ряды);
- Функциональный анализ (линейные (векторные) нормированные пространства, гильбертовы пространства, проекторы).

Результаты освоения дисциплины «Теория вероятностей» используются в следующих дисциплинах данной ООП:

- Математическая статистика;
- Случайные процессы;
- Дополнительные главы теории вероятностей;
- Теория мартингалов;
- Статистика случайных процессов.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины «Теория вероятностей»:

- общекультурные компетенции, направление 010100 «Математика»:

ОК-6 — способность применять знания на практике,

ОК-8 — способность приобретать новые знания, используя современные образовательные и информационные технологии,

ОК-11 — фундаментальная подготовка по основам профессиональных знаний и готовность к использованию их в профессиональной деятельности,

ОК-12 — навыки работы с компьютером;

ОК-14 — способность к анализу и синтезу;

ОК-15 — способность к письменной и устной коммуникации на русском языке;

- профессиональные компетенции:

ПК-1 — определение общих форм, закономерностей и инструментальных средств отдельной предметной области,

ПК-2 — умение понять поставленную задачу,

ПК-3 — умение сформулировать результат,

ПК-4 — умение строго доказать утверждение,

ПК-5 — умение на основе анализа увидеть и корректно сформулировать результат,

ПК-6 — умение самостоятельно увидеть следствия сформулированного результата,
ПК-7 — умение грамотно пользоваться языком предметной области,
ПК-8 — умение ориентироваться в постановках задач,
ПК-9 — знание корректных постановок классических задач,
ПК-10 — понимание корректности постановок задач,
ПК-22 — владение проблемно-задачной формой представления математических знаний,
ПК-27 — умение точно представить математические знания в устной форме.

Общекультурные компетенции ОК-5, ОК-6, ОК-8, ОК-10, профессиональные компетенции ПК-2, ПК-5, ПК-6, ПК-8, ПК-10, ПК-12, ПК-16 — по направлению 010200 «Математика и компьютерные науки».

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

- иметь представление о месте и роли изучаемой дисциплины среди других наук;
- знать основные положения теоретических разделов курса, их прикладное значение;
- уметь применять полученные знания для решения математических задач;
- владеть навыками применения основных теорем и методов теории вероятностей.

4. Структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 5,5 зачетные единицы, 199 часов.

№ п/п	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)								Формы текущего контроля успеваемости *(по неделям семестра)* Форма промежуточной аттестации *(по семестрам)*
				Лекция	**Практическое занятие**	**Контр. работа**	**Самост. работа**	**Контрольное задание**	**Коллоквиум**	**Зачет**	Экзамен	
1.1	Стохастический эксперимент и пространство элементарных исходов. События и операции над ними. Всемирный закон стабилизации частот. Статистическое определение вероятности. Классическое определение вероятности. Вероятность на дискретных пространствах элементарных исходов.	5	1	2	2		5					Проверка ДЗ
1.2	Геометрическое распределение. Элементы комбинаторики. Выборки с возвращением и без возвращения. Принципы умножения и независимого выбора. Основные комбинаторные формулы (число размещений, сочетаний и перестановок). Гипергеометрическое распределение. Обобщенное гипергеометрическое распределение.	5	2	4	2		4					Проверка ДЗ
1.3	Аксиоматика теории вероятностей. Свойства вероятности. Лемма непрерывности.	5	3	2	2		5					Проверка ДЗ

1.4	Условная вероятность. Независимость событий. Формулы полной вероятности и Байеса. Схема Бернулли. Биномиальное распределение как распределение числа успехов в схеме Бернулли. Связь биномиального и гипергеометрического распределений.	5	4	4	2		4					Проверка ДЗ
1.5	Полиномиальное распределение и его связь с гипергеометрическим распределением. Теоремы Пуассона для биномиального и полиномиального распределений.	5	5	2	2		6					Проверка ДЗ
1.6	Нормальная (гауссовская) аппроксимация биномиального распределения. Обобщенная и классическая локальные предельные теоремы. Интегральная теорема Муавра-Лапласа.	5	6	4	2	2						**Контрольная работа, см. п. 6**
1.7	Случайные величины и их распределения. Функции распределения и их свойства. Классификация случайных величин и распределений.	5	7	2	2			2				Проверка контрольного задания
1.8	Случайные векторы и их распределения, плотности совместного распределения конечных наборов случайных величин. Независимые случайные величины. Распределение преобразований случайных величин и векторов. Распределение суммы независимых случайных величин. Формула свертки.	5	8	4	2		4					Проверка ДЗ
1.9	Виды сходимости последовательностей случайных величин: почти наверное, по вероятности, слабая. Лемма Бореля—Кантелли. Критерий сходимости почти наверное.	5	9	2	2		5					Проверка ДЗ
1.10	Математическое ожидание случайных величин. Моменты распределений. Формулы для вычисления моментов функций от случайных векторов. Дисперсия и ее свойства. Ковариация и коэффициент корреляции.	5	10	4	2		4					Проверка ДЗ
2.1	Вероятностные и моментные неравенства (неравенства Чебышева, Коши—Буняковского, Гёльдера, Йенсена, Минковского). Законы больших чисел в форме Чебышева и Хинчина. Усиленный закон больших чисел.	5	11	2	2		5					Проверка ДЗ
3.1	Условное математическое ожидания как проектор в гильбертовом пространстве случайных величин с конечными вторыми моментами.	5	12	4	2		4					Проверка ДЗ
3.2	Оптимальный прогноз случайных последовательностей. Линейный прогноз.	5	13	2	2		5					Проверка ДЗ
3.3	Многомерное гауссовское распределение. Критерий независимости компонент гауссовских векторов. Оптимальный прогноз гауссовских последовательностей.	5	14	4	2		4					Проверка ДЗ
4.1	Математическое ожидание случайного числа случайных величин. Тождество Вальда. Ветвящиеся процессы Гальтона—Ватсона. Асимптотическое поведение среднего числа потомков.	5	15	2	2		6					Проверка ДЗ

4.2	Характеристические функции и их свойства. Примеры. Формулы обращения. Устойчивость гауссовских и пуассоновских распределений.	5	16	4	2			2				Проверка контрольного задания
4.3	Теорема непрерывности. Метод характеристических функций.	5	17	2	2	2						**контрольная, см. п. 6**
4.4	Центральная предельная теорема, обобщенная теорема Пуассона. Метод композиции в оценке точности аппроксимации в классических предельных теоремах.	5	18	4	2				2			Коллоквиум
		5	19							2		**Зачет**
		5									36	**Экзамен**
				54	**36**	**4**	**61**	**4**	**2**	**2**	**36**	

Содержание отдельных разделов и тем

– **Вероятность и ее свойства**

1. Стохастический эксперимент и пространство элементарных исходов. События и операции над ними. Статистическое определение вероятности. Классическое определение вероятности ([1-3]).
2. Вероятность на дискретных пространствах элементарных исходов ([1-3]).
3. Элементы комбинаторики. Выборки с возвращением и без возвращения. Принципы умножения и независимого выбора. Основные комбинаторные формулы (число размещений, сочетаний и перестановок). Гипергеометрическое распределение ([1], [3]).
4. Геометрическая вероятность как непрерывный аналог классической схемы. Неравномерные распределения в недискретных пространствах элементарных исходов. Понятие плотности распределения ([2]).
5. Аксиоматика теории вероятностей. Вероятность как счетно-аддитивная мера на сигма-алгебре событий. Лемма непрерывности.
6. Условная вероятность. Независимые события и формула произведения вероятностей ([1]).
7. Разбиения пространства элементарных исходов. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Апостериорная вероятность ([1]).

– **Последовательности однородных независимых испытаний с конечным числом исходов**

1. Схема Бернулли. Биномиальное распределение (формула Бернулли). Связь биномиального и гипергеометрического распределений ([1], [3]).
2. Теорема Пуассона с оценкой скорости сходимости. Распределение Пуассона ([1-3]).
3. Полиномиальное распределение. Размещение частиц по ячейкам. Теорема Пуассона для полиномиального распределения ([2]).
4. Нормальное распределение. Нормальное приближение биномиального и полиномиального распределений. Локальная предельная теорема ([1], [2]).
5. Теорема Муавра – Лапласа ([1]).

– **Случайные величины (СВ)**

1. Типы распределений СВ: дискретные, абсолютно непрерывные, сингулярные, смеси. Плотность распределения ([1]).
2. Функции распределения и их свойства. Преобразования СВ ([1]).
3. Совместное распределение и независимость конечной совокупности СВ. Плотность совместного распределения. Композиция (свёртка) распределений ([1]).

4. Виды сходимости последовательностей СВ: слабая, по вероятности, в среднем, почти наверное. Лемма Бореля – Кантелли ([1]).
5. Моделирование случайных величин. Квантильные преобразования. Существование последовательностей независимых случайных величин.

– **Моментные характеристики распределений**

1. Математическое ожидание (МО) как абстрактный интеграл Лебега. Механическая интерпретация. Моменты. Формула замены переменной и интеграл Стилтьеса ([1]).
2. Вычисление МО функций от конечного набора СВ. Смешанные моменты. Теорема умножения ([1]).
3. Моменты второго порядка: дисперсия, ковариация, коэффициент корреляции. Ковариационная матрица. Неравенства Коши – Буняковского, Гёльдера, Минковского, Йенсена ([1], [3]).
4. Переход к пределу под знаком МО. Эквивалентное определение слабой сходимости ([1]).
5. МО случайного числа СВ. Тождество Вальда. Простейшие ветвящиеся процессы ([1], [4]).
6. Гильбертово пространство СВ с конечными вторыми моментами. Ортогональная проекция на замкнутое линейное подпространство ([1], [4]).
7. Условное МО при фиксации сопутствующих наблюдений (СВ) как ортогональная проекция ([1], [4]).
8. Задача о прогнозе. Оптимальный линейный прогноз ([1], [4]).
9. Многомерное нормальное распределение. Приведение к каноническому виду. Некоррелируемость и независимость СВ. Оптимальный прогноз гауссовских последовательностей ([1]).
10. Условные распределения. Условные квантильные преобразования. Моделирование последовательностей случайных величин с заданными совместными распределениями.

– **Закон больших чисел**

1. Неравенство Чебышева и его обобщения ([1]).
2. Законы больших чисел для последовательностей слабо зависимых СВ с конечными дисперсиями.
3. Закон больших чисел в форме Хинчина ([1]).
4. Усиленный закон больших чисел ([1]).

– **Характеристические функции**

1. Основные свойства характеристических функций ([1]).
2. Вычисление характеристических функций классических распределений ([1]).
3. Формулы обращения. Теорема о взаимно-однозначном соответствии ([1]).
4. Теорема непрерывности. Метод характеристических функций ([1]).

– **Основные предельные теоремы с оценкой скорости сходимости**

1. Нормальная аппроксимация сумм независимых СВ с конечными дисперсиями (центральная предельная теорема, [1]).
2. Оценка скорости сходимости средних в центральной предельной теореме. Метод композиций ([1]).
3. Обобщение теоремы Пуассона. Обобщенное распределение Пуассона ([1], [3]).
4. Оценка скорости сходимости средних в теореме Пуассона.

– **Простейшие случайные процессы**

1. Способы задания распределений случайных процессов. Теорема Колмогорова ([1]).

2. Бернуллиевское блуждание на прямой. Задача о разорении ([2]).
3. Процессы восстановления. Теорема восстановления. Процесс Пуассона ([1]).
4. Процессы с независимыми приращениями. Винеровский процесс ([1]).
5. Марковские процессы со счетным множеством состояний (цепи Маркова). Марковское свойство показательного распределения ([1], [4]).
6. Эргодическая теорема для цепей Маркова. Стационарное распределение ([4]).

5. Образовательные технологии

Традиционная лекционно-семинарская система обучения.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

Контроль за самостоятельной работой студентов предусматривается в виде еженедельной проверки выполнения домашних заданий. В течение семестра выполняются две контрольные работы, сдается два контрольных задания и принимается коллоквиум. Выполнение указанных видов работ является обязательным для всех студентов, а результаты текущего контроля служат основанием для выставления зачета.

Перечень примерных вопросов для контрольных работ и заданий для самостоятельной работы:

1. Дана последовательность событий A_1, A_2, A_3, … С помощью теоретико-множественных операций описать событие, состоящее в том, что в последовательности A_1, A_2, A_3, … произошло бесконечное число событий с четными номерами.
2. Один школьник, желая подшутить над своими товарищами, собрал в гардеробе все фуражки, а потом развесил их в случайном порядке. Какова вероятность p_n, что хотя бы одна фуражка попала на прежнее место, если всего в гардеробе n крючков и на них n фуражек.
3. Стержень длины l разломан в двух наудачу выбранных точках. Чему равна вероятность того, что из полученных отрезков можно составить треугольник?
4. Письмо находится в письменном столе с вероятностью p, причем с равной вероятностью оно может быть в любом из восьми ящиков стола. Мы просмотрели 6 ящиков и письма не нашли. Какова вероятность, что письмо в седьмом ящике?
5. Что вероятнее: при бросании четырех игральных костей хотя бы на одной получить единицу или при 24 бросаниях двух костей хотя бы один раз получить две единицы?
6. Из урны, в которой было $m \geq 3$ белых шаров и n черных, потеряли один шар неизвестного цвета. Для того, чтобы определить состав шаров в урне, из нее наудачу были вынуты два шара. Найти вероятность того, что был потерян белый шар, если известно, что вынутые шары оказались белыми.
7. Диаметр круга измерен приближенно. Считая, что его величина равномерно распределена на отрезке [a,b], найти распределение площади круга.
8. Пусть ξ и η – координаты точки, бросаемой наудачу в круг единичного радиуса с центром в начале прямоугольной декартовой системы координат. Доказать, что случайные величины ξ и η зависимы.
9. Пусть ξ и η – независимые одинаково распределенные гауссовские случайные величины. Доказать, что $\xi + \eta$ и $\xi - \eta$ независимы.

10. Вычислить математические ожидания и дисперсии (если таковые существуют) всех стандартных распределений.
11. Пусть имеется n ячеек, в которые наудачу и независимо друг от друга размещаются k частиц. Найти среднее значение числа пустых ячеек.
12. Случайные величины ξ и η независимы и нормально распределены с параметрами a и σ^2. Найти коэффициент корреляции величин $\alpha\xi + \beta\eta$ и $\alpha\xi - \beta\eta$, а также их совместное распределение.
13. Пусть случайная величина ξ имеет пуассоновское распределение с параметром λ. Доказать, что $P(\xi \geq 2\lambda) \leq 1/\max(2, \lambda)$.
14. Вычислить характеристические функции всех стандартных распределений.
15. Пусть $\{\xi_n\}$ – последовательность случайных величин. Доказать, что если ряд из вторых моментов этих величин сходится, то последовательность $\{ \xi_n \}$ сходится к нулю п.н.
16. Пусть f из [0,1] в **R** – непрерывная функция. Доказать, что полиномы Бернштейна P(x) стремятся к f(x) с ростом n равномерно по x из [0,1].
17. Выполнен ли ЗБЧ для последовательности независимых и одинаково распределенных с. в. с законом распределения Коши?
18. Доказать выполнение ЗБЧ для последовательности m-зависимых одинаково распределенных случайных величин с конечными дисперсиями.
19. Пусть случайная величина ξ_n имеет распределение Пуассона с параметром n. Выяснить, существует ли слабый предел при n стремящемся к бесконечности отношения $(\xi_n - n)/\sqrt{n}$?
20. При 14400 бросаниях монеты герб выпал 7428 раз. Как вероятно столь большое или большее уклонение доли выпавших гербов от 1/2?
21. Распределение случайной величины ξ определяется формулами $P\{\xi=k\}=c/k(k+1)$, k=1,2,... Найти а) c; б) $P\{\xi\leq 3\}$; в)$P\{\eta_1\leq\xi\leq\eta_2\}$.
22. Плотность распределения с. величины ξ задается формулами $P_\xi(x)=c/x^4$, если $x\geq 1$ и $P_\xi(x)=0$, если $x<1$. Найти: а) c; б) плотность распределения с. величины $\eta=1/\xi$; в)$P\{0.1<\eta<0.3\}$.
23. Случайная величина имеет показательное распределение с параметром □. Найти плотности распределений с.величин а) $\eta=\sqrt{\xi}$; б) $\eta=\xi^2$; в) $\eta=1/2\ln\xi$; г) $\eta=\{\xi\}$; д) $\eta=1-e^{-\alpha\xi}$.
24. Случайная величина распределена равномерно на отрезке [0,1]. Найти плотность распределения с.величины а)$\eta=2\xi+1$; б) $\eta=-\ln(1-\xi)$.
25. Случайная точка B имеет равномерное распределение на окружности $x^2+(y-a)^2=r^2$, а с.точка $C=(\xi,0)$ является пересечением оси абсцисс с прямой, проходящей через центр окружности и точку B. Найти функцию распределения и плотность распределения сл. величины ξ (распределение Коши).
26. Случайная величина ξ имеет непрерывную функцию распределения F(x). Показать, что случайная величина $\eta=F(\xi)$ имеет равномерное распределение на [0,1].
27. Пусть ξ равномерно распределена на [0,1], а $F^{-1}(y)=\sup\{x:F(x)<y\}$, $0\leq y\leq 1$, функция, обратная к функции распределения (не обязательно непрерывной). Доказать, что случайная величина $\xi=F^{-1}(\eta)$ имеет функцию распределения F(x).
28. Функция F(x) непрерывна в каждой точке. Доказать, что она равномерна непрерывна на R.
29. Совместное распределение сл.величин ξ_1,ξ_2 задано: $p_{11}=1/8$, $p_{12}=1/12$, $p_{13}=7/24$, $p_{21}=5/24$, $p_{22}=1/6$, $p_{23}=1/8$, где $P_{ij}=P\{\xi_1=x_i,\xi_2=y_i\}$, i=1,2; j=1,3, $x_1=-1$,$x_2=\overline{-1}$; $y_1=-1$, $y_2=0$, $y_3=1$. Найти а) одномерное распределение $P_{\xi 1}$, $P_{\xi 2}$; б) совместное распределение сл.величин $\eta_1=\xi_1+\xi_2$, $\eta_2=\xi_1\xi_2$; в) одномерное распределение $P_{\eta i}$, i=1,2.

30. Плотность совместного распределения величин ξ и η определяется равенствами $f(u,v)= 1$, если $(u,v) \in G=\{(u,v): 0\le u\le 2, 0\le v<1- u/2\}$, и $f(u,v)= 0$,если $(u,v) \notin G$. Найти $f_\xi(x)$.
31. Плотность совместного распределения сл. величин ξ_1иξ_2 $f_{\xi_1\xi_2}(u,v)= C(u+v)$, если $(u,v)\in [0,1] \times [0,1]$ и $f_{\xi_1\xi_2}(u,v)= 0$,если $(u,v) \in [0,1] \times [0,1]$. Найти а) постоянную С; б) $f_{\xi_i}(x_i)$, i=1,2; в) плотность распределения $\eta=\max(\xi_1,\xi_2)$
32. Плотность $f_{\xi_1\xi_2}(u,v)= 2/\pi(u^2+v^2)^3$, если $u^2+v^2\ge 1$, и 0, если $u^2+v^2<1$. Найти $f_\eta(y)$, если $\eta=\xi_1^2+\xi_2^2$
33. Неотрицательные с.величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют одну и ту же плотность распределения $f(x)$, $x\ge 0$. Найти $f_{\eta_1\eta_2}(u,v)$, если $\eta_1= \xi_1-\xi_2$ и $\eta=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}$.
34. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют одно и то же показательное распределение. Найти $P\{|\xi_1-\xi_2|\le 1\}$.
35. Случайные величины ξ и η независимы и имеют равномерное распределение на [0,1]. Найти плотность распределения с.величины а) $\xi+\eta$; б)$\xi-\eta$; в) $\xi\eta$; г) ξ/η.
36. Случайные величины ξ и η независимы и имеют показательное распределение с параметром $\lambda=1$. Найти плотность распределения с.в. а) $\xi+\eta$; б)$\xi-\eta$; в) $|\xi-\eta|$; г) ξ/η.
37. Найти $P_{\xi+\eta}(x)$, если а) ξ имеет равномерное распределение на [0,1], η-равномерно распределена на[0,2]; б) ξ имеет равномерное распределение на [0,1], η-показательное с параметром $\lambda=1$; в) обе с.в. распределены по показательному закону с одним и тем же параметром; г) обе с.величины распределены по закону Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2.
38. Найти плотность распределения с.величины $\eta= \xi_1/ (\xi_1+ \xi_2)$,если ξ_i, i=1,2, независимы и равномерно распределены на [0,1].
39. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы, $P\{ \xi_1=0\}=P\{\xi_1=1\}=\frac{1}{2}$, ξ_2 равномерно распределена на отрезке [0,1]. Найти закон распределения с.в. $\xi_1+\xi_2$.

Примерные варианты контрольных работ:

Контрольная работа номер 1, вариант 1

1. Из первых ста натуральных чисел наудачу выбирается 4 числа. Какова вероятность, что их сумма — чётное число?
2. В урне имеется М белых шаров и 1 черный. Наудачу вынимается 1 шар. Если шар оказался белым, его возвращают в урну и, кроме того, добавляют туда еще один белый шар, после чего процедура повторяется. Если же шар оказался черным, эксперимент прекращается. Какова вероятность рано или поздно вынуть черный шар ?

Контрольная работа номер 1, вариант 2

1. На единичный квадрат независимо друг от друга наудачу бросаются три точки, которые являются центрами окружностей радиуса 1/2. Какова вероятность, что любая прямая, пересекающая квадрат параллельно любой из его сторон, пересекается хотя бы с одной окружностью?
2. Пусть A(k) - бесконечная последовательность событий. С помощью теоретико-множественных операций описать следующие события:

B = {произошло ровно М событий из последовательности {A(k)},
C = {произошли все A(k) за исключением конечного числа}.

Контрольная работа номер 1, вариант 3

1. В аудитории 100 студентов. Оценить вероятность того, что по крайней мере у одного из студентов день рождения 20 января.
2. Привести примеры вероятностных пространств с различными полями событий. Построить на них неизмеримые отображения.

Контрольная работа номер 1, вариант 4

1. При подозрении на заболевание ангиной, корью или скарлатиной производится некоторый анализ. Вероятность положительного результата анализа при ангине, кори и скарлатине соответственно равна 0,2, 0,1, 0,9. При трех независимых повторных анализах у одного больного положительный результат наблюдался два раза. Какова вероятность того, что он болен именно скарлатиной?
2. В M ящиков брошено K дробинок. Предполагается, что все распределения K дробинок по M ящикам равновозможны (распределение Бозе-Эйнштейна). Найти вероятность того, что H ящиков окажутся пустыми.

Контрольная работа номер 1, вариант 5

1. Пусть {A(k)} - бесконечная последовательность событий. С помощью теоретико-множественных операций описать следующее событие
   B = {произошло и не произошло бесконечно много событий из {A(k)}.
2. Некто написал M адресатам письма, а затем в случаном порядке вложил их в конверты. Какова вероятность, что хоть одно письмо попадет нужному адресату?

Контрольная работа номер 1, вариант 6

1. Пусть события A, B, C независимы. Доказать, что и противоположные к ним события также независимы.
2. В урне лежат 2 белых и 4 чёрных шара. Два игрока по очереди тянут шары без возвращения до тех пор, пока не появится белый шар. Какова вероятность выигрыша для игрока, начинающего игру?

Контрольное задание 1

1. В купейный вагон (9 купе по 4 места) шести пассажирам продано шесть билетов. Найти вероятность того, что занятыми оказались только три купе.

2. Среди студентов группы 2 человека знают ответы на 20 экзаменационных вопросов (отличники), 10 человек знают ответы только на 15 экзаменационных вопросов из 20 (хорошисты), 5 человек – на 10 вопросов из 20 (троечники) и 5 человек – только на 5 вопросов из 20. Наугад выбранный студент смог ответить только на 2 вопроса из трех. Какова вероятность, что он троечник?

3. Две точки произвольным образом независимо друг от друга бросаются в круг. Какова вероятность, что они расположатся на одинаковом расстоянии от центра?

4. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром α. Найти плотность распределения случайной величины $Y=\sqrt{X}$.

5. Пусть X и Y - независимые случайные величины, причем X имеет равномерное распределение на отрезке [0, 1], а Y – распределение Бернулли с параметром 1/2. Найти функцию распределения случайной величины $Y+X$.

Контрольное задание 2

1. Для определения вероятности p изделия быть бракованным пользуются приближением $p \approx S_n/n$, где S_n – число бракованных в партии из n изделий. Насколько большим должно быть число n, чтобы с вероятностью не менее 0.95 величина S_n/n отличалась от p менее, чем на 0.001?

2. Вычислить $E(1+X)^{-1}$, если случайная величина X имеет биномиальное распределение.

3. Может ли функция $\varphi(t) = e^{-i|t|}$ быть характеристической для некоторого распределения?

4. Случайные величины $X_1, \dots, X_n$ независимы и распределены с плотностью

$$f(y) = \begin{cases} \alpha e^{\alpha y}, & y < 0, \\ 0, & y \geq 0. \end{cases}$$

Доказать, что max($X_1, \dots, X_n$) сходится к нулю по вероятности.

Экзаменационный билет № 1.

1. Привести пример решетчатого распределения, характеристическая функция которого не является периодической.
2. Доказать обобщенное неравенство Гёльдера для математического ожидания произведения n случайных величин.

Экзаменационный билет № 2.

1. Привести пример характеристической функции с ограниченным носителем.
2. При бросании наудачу независимо друг от друга n точек в круг единичного радиуса найти плотность распределения минимального расстояния от этих точек до центра круга.

Экзаменационный билет № 3.

1. Доказать, что выпуклая линейная комбинация счетного набора характеристических функций снова будет характеристической.
2. Доказать, что если последовательность функций распределения слабо сходится к непрерывной функции распределения, то имеет место и равномерная сходимость указанных функций.

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: Либроком, 2009, 656 с.
2. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 2005, 478 с..

б) дополнительная литература:

3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Либроком, Т.1, 2010, 1080 с.
4. Розанов Ю.А. Случайные процессы. Краткий курс. М.: Наука, 1979.
5. И.С.Борисов. Лекции по по теории вероятностей. Новосибирск: НГУ, 2010.

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Нет.