МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ

____

«___»________________2014 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

«Численный анализ»

направление подготовки
010400 – «Прикладная математика и информатика»

квалификация (степень) выпускника
Бакалавр

Форма обучения очная

Новосибирск 2014

Программа курса (дисциплины) **«Численный анализ»** составлена в соответствии с требованиями к обязательному уровню содержания и уровню подготовки бакалавра по направлению подготовки **010100 – «Математика»**, а также задачами, стоящими перед Новосибирским государственным университетом по реализации Программы развития НГУ.

Автор: Ильин Валерий Павлович, доктор физико-математических наук, профессор, специальность 01.01.07 – вычислительная математика

Факультет: механико-математический (ММФ)
Кафедра: вычислительной математики ММФ НГУ

Содержание

1. Цели освоения дисциплины (курса) “Численный анализ”.
2. Место дисциплины “Численный анализ” в структуре ООП подготовки бакалавров ММФ НИУ-НГУ по направлению «010100 - Математика».
3. Компетенции обучающегося, формируемые и развиваемые в результате освоения дисциплины.
4. Структура и содержание дисциплины.
5. Образовательные технологии курса.
6. Учебно-методическое обеспечение дисциплины.
7. Материально-техническое обеспечение курса.

1. Цели освоения дисциплины (курса) *«Численный анализ»*

Курс “Численный анализ” имеет своей целью освоение студентами ММФ НГУ, проходящих обучение по направлению “010100 - Математика”, современных тенденций развития теории численных методов решения ОДУ, которые находят широкое применение при решении задач вычислительной и индустриальной математики, а также при моделировании процессов и явлений во многих актуальных приложениях, в том числе на основе активного использования многопроцессорных вычислительных систем (МВС).

В определенном смысле ОДУ представляют собой частный раздел уравнений математической физики (или математической химии, биологии и т.д.). Однако выделение их изучения в отдельную дисциплину совершенно оправдано. Во-первых, здесь удается исследовать достаточно глубоко свойства их решений и на основе этого построить наиболее совершенные численные методы. Во-вторых, для многих актуальных приложений система ОДУ – самодостаточный и чрезвычайно важный математический объект, адекватно описывающий сложные процессы и/или явления. Достаточно вспомнить задачи астрономии, привлекающие внимание человечества еще с доисторических времен, а также химической кинетики, электротехники, механики и т.д. В-третьих, во многих нестационарных многомерных задачах после аппроксимации дифференциальных уравнений по пространственным переменным мы приходим к системам ОДУ большого порядка, и здесь приходят на помощь соответствующие эффективные алгоритмы.

В общетеоретическом плане ОДУ давно и достаточно хорошо исследованы, особенно для линейных случаев. Первоочередные вопросы здесь, – это существование и единственность решения, его корректность и оценки устойчивости к возмущениям исходных данных, правых частей или параметров уравнений, асимптотические свойства и сингулярности в различных характерных ситуациях. Однако затем главное внимание стали привлекать более сложные проблемы, обусловленные факторами нелинейности и параметризации решений: явления бифуркации, предельные циклы и странные аттракторы, которые привели к появлению теории динамических систем, хаоса и катастроф.

Наиболее глубоко удается изучить линейные системы ОДУ, а в особенности – самые простые уравнения с постоянными коэффициентами. Это вполне естественно, а основным орудием исследования здесь является аппарат линейной алгебры. Зачастую полученные для простейших случаев результаты являются ориентиром и при разработке алгоритмов для более сложных задач – или нелинейных, или даже линейных, но имеющих переменные коэффициенты уравнений.

Однако так бывает далеко не всегда, и яркой тому иллюстрацией являются так называемые жесткие системы ОДУ, к решению которых приковано внимание многих математиков, начиная со второй половины 20-го века. С практической, или физической, точки зрения, такие задачи характерны наличием как гладко меняющихся со временем, так и быстро растущих (или убывающих) компонент решения. В математическом формализме это соответствует сильному разбросу значений коэффициентов, а также очень плохой обусловленности матриц в системах ОДУ. Появился также и специальный термин – нелинейная неустойчивость. В результате возникшие насущные проблемы инициировали новое поколение алгоритмов и поток публикаций с оригинальными теоретическими подходами: одностороннее условие Липшица, понятия контрактивности, логарифмической нормы, B-сходимости и т.д.

Среди направлений, активно развиваемых в последние десятилетия, следует выделить численные методы решения гамильтоновых систем уравнений, основанных на лагранжевых вариационных принципах и обладающих замечательными свойствами сохранения энергии и других инвариантов, которые важно наследовать при построении алгоритмов интегрирования, особенно при моделировании нелинейных волновых процессов на длительных временных интервалах.

В данном курсе с единых современных позиций изучается конечно-разностные, коллокационные, конечно-элементные и конечно-объемные методы решения линейных и нелинейных, нежестких и жестких задач Коши и краевых задач, включая дифференциально-алгебраические и сингулярно-возмущенные системы ОДУ.

Важно отметить, что необходимость согласованного изучения методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных определяется актуальными потребностями математического моделирования наиболее сложных междисциплинарных процессов разных временных масштабов, в которых достаточно медленные макропроцессы переноса субстанции протекают на фоне быстрых кинетических явлений, описываемых системами ОДУ.

Предлагаемый курс «Численный анализ» соответствует высокому международному научному уровню в области исследований по теории и приложениям алгоритмов численного анализа. Курс нацелен, в том числе, на формирование у студентов исследовательских навыков. Программа курса подразумевает возможное включение в него обзоров новых научных результатов.

2. Место дисциплины *«Численный анализ”* в структуре ООП

Дисциплина “Численный анализ” является одной из базовой по профилю “Численный анализ” и служит фактически вводным курсом для изучения методов решения многомерных задач математической физики, а также математического моделирования на основе применения МВС.

В свою очередь, изучение данной дисциплины основывается на базовых знаниях студента по принципам приближения функций и их производных, квадратурным формулам для вычисления интегралов, методам линейной алгебры и решения нелинейных уравнений.

3. Компетенции обучающегося, формируемые и развиваемые в результате освоения дисциплины *«Численный анализ» (по направлению подготовки 010100 – «Математика»)*:

общекультурные компетенции:

- навыки межличностных отношений; готовность к работе в команде (ОК-1);
- способность применять знания на практике (ОК-6);
- способность приобретать новые знания, используя современные информационные и образовательные технологии (ОК-8);
- фундаментальная подготовка по основам профессиональных знаний и готовность к использованию их в профессиональной деятельности (ОК-11);
- способность к анализу и синтезу (ОК-14);

профессиональные компетенции:

- определение общих форм, закономерностей и инструментальных средств отдельной предметной области (ПК-1);
- умение понять поставленную задачу (ПК-2);
- умение формулировать результат (ПК-3);
- умение строго доказать утверждение (ПК-4);
- умение на основе анализа увидеть и корректно сформулировать результат (ПК-5);
- умение самостоятельно увидеть следствия сформулированного результата (ПК-6);
- умение грамотно пользоваться языком предметной области (ПК-7);
- умение ориентироваться в постановках задач (ПК-8);
- знание корректных постановок классических задач (ПК-9);

- понимание корректности постановок задач (ПК-10);
- владение методами математического и алгоритмического моделирования при анализе теоретических проблем и задач (ПК-21);
- владение проблемно-задачной формой представления математических знаний (ПК-22);
- умение самостоятельно математически корректно ставить естественно-научные и инженерно-физические задачи (ПК-25);
- умение извлекать полезную научно-техническую информацию из электронных библиотек, реферативных журналов, сети Интернет (ПК-17);
- умение публично представить собственные и известные научные результаты (ПК-18).

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

- **знать** основы теории и приложений методов решения ОДУ и современные направления их развития;
- **уметь** реализовывать алгоритмы метода решения ОДУ и анализировать их с точки зрения эффективности и возможностей применения для решения актуальных прикладных задач;
- **владеть** основными принципами выбора соответствующих методов в зависимости от свойств конкретных приложений.

4. Структура и содержание дисциплины *«Численный анализ»*

Трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единицы, 108 часов, из которых 48 часов отведены аудиторной нагрузке (16 лекций и 8 семинарских занятий). По окончании курса проводится экзамен.

№ п/п	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)					Формы текущего контроля успеваемости *(по неделям семестра)* Форма промежуточной аттестации *(по семестрам)*
				Лекция	Практ. занятия	Самост. работа	Контр. работа	Экзамен	
1	Свойства решений задачи Коши для системы ОДУ		1	2	2	2			
2	Основные понятия и классификация численных методов		2-3	4	2	4			
3	Методы Рунге-Кутты и многошаговые методы численного решения задачи Коши для системы ОДУ		4-11	16	8	10			
4	Сеточные методы решения краевых задач для ОДУ		12-16	10	4	8			
								36	Экзамен
				32	**16**	**24**		**36**	

4.1. Общий план лекций

Математические проблемы, возникающие при решении обыкновенных дифференциальных уравнений, методологически и исторически делятся на две достаточно самостоятельные части. Первая относится к решению задач Коши с заданными начальными данными для искомых функций, в которых типичная независимая переменная – это время. Изложению соответствующих вопросов посвящены первые одиннадцать лекций, а вторая часть, содержащая изучение методов решения краевых задач, включает пять лекций. В целом материал курса может быть представлен четырьмя крупными темами, или разделами.

Первая тема

Первая лекция содержит описание основных свойств исследуемых объектов: определения, классификация и примеры задач Коши, включая уравнения лагранжевой механики, гамильтоновые системы, а также сингулярно-возмущенные и дифференциально-алгебраические задачи. Важный класс рассматриваемых систем ОДУ возникает при решении многомерных уравнений в частных производных после реализации сеточных аппроксимаций операторов по пространственным переменным. Даются такие основополагающие понятия, как потоки, фазовые траектории и портреты систем ОДУ, вопросы существования, единственности, гладкости и способы представления решений для однородных или неоднородных систем с постоянными и переменными коэффициентами. Рассматриваются основополагающие теоремы Лиувиля, Пикара и Гребнера, касающиеся интегральных представлений вронскиана, решения системы ОДУ и возмущения решения через исходные данные задачи Коши. Здесь же изучаются фундаментальные категории устойчивости по Ляпунову и контрактивности (основанном на определении одностороннего условия Липшица), а также специальные понятия, характерные для жестких систем ОДУ и для динамических задач с такими особенностями, как периодичность, предельные циклы, странные аттракторы и т.д., без понимания которых трудно ожидать появления эффективных и робастных (безотказных) вычислительных методов.

Вторая тема

Во второй и третьей лекциях даются общие представления, терминология и спецификации численных алгоритмов, такие как локальная и глобальная погрешности, устойчивость и сходимость, включая их многочисленные характеризации в зависимости от сложности изучаемых задач Коши. Приводятся классификация и основные особенности явных и неявных, многостадийных и линейных многошаговых алгоритмов. Рассматриваются основные принципы конструирования аппроксимаций на основе тейлоровских разложений и коллокационных условий. Изучаются блочные, гибридные и экстраполяционные методы, а также семейство методов типа предиктор-корректор. На их основе формулируются априорные и апостериорные подходы, включая алгоритмы Рунге, Ричардсона и двусторонних приближений, для уточнения численных решений, а также гарантированные оценки получаемых погрешностей.

Излагаются понятия устойчивости по норме и оценки погрешности численного решения, а также определения абсолютной и сильной устойчивости, *D*-устойчивости, *A*-устойчивости и *L*-устойчивости вычислительных схем в терминах корневых условий характеристических многочленов. Изучаемые свойства иллюстрируются для простейших алгоритмов Эйлера, средней точки и трапеций на примерах модельных уравнений Далквиста и Протеро–Робинсона. Здесь же приводятся основные сведения из линейной алгебры, необходимые для исследования свойств рассматриваемых методов (гельдеровские нормы и числа обусловленности систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), треугольные разложения матриц, оценки возмущения решений СЛАУ при наличии погрешностей в исходных данных решаемой системы и общие методы решения разностных уравнений с постоянными коэффициентами), а также предлагаются минимально требуемые сведения по итерационному решению систем нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ) при использовании неявных подходов к численному интегрированию нелинейных ОДУ, включая анализ методов простой итерации, Ньютона–Канторовича, Кенига и их блочные обобщения.

Третья тема

Следующие восемь лекций содержат систематические исследования двух главных типов алгоритмов для решения задач Коши – одношаговых m-стадийных и многошаговых методов. К первому классу относятся явные и неявные методы Рунге–Кутты (МРК), методы типа Розенброка (МтР), а также их разновидности и обобщения – диагонально неявные, разделяющиеся и коллокационные МРК, abc-схемы С.С.Филиппова. Проводится сравнительный анализ основных и наиболее характерных вычислительных схем. Для них систематически анализируются условия порядка и функции устойчивости, а также условия A-устойчивости и L-устойчивости. Описываются условия применения алгоритмов для неявных систем дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных. Формулируются основополагающие теоремы Батчера, Хайрера и Неймана относительно достижимых порядков точности и алгебраических условий устойчивости МРК. Отдельно рассматриваются симплектические интеграторы для гамильтоновых систем обыкновенных дифференциальных уравнений, в том числе симплектические методы Эйлера–Вогеларе, Штермера–Верле и Рунге–Кутты, а также специальные методы Нюстрема различных порядков для решения систем ОДУ второго порядка и жестко-точные алгоритмы для сингуляно-возмущенных задач, имеющих обширные практические приложения. Исследуются вопросы существования и единственности неявных схем Рунге–Кутты. В методах решения жестких задач определяются и исследуются свойства, базирующиеся на односторонних условиях Липшица: B-устойчивость, контрактивность, AN-устойчивость, B-согласованность и B-сходимость. Описываются важные практические подходы к автоматическому контролю точности и устойчивости вычислительных схем, в том числе основанные на результатах Е.А.Новикова.

Среди многошаговых методов изучаются все основные семейства: явные и неявные алгоритмы Адамса, методы Нюстрема и Милна, формулы дифференцирования назад (ФДН) различных порядков. Рассматриваются локальные погрешности и условия устойчивости многошаговых методов, наивысшие достижимые порядки устойчивых алгоритмов, области абсолютной устойчивости, кривые локуса корней характеристических многочленов с представительным набором демонстративных примеров, барьеры Далквиста для достижимых порядков устойчивых многошаговых схем и понятие $A(\alpha)$-устойчивости, значительно расширяющее класс алгоритмов, применимых для решения практических задач. Исследуемые общие свойства вычислительных схем иллюстрируются на характерных вариантах методов, включая их итерационные версии типа прогноза и коррекции. Описываются также такие обобщения, как многошаговые методы Рунге–Кутты, в том числе одноопорные многошаговые МРК, являющиеся чрезвычайно перспективными в плане построения новых алгоритмов повышенной точности, обладающих широкими областями устойчивости. Излагаются оригинальные явные алгоритмы с переменными шагами В.И.Лебедева для устойчивого решения жестких задач, реализованные в известном пакете программ ДУМКА и составляющие серьезную конкуренцию традиционным неявным схемам.

Четвертая тема

Последний раздел дисциплины, включающий пять лекций, фактически представляет собой автономную часть курса. Хотя исторически методы решения краевых задач для ОДУ и алгоритмы численного интегрирования задач Коши описывались в отдельных книгах специалистами в разных направлениях вычислительной математики и на различных методологических основах, мы хотим подчеркнуть в данном случае единство методологических принципов, основанных на сеточных аппроксимациях, устойчивости, сходимости и оптимизации алгоритмов по условиям обеспечения требуемой точности при минимальных вычислительных затратах.

С физической точки зрения в последнем разделе рассматриваются стационарные или гармонические по времени одномерные смешанные краевые задачи диффузии, теплопроводности, электродинамики и других многочисленных приложений. Среди различных способов дискретизации исходных непрерывных задач в книге с единых позиций излагаются три основных сеточных подхода. Первый – методы конечных разностей (МКР) – основанные на непосредственной замене производных конечно-разностными выражениями, наиболее близок к описанной в первых главах методологии решения задач Коши для систем ОДУ. Второй подход базируется на аппроксимациях интегральных законов сохранения, являющихся следствиями (а возможно, и наоборот) исходных дифференциальных уравнений. В 1960-е годы получающиеся сеточные схемы назывались балансными, или консервативными, но в последующие годы за ними закрепилось название методов конечных объемов (МКО). Наконец, самые распространенные в последние десятилетия вычислительные инструменты – это методы конечных элементов (МКЭ), заключающиеся в построении приближенных обобщенных решений соответствующих вариационных постановок, эквивалентных в определенном смысле классическим дифференциальным формулировкам. Серьезное преимущество МКЭ заключается не только в наличии важных теоретических достижений на базе аппарата соболевских пространств, обеспечивающих разработку и обоснование эффективных методов высоких порядков точности для самого широкого класса задач математического моделирования, но и в создании уникальных компьютерных технологий, основанных на определении локальных сеточных по-элементных матриц и сборке (ассемблировании) глобальных матриц. Последние качества позволяют обеспечивать как высокий уровень автоматизации построения алгоритмов и программирования, так и возможности масштабируемого распараллеливания расчетов на современных многопроцессорных и многоядерных суперкомпьютерах.

Для всех трех типов сеточных дискретизаций рассматривается их применение для основных характерных видов дифференциальных или соответствующих вариационных постановок при различных типах граничных условий. Значительно внимание уделяется построению компактных аппроксимаций повышенной точности, основанных на использовании свойств искомых решений в исходных краевых задачах и обладающих хорошими свойствами устойчивости, а также позволяющих конструировать экономичные алгоритмы реализации.

Помимо индивидуальных аппроксимационных свойств МКР, МКО и МКЭ, значительное внимание уделяется во многом общим для этих методов матричным особенностям получаемых систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), а также специальным методам их решения. Для всех основных типов одномерных краевых задач выведены формулы для собственных чисел и соответствующих собственных функций. Изучены основные свойства подобных, конгруентных, положительно определенных и монотонных матриц, а также связанных с ними характерных преобразований. Построены оценки в различных нормах для обратных матриц и чисел обусловленности. Выводятся оценки погрешности сеточных решений в евклидовой и кубической нормах для симметричных положительно определенных и монотонных систем соответственно. Рассмотрены различные экономичные алгоритмы решения ленточных СЛАУ, в том числе естественно распараллеливаемые методы циклической редукции для трехдиагональных систем уравнений. Исследуется численная устойчивость для классического метода прогонки, для которого на основе прямого анализа погрешностей округления построены оценки получаемых ошибок искомого решения, в зависимости от свойств коэффициентов уравнений.

4.2. План семинарских занятий

Курс “Методы решения ОДУ” включает проведение 8 семинарских занятий, на которых студенты делают доклады по темам программы данной дисциплины, а также решают задачи для закрепления изучаемого на лекциях материала.

Охватываемые в задачах вопросы касаются всех теоретических и алгоритмических разделов дисциплины, в том числе:

Первое занятие

Вспомогательные сведения из линейной алгебры и методов решения систем нелинейных уравнений, являющихся характерными для алгоритмов решения задач Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, данная тема включает краткое повторение и закрепление лекционного материала по теории матриц и вычислительной алгебры, на основе решения задач по соответствующей тематике: вычисление матричных норм, собственных чисел и собственных векторов для простейших примеров, вычисление матричной экспоненты, упражнения на проведение матричных преобразований подобия, конгруентности и треугольных разложений, иллюстративные применения нелинейных простых итераций, а также методов секущих, Ньютона–Канторовича и Кенига с учетом особенностей их реализации в неявных методах решения ОДУ.

Второе занятие

Некоторые свойства и представления решений систем ОДУ, вводная терминология и классификация численных методов решения задач Коши: классификация типов систем ОДУ и характерные примеры задач Коши; гамильтоновые системы (задача Кеплера); фазовые траектории, потоки и портреты систем ОДУ; примеры бифуркаций, предельных циклов, регулярных и странных аттракторов; представления решений систем ОДУ для случая постоянных коэффициентов; теорема и метод Пикара; понятие жестких систем ОДУ с характерными иллюстрациями; устойчивость решений по Ляпунову, примеры устойчивых и неустойчивых решений; иллюстрации ОДУ, удовлетворяющие одностороннему условию Липшица (его связь с классическим условием Липшица); свойства контрактивности решений ОДУ и его ключевая роль в проблемах устойчивости, особенно при рассмотрении жестких систем.

Третье занятие

Основные понятия и классификация численных методов решения задач Коши: явные и неявные вычислительные схемы, примеры простейших методов Эйлера, трапеций и средней точки, а также определения одношаговых многостадийных и многошаговых алгоритмов; понятия локальной и глобальной погрешности; абсолютная устойчивость, *D*-устойчивость и *A*-устойчивость; теорема эквивалентности Лакса и ее применение. Анализ характерных иллюстраций для различных типов неустойчивости. Обоснование симплектичности основных вычислительных схем для решения гамильтоновых систем уравнений с методическими примерами.

Четвертое-пятое занятия

Одношаговые многостадийные методы решения задачи Коши для системы ОДУ: общая вычислительная схема и алгоритмические особенности *m*-стадийных методов Рунге–Кутты (МРК); примеры явных и неявных МРК, иллюстрации технологии построения алгоритмов различных порядков с помощью тейлоровских разложений и принципов коллокаций; функции и области устойчивости с примерами для явных и неявных МРК; демонстрация особенностей диагонально-неявных алгоритмов; методы типа Розенброка (МтР) с простейшими примерами, применение МтР к решению неявных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных; примеры *abc*-схем С.С.Филиппова; примеры анализа *B*-устойчивости и контрактивности неявных

МРК; иллюстрации взаимосвязи AN-устойчивости и B-устойчивости неявных МРК (НМРК); примеры анализа B-согласованности и B-сходимости НМРК на модельной задаче Протеро–Робинсона; технологии контроля точности и устойчивости одношаговых методов по результатам Е.А.Новикова; примеры симплектических методов решения гамильтоновых систем ОДУ, демонстрация построения симплектических НМРК коллокационного типа; конструирование и анализ одношаговых методов Нюстрема для решения систем ОДУ второго порядка; примеры МРК для сингулярно-возмущенных и дифференциально-алгебраических ОДУ.

Шестое занятие

Многошаговые методы решения задачи Коши: примеры построения и анализа многошаговых явных и неявных методов Адамса, Нюстрема, Милна и формул дифференцирования назад (ФДН); анализ локальных и глобальных погрешностей многошаговых методов (ММ), константы погрешностей для основных вариантов ММ; связь устойчивости и порядковых барьеров со свойствами корней характеристичеких многочленов многошаговых методов; иллюстрация свойств $A(\alpha)$-устойчивости многошаговых алгоритмов; примеры G-устойчивых одноопорных ММ; примеры многошаговых методов Рунге–Кутты для решения систем ОДУ второго порядка; явные алгоритмы В.И.Лебедева с переменным шагом для решения жестких задач.

Седьмое-восьмое занятия

Методы решения одномерных краевых задач: классификация и основные дифференциальные свойства одномерных краевых задач; примеры конечно-разностных аппроксимаций производных, уравнений и краевых задач на равномереных и неравномерных сетках; построение компактных схем повышенной точности для уравнения Пуассона и диффузионно-конвективного уравнения: анализ примеров конструирования условно устойчивых и абсолютно устойчивых сеточных схем; методы конечных объемов на точечно-ориентированных и элементно-ориентированных сетках; основные понятия конечно-элементных алгоритмов, технологии построения локальных матриц и сборки глобальной матрицы; примеры лагранжевых и эрмитовых базисных функций различных порядков; построение иерархических базисов И.Бабушки; алгебраические свойства сеточных одномерных краевых задач, примеры их структурных и спектральных особенностей; примеры оценок обусловленности матриц и их роли в анализе устойчивости решений СЛАУ к возмущениям исходных данных; построение оценок погрешностей сеточных систем уравнений в евклидовой и равномерной метриках на простейших задачах; методы прогонок и их варианты для решения ленточных систем линейных алгебраических уравнений; иллюстрации неустойчивости и некорректности классического алгоритма трехточечных прогонок для плохих СЛАУ; анализ эффективности распараллеливания метода циклических прогонок без обратного хода при решении серии систем с трехдиагональными матрицами на многопроцессорных вычислительных системах.

Характерные типы задач приведены ниже в экзаменационных билетах.

Замечание: в целях практического закрепления учебного материала курса и освоения технологических основ применения методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений для задач математического моделирования в дальнейшем целесообразно предусмотреть организацию компьютерного практикума с использованием имеющегося в Интернете большого количества общедоступных программ с алгоритмами решения ОДУ.

5. Образовательные технологии дисциплины *«Численный анализ»*

Помимо проведения лекций и семинаров, программа курса включает обязательное семестровое домашнее задание, предполагающее решение задач по всем разделам изучаемой дисциплины, а также проведение экзамена.

5.1. Организация экзамена

Каждый из 29 билетов (список приведен ниже в подразделе 5.2) содержит два теоретических вопроса и по одной задаче. Время на подготовку – 1 час. При подготовке к ответу студентам не разрешается пользоваться материалами лекций и учебников. Важно, чтобы отвечающий разбирался в сути предложенных ему теоретических вопросов. Требуется также, чтобы экзаменуемый знал основные понятия и утверждения материала курса, а также умел их применять для решения методических задач.

5.2. Экзаменационные билеты (***Примечание:*** *вопросы в билетах год от года могут меняться (в зависимости от тенденций развития теории и приложений методов*)

БИЛЕТ 1. 1). Определения и классификация задач Коши. Автономные и линейные ОДУ, системы с переменными и постоянными коэффициентами. Редукция систем высших порядков. 2). Методы типа Розенброка. "Замораживание" матрицы Якоби и введение дополнительных коэффициентов. МтР для неавтономных и неявных систем ОДУ. 3). Показать, что для неотрицательно определенной симметричной матрицы $A=\{a_{i,j}\}$ справедливонеравенство $a_{i,j} \le \sqrt{a_{ii}a_{jj}}$.

БИЛЕТ 2. 1). Теорема и метод Пикара. 2). Примеры МтР и их свойства. 3). Доказать, что если A есть с.п.о. матрица, а B - симметричная матрица, то все собственные числа матрицы AB вещественные.

БИЛЕТ 3. 1). Представление решения линейной ОДУ. Матрица Грина. 2). B-устойчивость. Одностороннее условие Липшица и его связь с контрактивностью решений ОДУ. B-устойчивость НМРК. 3). Показать, что оценка погрешности СЛАУ $\|\delta v\|\|v\| \le \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|\delta f\| / \|f\|$ является неулучшаемой.

БИЛЕТ 4. 1). Решение ОДУ с постоянными коэффициентами. 2). Алгебраическая устойчивость НМРК. Теорема 3 Батчера. 3). Доказать, что подобные матрицы имеют одинаковые след и определитель.

БИЛЕТ 5. 1). Теорема Ляпунова о характеристических показателях. Спектр системы ОДУ. 2). Общая схема и классификация m-стадийных МРК. Таблица Батчера. 3). Вывести явную схему Адамса 3-го порядка.

БИЛЕТ 6. 1). Устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость. Теоремы о необходимых и достаточных условиях. 2). Абсолютная устойчивость, функции и области устойчивости. Понятия A-устойчивости, $A(\alpha)$-устойчивости и L-устойчивости. 3). Вывести неявную схему Адамса 3-го порядка.

БИЛЕТ 7. 1). Понятия о бифуркациях и аттракторах. 2). Локальная и глобальная погрешности. Одношаговые и многошаговые, явные и неявные методы. Устойчивость и сходимость метода. Теорема эквивалентности Лакса. 3). Построить многошаговую схему Нюстрема 3-го порядка.

БИЛЕТ 8. 1). Особенности жестких систем ОДУ и систем с осциллирующими решениями. Примеры. 2). Терминология численных решений. Характеристические многочлены. 3). Построить трехшаговую схему Милна.

БИЛЕТ 9. 1). Разложения решений ОДУ в ряд Тейлора. 2). Теорема Хайрера о B-устойчивости. Порядковые барьеры для ДНМРК. 3). Вывести явную трехшаговую формулу дифференцирования назад (ФДН).

БИЛЕТ 10. 1). Явные МРК. Условия согласования и достижимые порядки. 2). Контрактивность МРК. Теорема Дж. фон Неймана и следствие о контрактивности численного решения. 3). Вывести неявную трехшаговую формулу дифференцирования назад.

БИЛЕТ 11. 1). Области устойчивости явных МРК. 2). Явные методы Адамса. Рекуррентная формула для коэффициентов. Примеры. 3). Показать, что не существует k-шаговых методов порядка $2k+1$.

БИЛЕТ 12. 1). Примеры явных МРК. 2). Неявные методы Адамса. Рекуррентная формула для коэффициентов. Простейшие примеры. Схемы предиктор-корректор. 3). Построить трехшаговую схему Милна.

БИЛЕТ 13. 1). Теорема 1 Батчера для неявных МРК. 2). Методы Нюстрема и Милна. Выражения для коэффициентов. Простейшие примеры. 3). Вывести явную трехшаговую формулу дифференцирования назад (ФДН).

БИЛЕТ 14. 1). Теорема 2 Батчера о порядках неявных МРК. 2). Явные и неявные методы ФДН. Выражения для коэффициентов. Простейшие примеры. 3). Построить оценку локальной погрешности k-шагового метода Нюстрема.

БИЛЕТ 15. 1). Простейшие неявные схемы МРК. 2). Локальные погрешности ММ. Теорема о порядке. Локальные ошибки явных и неявных k –шаговых методов. 3). Показать, что не существует $A(0)$-устойчивых явных методов.

БИЛЕТ 16. 1). Неявные схемы МРК на основе квадратур Гаусса, Радо и Лобатто. 2). Устойчивость ММ. Характеристические уравнения и их корни для явных и неявных схем Адамса, Нюстрема, Милна и ФДН; свойства их D-устойчивости. 3). Вычислить матрицу e^{At}, если матрица A имеет следующий вид: A= $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

БИЛЕТ 17. 1). Функции и области устойчивости НМРК. 2). Наивысший достижимый порядок устойчивых ММ. Первый барьер Далквиста. Теорема о симметричности ММ. 3). Доказать, что если матрицы $A, B \in R^N$ или линейные операторы $A, B \in R^N \to R^N$ коммутируют (AB=BA), то $e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}$.

БИЛЕТ 18. 1). Необходимое и достаточное условие A-устойчивости, I-устойчивость НМРК. 2). Области абсолютной устойчивости ММ. Связь с A-устойчивостью и D -устойчивостью. 3). Доказать, что если A,B – перестановочные с.п.о. матрицы, то матрица ВА также положительно определена.

БИЛЕТ 19. 1). Диагонально неявные и однократно диагональные МРК. Условия согласования и области A-устойчивости ОДНМРК. 2). Кривые локуса корней: определение и свойства для явных и неявных методов Адамса, Нюстрема, Милна и ФДН. 3). Показать, что для нормальной матрицы A справедливо равенство $\|A\|_2 = \rho(A)$, где ρ – спектральный радиус.

БИЛЕТ 20. 1). Контрактивность для абсолютно монотонной f. Пороговый коэффициент функции устойчивости. Теорема об алгебраической устойчивости МРК. 2). Второй барьер Далквиста (ограничение порядка A-устойчивого ММ). 3). Показать, что для неотрицательно определенной симметричной матрицы A=$\{a_{i,j}\}$ справедливо неравенство $a_{i,j} \le \sqrt{a_{ii} a_{jj}}$.

БИЛЕТ 21. 1). AN-устойчивость. Теорема о соотношениях B-устойчивости, AN-устойчивости и A-устойчивости. 2). $A(\alpha)$ – устойчивые ММ. Теорема существования. 3). Выписать и исследовать условия согласования для двухстадийного ЯМРК.

БИЛЕТ 22. 1). Коэрцитивность матрицы *A* в НМРК. Условия существования и единственности схем НМРК. Теорема о возмущениях. 2). Многошаговые методы Рунге–Кутты. Теорема о наивысшем порядке *A*-устойчивого ММРК. 3). Показать, что никакой ЯМРК не может быть *A*-устойчив.

БИЛЕТ 23. 1). Модельная задача Протеро–Робинсона. Феномен понижения глобального порядка в жестких ОДУ. 2). Одноопорные многошаговые методы. Связи их решений с классическими ММ. Пример. 3). Как с использованием двух НМРК – методов средней точки и трапеций повысить точность результата и получить гарантированную оценку ошибки?

БИЛЕТ 24. 1). Теорема о локальной погрешности (*B*-согласованности) НМРК. 2). Теорема существования одноопорного ММ. 3). Определить интервал устойчивости для ЯМРК второго порядка.

БИЛЕТ 25. 1). *G*-устойчивость. Связь с *A*-устойчивостью. 2). Конечно-разностные аппроксимации производных. 3). Вывести формулу локальной ошибки для неявного метода средней точки.

БИЛЕТ 26. 1). Теорема эквивалентности *G*- и *A*-устойчивости. 2). Разностные аппроксимации дифференциальных уравнений и граничных условий. 3). Вывести формулу локальной ошибки для неявного метода трапеций.

БИЛЕТ 27. 1). Погрешность аппроксимации и ошибка решения сеточного уравнения. Теорема эквивалентности. 2). Собственные числа и векторы простейших матриц. 3). Построить функцию устойчивости для неявного метода средней точки и определить его интервал устойчивости.

БИЛЕТ 28. 1). Компактные разностные аппроксимации повышенной точности (уравнение Пуассона, диффузионно-конвективное уравнение). 2). Равномерные оценки решений и погрешностей для сеточных СЛАУ. 3). Построить функцию устойчивости для неявного метода трапеций и определить его интервал устойчивости.

БИЛЕТ 29. 1). Примеры простейших матриц для различных краевых задач. 2). Оценки погрешности сеточных решений в евклидовой метрике. 3). Построить функцию устойчивости для одностадийного МтР второго порядка и определить его интервал устойчивости.

6.Учебно-методическое обеспечение дисциплины *«Численный анализ»*

Имеющуюся многочисленную литературу (монографии и учебники) по обыкновенным дифференциальным уравнениям и методам их решения можно разбить на две основные части.

а). Основная литература.

По материалам лекций:

1. Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.–М., МЦНМО, 2002.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы.–М.: Наука, 1987.
3. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений.Т.1, а также Т. 2.–М.: Физматлит, 1962.
4. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений.–М.: Мир, 1988.
5. Ильин В.П. Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений.–Новосибирск: Изд. ИВМиМГ СО РАН, 2001.

6. Новиков Е.А. Явные методы для жестких систем.–Новосибирск: Наука, 1997.
7. Ортега Дж., Рейнболт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными.–М.: Мир, 1975.
8. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.–Изд. 4-е, М.: Гостехиздат, 1952.
9. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.–М.: Наука, 1974.
10. Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноруцкий И.Г. Численные методы решения жестких систем.–М.: Наука, 1979.
11. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи.–М., Мир, 1999.
12. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи.–М.: Мир, 1990.
13. Хайрер Э., Любих К., Ваннер Г. (Hairer E., Lubich C., Wanner G.) Geometric Numerical Integration.–Berlin: Springer, 2006.
14. Холл Дж., Уатт Дж.(ред.) Современные численные Численный анализ.–М.: Мир, 1979.
15. Хэмминг Р.В. Численные методы.–М.: Наука, 1972.
16. Шампайн Л.Ф., Гладвел И., Томпсон С. Решение обыкновенных дифферен-циальных уравнений с использованием MATLAB.–М.: Изд. ``Лань", 2009.
17. Штеттер Х. Анализ методов дискретизации для обыкновенных дифференциальных уравнений.–М.: Мир, 1978.
18. www.numericalmathematics.com/ordinary-differential-equations.html

б). Дополнительная литература.

19. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров.–М.: Высшая школа, 1994.
20. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения.–М.: Наука, 1974.
21. Артемьев С.С., Якунин М.А., Михайличенко И.Г., Шкурко И.О. Динамика и управление.–Новосибирск: Изд. ВЦ СО РАН, 1995.
22. Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф. Численное решение обыкновенных дифферен-циальных уравнений на Фортране.–М.: Изд. Московского университета, 1990.
23. Бабенко К.И. Основы численного анализа.–М.: Наука, 1986.
24. Бояринцев Ю.Е. Методы решения непрерывных и дискретных задач для сингулярных систем уравнений.–Новосибирск: Наука, 1996.
25. Бояринцев Ю.Е., Орлова И.В. Пучки матриц и алгебро-дифференциальные системы.–Новосибирск: Наука, 2006.
26. Бреннер С.К., Скотт Л.Р. (Brenner S.C., Scott L.R.) The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Texts in Applied Mathematics, v.15, New York: Springer-Verlag, 2008.
27. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей.–М.:Наука, 1967.
28. Годунов С.К., Антонов А.Г., Кирилюк О.П., Костин В.И. Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах.–Новосибирск: Наука, 1988.
29. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики.–С.-Петербург: Изд. “Лань”, 2006.
30. Дятлов В.П., Коняшкин В.В., Потапов Б.С., Фадеев С.И. Пленочная электро-механика.–Новосибирск: Наука, 1991.
31. Захаров А.Ю. Некоторые результаты сравнения эффективности методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.–М.: Препринт/ИПМ АН СССР; N 125, 1979.
32. Ильин В.П. Численный анализ. Часть 1.–Новосибирск: Изд. ИВМиМГ СО РАН, 2004.
33. Кальянова Н.А., Захаров А.Ю., Маркачев Ю.Е. ISODA – пакет программ для численного решения жестких и нежестких систем обыкновенных дифферен-циальных уравнений: Инструкция.–М.: ИПМ АН СССР, 1988.

34. Кузнецов Ю.И. Алгебраические основы РК-метода численного решения ОДУ.– Новосибирск: Изд. ИВМиМГ СО РАН, 1995.
35. Лебедев В.И. Явные разностные схемы с переменными шагами по времени для решения жестких систем уравнений.–М.: Препринт/ОВМ АН СССР; N 177, 1987.
36. Леймкюхлер Б., Райх С. (Leimkuhler B., Reich S.) Simulating Hamiltonian Dynamics.– Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
37. Сабо Б.В., Бабушка И. (Szabo B.V., Babuska I.) Finite Element Analysis.–New York: John Wiley Sons, Inc., 1991.
38. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы.–М.: Наука, 1989.
39. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения.–М.: Наука, 1985.
40. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качествен-ная теория с приложениями.–М.: Мир, 1986.

Примечание. В вышеприведенном списке литературы даны наименования только опубликованных книг. Они имеют главным образом монографический характер и плохо адаптированы для использования их в учебном процессе. С другой стороны, в русскоязычных изданиях имеется большое количество учебников по методам вычислений в целом, содержащих изложение методов решения ОДУ в сильно урезанном объеме, крайне недостаточном для университетского курса по численному анализу. Необходимо отметить, что в последние десятилетия теория и практика численных методов решения ОДУ активно развиваются, но публикации (монографии, статьи, диссертации) в основном являются доступными только на английском языке в Интернете. Но некоторые из статей российских авторов, имеющих заметное методологическое значение и результаты которых не отражены в опубликованных книгах, приведены ссылки в материалах соответствующих разделов лекций, по ходу изложения.

7.Материально-техническое обеспечение дисциплины *«Численный анализ»*

Студентам предоставляется электронная версия курса лекций в форме презентации, а также файл в формате “pdf” с содержанием подготовленного к печати учебника В.П.Ильина “Численный анализ”, объемом 17 учетно-издательских листов, включающего более 100 задач для семинарских занятий и самостоятельной работы студентов, развернутый обзор литературы (всего 73 наименования) со списком книг, частично имеющихся в библиотеках НГУ и ГПНТБ, а также предметный указатель, содержащий более 350 терминов.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО с учетом рекомендаций и ПрООП ВПО по направлению «**Ошибка! Источник ссылки не найден.**».

Автор: ____**Ильин Валерий Павлович**,
д. физ.-мат. наук, профессор.

Рецензент (ы) ____________________________проф. СФУ Е.А.Новиков (Красноярск)___
____

Программа одобрена на заседании ____
(Наименование уполномоченного органа вуза (УМК, НМС, Ученый совет)
от ___________ года, протокол № ________