МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет» (Новосибирский государственный университет, НГУ)
Механико-математический факультет

Кафедра теории вероятностей и математической статистики

Математическая статистика

(программа учебного курса)

Направление подготовки
010100 Математика,
010200 Математика и компьютерные науки

Квалификация (степень) выпускника
Бакалавр

Форма обучения
Очная

Новосибирск 2014

Программа авторского учебного курса «Математическая статистика» разработана в соответствии с ФГОС ВПО для студентов, обучающихся по ООП бакалавра по направлениям 010100 «Математика» и 010200 «Математика и компьютерные науки». Курс является новым. Курс предназначен для подготовки специалистов, обладающих глубокими знаниями математической статистики и навыками использования этих знаний в дальнейшей исследовательской работе. Содержание курса охватывает основные разделы математической статистики, а именно: теоремы Гливенко—Кантелли, теория точечного и интервального оценивания параметров, проверка статистических гипотез. Программа составлена на кафедре теории вероятностей и математической статистики механико-математического факультета НГУ в соответствии с требованиями к обязательному минимуму содержания и уровню подготовки дипломированного бакалавра по направлениям 010100 «Математика» и 010200 «Математика и компьютерные науки» по дисциплинам профессионального цикла, а также задачами, стоящими перед Новосибирским государственным университетом по реализации Программы развития НИУ-НГУ.

Автор
профессор, доктор физ.-мат. наук И. С. Борисов

Программа учебного курса подготовлена в рамках реализации
Программы развития НИУ-НГУ на 2009–2018 гг.

Аннотация рабочей программы

Программа авторского учебного курса «Математическая статистика» разработана в соответствии с ФГОС ВПО для студентов, обучающихся по ООП бакалавра по направлениям 010100 «Математика» и 010200 «Математика и компьютерные науки». Дисциплина реализуется на Механико-математическом факультете Национального исследовательского университета Новосибирский государственный университет кафедрой теории вероятностей и математической статистики ММФ НИУ НГУ.

Курс предназначен для подготовки специалистов, обладающих глубокими знаниями математической статистики и навыками использования этих знаний в дальнейшей исследовательской работе. Содержание курса охватывает основные разделы математической статистики, а именно: теоремы Гливенко—Кантелли, теория точечного и интервального оценивания параметров, проверка статистических гипотез.

Дисциплина нацелена на формирование общекультурных компетенций ОК-6, ОК-8, ОК-11, ОК-12, ОК-14, ОК-15 профессиональных компетенций ПК-1, ПК-2, ПК-3, ПК-4, ПК-5, ПК-6, ПК-7, ПК-8, ПК-9, ПК-10, ПК-22, ПК-27 выпускника по направлению подготовки 010100 «Математика», соответственно компетенций ОК-5, ОК-6, ОК-8, ОК-10, ПК-2, ПК-5, ПК-6, ПК-8, ПК-10, ПК-12, ПК-16 — по направлению 010200 «Математика и компьютерные науки».

Преподавание дисциплины предусматривает следующие формы организации учебного процесса: лекции, практические занятия, контрольные работы, расчетные задания, коллоквиум, самостоятельная работа студента.

Программой дисциплины предусмотрены следующие виды контроля: текущий контроль успеваемости в форме двух контрольных работ, двух расчетных заданий и коллоквиума, итоговый контроль в форме экзамена.

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4,5 зачетных единиц, 162 академических часов. Программой дисциплины предусмотрены 32 часов лекционных и 32 часов практических занятий, а также 52 часов самостоятельной работы студентов. Остальное время – контроль в форме контрольных работ, расчетных заданий, коллоквиума и экзамена.

1. Цели освоения дисциплины

Основной целью курса является выработка у студентов правильного взгляда на статистические закономерности и навыков использования статистических правил и процедур в практических задачах.

Для достижения поставленной цели выделяются следующие задачи курса: познакомить слушателей с основными понятиями и методами математической и прикладной статистики, дать представление о современном состоянии и развитии этой науки, сформировать у студентов навыки работы с понятийным аппаратом математической статистики.

2. Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата

Дисциплина «Математическая статистика» является частью профессионального цикла ООП подготовки бакалавра ФГОС ВПО по направлению подготовки 010100 «Математика» и направлению 010200 «Математика и компьютерные науки».

Дисциплина опирается на следующие дисциплины данной ООП:

- Математический анализ (теория пределов, ряды, дифференцирование, интегралы Римана, Лебега, Стилтьеса);
- Высшая алгебра (алгебраические системы, матрицы и детерминанты);
- Аналитическая геометрия (кривые и поверхности второго порядка, параметризация);
- Математическая логика (исчисление высказываний, теория множеств);

- Теория функций комплексного переменного (интегрирование и дифференцирование, степенные ряды);
- Функциональный анализ (линейные (векторные) нормированные пространства, гильбертовы пространства, проекторы).
- Теория вероятностей (классическая вероятность, условная вероятность, схема Бернулли, случайные величины и их распределения, числовые характеристики распределений, виды сходимости последовательностей случайных наблюдений, условные математические ожидания и условные распределения, вероятностные и моментные неравенства, законы больших чисел, центральная предельная теорема и другие предельные теоремы теории вероятностей).

Результаты освоения дисциплины «Математическая статистика» используются в следующих дисциплинах данной ООП:

- Случайные процессы;
- Дополнительные главы теории вероятностей;
- Теория мартингалов;
- Статистика случайных процессов.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины «Математическая статистика»:

общекультурные компетенции, направление 010100 «Математика»:

- ОК-6 — способность применять знания на практике,
- ОК-8 — способность приобретать новые знания, используя современные образовательные и информационные технологии,
- ОК-11 — фундаментальная подготовка по основам профессиональных знаний и готовность к использованию их в профессиональной деятельности,
- ОК-12 — навыки работы с компьютером;
- ОК-14 — способность к анализу и синтезу;
- ОК-15 — способность к письменной и устной коммуникации на русском языке;

профессиональные компетенции:

- ПК-1 — определение общих форм, закономерностей и инструментальных средств отдельной предметной области,
- ПК-2 — умение понять поставленную задачу,
- ПК-3 — умение сформулировать результат,
- ПК-4 — умение строго доказать утверждение,
- ПК-5 — умение на основе анализа увидеть и корректно сформулировать результат,
- ПК-6 — умение самостоятельно увидеть следствия сформулированного результата,
- ПК-7 — умение грамотно пользоваться языком предметной области,
- ПК-8 — умение ориентироваться в постановках задач,
- ПК-9 — знание корректных постановок классических задач,
- ПК-10 — понимание корректности постановок задач,
- ПК-22 — владение проблемно-задачной формой представления математических знаний,
- ПК-27 — умение точно представить математические знания в устной форме.

Общекультурные компетенции ОК-5, ОК-6, ОК-8, ОК-10, **профессиональные компетенции** ПК-2, ПК-5, ПК-6, ПК-8, ПК-10, ПК-12, ПК-16 — по направлению 010200 «Математика и компьютерные науки».

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

- иметь представление о месте и роли изучаемой дисциплины среди других наук;
- знать основные положения теоретических разделов курса, их прикладное значение;
- уметь применять полученные знания для решения математических задач;
- владеть навыками применения основных методов статистического анализа.

4. Структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4,5 зачетные единицы, 162 часа.

№ п/п	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)							Формы текущего контроля успеваемости *(по неделям семестра)* Форма промежуточной аттестации *(по семестрам)*
				Лекция	**Практическое занятие**	**Контр. работа**	**Самост. работа**	**Расчетное задане**	**Коллоквиум**		
1.1	Основные статистические задачи. Выборка. Выборочное (эмпирическое) распределение и выборочные характеристики: среднее, дисперсия, моменты. Вариационный ряд и эмпирическая функция распределения. Группировка наблюдений, гистограммы. Вполне ограниченные классы множеств. Теоремы Гливенко – Кантелли. Сходимость выборочных характеристик к истинным.	6	1	2	2		4				
1.2	Параметрические классы распределений. Понятие оценки неизвестных параметров. Состоятельные и сильно состоятельные оценки. Несмещенные оценки.	6	2	2	2		4				
1.3	Метод моментов. Примеры ОММ. Состоятельность ОММ. Метод максимального правдоподобия. Функции правдоподобия. Примеры ОМП. Примеры несуществования ОМП.	6	3	2	2		4				
1.4	Расстояние Кульбака—Лейблера и его экстремальные свойства. Сильная состоятельность ОМП. Примеры.	6	4	2	2		4				
1.5	Сравнение оценок. Байесовский подход. Среднеквадратический подход. Примеры.	6	5	2	2		4				
1.6	Достаточные статистики. Факторизационная теорема Неймана—Фишера. Примеры.	6	6	2	2		2	2			
1.7	Полные достаточные статистики. Примеры.	6	7	2	2	2	2				**контрольная, см. п. 6**
1.8	Эффективные оценки. Теорема существования и единственности. Примеры.	6	8	2	2		4				
1.9	Неравенство Рао—Крамера. R-эффективные оценки. Критерий R-эффективности. Примеры. Связь эффективных и R-эффективных оценок.	6	9	2	2		4				
1.10	Интервальное оценивание, Построение точных доверительных интервалов для нормальных совокупностей. Построение асимптотических доверительных интервалов с помощью асимптотически нормальных оценок	6	10	2	2		4				
2.1	Проверка статистических гипотез. Простые и сложные гипотезы. Статистические критерии для	6	11	2	2		4				

	проверки конечного числа простых гипотез. Вероятности ошибок критерия. Мощность критерия. Состоятельные критерии. Байесовский критерий.										
3.1	Наиболее мощные критерии. Лемма Неймана – Пирсона.	6	12	2	2		4				
3.2	Проверка простых гипотез против сложных альтернатив. Существование равномерно наиболее мощных критериев для проверки односторонних альтернатив. Принцип минимального расстояния. Критерии согласия Колмогорова, «Омега квадрат», «Хи-квадрат».	6	13	2	2		4				
3.3	Асимптотические критерии. Критерии «Хи-квадрат», Колмогорова, «Омега квадрат». Предельная теорема Колмогорова.	6	14	2	2		2	2			
4.1	Проверка сложных гипотез против сложных альтернатив. Теоремы Пирсона для критерия «Хи-квадрат».	6	15	2	2	2	2				**контрольная, см. п. 6**
4.2	Двувыборочные критерии. Критерии Колмогорова—Смирнова, Стьюдента, Фишера. Задача о сопряженных признаках.	6	16	2	2				2		**коллоквиум, см. п. 6**
		6								36	**Экзамен**
				32	**32**	**4**	**52**	**4**	**2**	**36**	

5. Образовательные технологии

Традиционная лекционно-семинарская система обучения.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

Расчетное задание №1 по математической статистике.

По числовой выборке объема 50 из нормальной совокупности построить доверительные интервалы заданного уровня доверия для среднего при известной и неизвестной дисперсии, для дисперсии при известном и при неизвестном среднем.

Расчетное задание №2 по математической статистике.

По данным числовым наблюдениям проверить основную гипотезу о равномерности распределения с помощью а) критерия Колмогорова, б) критерия «Хи»-квадрат заданного асимптотического размера.

По данным двум выборкам из нормальных совокупностей проверить с помощью критериев заданного размера гипотезу а) о совпадении дисперсий при неизвестных средних, б) о совпадении средних, если известно, что неизвестные дисперсии совпадают.

Образцы вопросов для подготовки к экзамену

1. Вполне ограниченные классы множеств. Теоремы Гливенко – Кантелли. Сходимость выборочных характеристик к истинным.
2. Принцип минимального расстояния. Критерии согласия. Непараметрические критерии. Критерии Колмогорова и «омега квадрат».
3. Неравенство Рао – Крамера. R-эффективные оценки и их связь с ОМП.
4. Достаточные статистики. Факторизационная теорема Неймана – Фишера.
5. Состоятельность оценок по методу моментов.
6. Состоятельность оценок максимального правдоподобия.
7. Построение эффективных оценок.
8. Байесовский подход к построению оптимальных оценок.
9. Построение асимптотических доверительных интервалов с помощью асимптотически нормальных оценок.
10. Критерий «Хи»-квадрат для проверки простых и сложных гипотез. Теоремы Пирсона.

Примерные варианты контрольных работ

Контрольная работа 1, вариант 1

1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объёма n из распределения с плотностью $f(y) = 3\theta^3 y^{-4}$ на интервале $[\theta,\, +\infty)$, где $\theta > 0$.

а) Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $F_n^*(3\theta) - F_n^*(2\theta)$.

б) Найти при $n = 5$ распределение этой случайной величины.

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения Пуассона с параметром λ.

а) Вычислить математическое ожидание случайной величины $5(\overline{X})^2 + S^2$.

б) Выяснить, как эта случайная величина себя ведёт при $n \to \infty$.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из распределения $\mathcal{F}$ и гипотезы $H_1 = \{\mathcal{F} = \mathrm{U}_{0,2}\}$ и $H_2 = \{\mathcal{F} = \mathrm{U}_{1,3}\}$. Критерий δ предписывает принимать гипотезу H_2, если $X_{(1)} \geqslant 3/2$. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия. Является ли критерий состоятельным?

4. Дана выборка объёма $n = 9$ из нормального распределения $\mathrm{N}_{a,16}$. Построить наиболее мощный критерий размера $\varepsilon = \Phi_{0,1}(-2)$ для различения гипотез $H_1 = \{a = 1\}$ и $H_2 = \{a = -1\}$. Какую гипотезу выбрал критерий при $\overline{X} = -1$?

5. Для проверки симметричности монеты её подбросили n раз. Гипотеза симметричности принимается, если число выпадений герба заключено в границах $\frac{n}{2} \pm \Delta$. Найти, каким должно быть Δ, чтобы данный критерий имел асимптотический размер $\varepsilon = 2\Phi_{0,1}(-3)$. Проверить симметричность монеты, если после 10 000 бросков герб выпал 5 400 раз.

6. Доказать теорему Гливенко — Кантелли для выборки из распределения Бернулли $B_{0{,}25}$.

Контрольная работа 1, вариант 2

1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения Пуассона с параметром λ. Пусть ν_n — число элементов выборки, попавших в отрезок $[1,\, 3]$.

а) Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\frac{\nu_n}{n}$.

б) Найти при $n = 5$ распределение этой случайной величины.

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объёма n из распределения с плотностью $f(y) = 3y^{-4}$ на интервале $[1,\, +\infty)$.

а) Вычислить математическое ожидание случайной величины $3(\overline{X})^2 - S^2$.

б) Выяснить, как эта случайная величина себя ведёт при $n \to \infty$.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ и две простые гипотезы: $H_1 = \big\{$ X_i имеют показательное распределение с параметром 1 $\big\}$, $H_2 = \big\{$ X_i имеют распределение с плотностью $f(y)$ из задачи **2** $\big\}$.

Критерий $\delta(X_1, \ldots, X_n)$ предписывает принимать гипотезу H_2, если $2 \leqslant X_{(n)} \leqslant 3$. В противном случае принимается H_1. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия.

4. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из показательного распределения с параметром α. Построить наиболее мощный критерий асимптотического размера ε для различения двух простых гипотез $H_1 = \{\alpha = 2\}$ и $H_2 = \{\alpha = 1\}$ Какую гипотезу выбрал критерий при $\overline{X} = 1$, $n = 400$, $\varepsilon = \Phi_{0,1}(-2)$?

5. Основная гипотеза о правильности игральной кости принимается, если после n подбрасываний кости число выпавших шестерок отличается от $\frac{n}{6}$ не более, чем на $\frac{\sqrt{5n}}{2}$. Иначе принимается альтернатива: кость неправильная, и вероятность выпадения шестерки не равна $\frac{1}{6}$. Найти пределы размера и мощности этого критерия при $n \to \infty$.

6. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения Пуассона с параметром $\lambda = 1$. Проверить независимость статистик $X_1 + X_2$ и $X_{(1)}$.

Контрольная работа 1, вариант 3

1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объёма n из распределения с плотностью $f(y) = 4y^3\theta^{-4}$ на интервале $[0, \theta]$, где $\theta > 0$.

а) Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $F_n^*(\theta/2) - F_n^*(\theta/3)$.

б) Найти при $n = 6$ распределение этой случайной величины.

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из биномиального распределения с параметрами 2 и p.

а) Вычислить математическое ожидание случайной величины $5\overline{X^2} + 3(\overline{X})^2$.

б) Выяснить, как эта случайная величина себя ведёт при $n \to \infty$.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из распределения $\mathcal{F}$ и гипотезы $H_1 = \{\mathcal{F} = \mathrm{U}_{1,3}\}$ и $H_2 = \{\mathcal{F} = \mathrm{U}_{0,2}\}$. Критерий δ предписывает принимать гипотезу H_2, если $X_{(1)} \leqslant 3/2$. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия. Является ли критерий состоятельным?

4. Дана выборка объёма $n = 16$ из нормального распределения $\mathrm{N}_{a,9}$. Построить наиболее мощный критерий размера $\varepsilon = \Phi_{0,1}(-3)$ для различения гипотез $H_1 = \{a = 2\}$ и $H_2 = \{a = 0\}$. Какую гипотезу выбрал критерий при $\overline{X} = 0$?

5. Для проверки симметричности игральной кости её подбросили n раз. Гипотеза симметричности принимается, если количество выпадений единички заключено в границах $\frac{n}{6} \pm \Delta$. Найти, каким должно быть Δ, чтобы данный критерий имел асимптотический размер $\varepsilon = 2\Phi_{0,1}(-2)$. Проверить симметричность кости, если после 3 600 бросков единица выпала 540 раз.

6. Дана выборка из показательного распределения с параметром 1. Выяснить, куда слабо сходится последовательность $\sqrt{n}\ |F_n^*(3) - F(3)|$ при $n \to \infty$.

Контрольная работа 1, вариант 4

1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из биномиального распределения с параметрами 3 и p. Пусть ν_n — число элементов выборки, попавших в отрезок $[1, 2]$.

а) Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\frac{\nu_n}{n}$.

б) Найти при $n = 4$ распределение этой случайной величины.

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объёма n из распределения с плотностью $f(y) = y^3/4$ на интервале $[0, 2]$.

а) Вычислить математическое ожидание случайной величины $5\overline{X^2} + (\overline{X})^2$.

б) Выяснить, как эта случайная величина себя ведёт при $n \to \infty$.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ и две простые гипотезы: $H_1 = \{$ X_i имеют распределение с плотностью $f(y) = y^3/4$ на интервале $[0, 2]$ $\}$, $H_2 = \{$ X_i имеют равномерное распределение на отрезке $[0,\ 2]$ $\}$. Критерий $\delta(X_1, \ldots, X_n)$ предписывает принимать гипотезу H_1, если $1/2 \leqslant X_{(1)} \leqslant 3/2$. В противном случае принимается H_2. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия.

4. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из показательного распределения с параметром β. Построить наиболее мощный критерий асимптотического размера ε для различения двух простых гипотез $H_1 = \{\beta = 6\}$ и $H_2 = \{\beta = 3\}$. Какую гипотезу выбрал критерий при $\overline{X} = 4$, $n = 900$, $\varepsilon = \Phi_{0,1}(-3)$?

5. Проверяется основная гипотеза о том, что бутерброд падает маслом вниз с вероятностью $\frac{3}{4}$. Основная гипотеза отвергается, если после n экспериментов число упавших маслом вниз бутербродов отличается от $\frac{3n}{4}$ более, чем на $\frac{3\sqrt{3n}}{4}$. Найти пределы размера и мощности этого критерия при $n \to \infty$.

6. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из показательного распределения с параметром $\alpha = 1$. Проверить независимость статистик $X_{(1)}$ и $X_{(2)}$.

Контрольная работа 1, вариант 5

1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объёма n из распределения с плотностью $f(y) = 5\theta^5 y^{-6}$ на интервале $[\theta, +\infty)$, где $\theta > 0$.

а) Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $F_n^*(4\theta) - F_n^*(3\theta)$.

б) Найти при $n = 4$ распределение этой случайной величины.

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из показательного распределения с параметром α.

а) Вычислить математическое ожидание случайной величины $2(\overline{X})^2 - 5S^2$.

б) Выяснить, как эта случайная величина себя ведёт при $n \to \infty$.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из распределения $\mathcal{F}$ и гипотезы $H_1 = \{\mathcal{F} = \mathrm{U}_{1,3}\}$ и $H_2 = \{\mathcal{F} = \mathrm{U}_{2,5}\}$. Критерий δ предписывает принимать гипотезу H_2, если $X_{(1)} \geqslant 2$. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия. Является ли критерий состоятельным?

4. Дана выборка объёма $n = 9$ из нормального распределения $\mathrm{N}_{a,4}$. Построить наиболее мощный критерий размера $\varepsilon = \Phi_{0,1}(-2{,}5)$ для различения гипотез $H_1 = \{a = 2\}$ и $H_2 = \{a = 1\}$. Какую гипотезу выбрал критерий при $\overline{X} = 1$?

5. Для проверки гипотезы о симметричности тетраэдра его подбросили n раз. Гипотеза симметричности принимается, если число выпадений помеченной грани заключено в границах $\frac{n}{4} \pm \Delta$. Найти, каким должно быть Δ, чтобы данный критерий имел асимптотический размер $\varepsilon = 2\Phi_{0,1}(-2)$. Проверить симметричность тетраэдра, если после 1 600 бросков помеченная грань выпала 430 раз.

6. Доказать асимптотическую нормальность несмещённой выборочной дисперсии, построенной по выборке из распределения Пуассона.

Контрольная работа 1, вариант 6

1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения Пуассона с параметром λ. Пусть ν_n — число элементов выборки, попавших в отрезок $[2, 3]$.

а) Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\frac{\nu_n}{n}$.

б) Найти при $n = 4$ распределение этой случайной величины.

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка объёма n из распределения с плотностью $f(y) = 5y^{-6}$ на интервале $[1, +\infty)$.

а) Вычислить математическое ожидание случайной величины $(\overline{X})^2 - 3S^2$.

б) Выяснить, как эта случайная величина себя ведёт при $n \to \infty$.

3. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из распределения $\mathcal{F}$ и гипотезы $H_1 = \{\mathcal{F} = \mathrm{U}_{1,4}\}$ и $H_2 = \{\mathcal{F}$ имеет распределение с плотностью $f(y)$ из задачи **2**$\}$. Критерий δ предписывает принимать гипотезу H_1, если $2 < X_{(1)} < 3$. Найти вероятности ошибок первого и второго рода этого критерия. Является ли критерий состоятельным?

4. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из показательного распределения с параметром γ. Построить наиболее мощный критерий асимптотического размера ε для различения двух простых гипотез $H_1 = \{\gamma = 4\}$ и $H_2 = \{\gamma = 2\}$. Какую гипотезу выбрал критерий при $\overline{X} = 1$, $n = 1600$, $\varepsilon = \Phi_{0,1}(-2,5)$?

5. Проверяется основная гипотеза о том, что вероятность выпуска бракованной лампочки равна $\frac{1}{3}$. Эта гипотеза принимается, если в партии из n лампочек число бракованных лампочек отличается от $\frac{n}{3}$ не более, чем на $\sqrt{2n}$. Найти пределы размера и мощности этого критерия при $n \to \infty$.

6. Сформулировать утверждение об асимптотической нормальности выборочной медианы, построенной по выборке из показательного распределения с параметром α и выписать коэффициент асимптотической нормальности (дисперсию предельного распределения).

Контрольная работа 2, вариант 1

1. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из следующего распределения:

$$\mathsf{P}(X_1 = 0) = \theta, \quad \mathsf{P}(X_1 = 1) = 1 - 3\theta, \quad \mathsf{P}(X_1 = 2) = 2\theta, \quad \text{где } 0 < \theta < \frac{1}{3}.$$

а) Найти ОММ θ_1^* для параметра θ по первому моменту, проверить её несмещённость и состоятельность.

б) Найти ОММ θ_2^* для параметра θ по функции $g(y) = \mathrm{I}(y = 1)$, проверить её несмещённость и состоятельность.

в) Сравнить θ_1^* и θ_2^* в среднеквадратичном смысле.

г) Проверить асимптотическую нормальность θ_1^* и θ_2^*, найти коэффициенты асимпт. нормальности.

д) Найти ОМП для параметра θ.

2. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют показательное распределение с параметром $\alpha > 0$.

а) Для какого параметра $\theta = \theta(\alpha)$ оценка $\theta^* = -\ln \overline{X}$ будет АНО? Найти коэффициент.

б) Проверить несмещённость оценки θ^* для параметра θ.

3. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют равномерное распределение на отрезке $[2, \theta + 2]$, $\theta > 0$.

а) Найти оценку максимального правдоподобия для параметра θ.

б) Проверить асимптотическую нормальность полученной оценки.

в) Проверить состоятельность полученной оценки.

4. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют распределение с плотностью $f_\theta(y) = 3\theta y^2 e^{-\theta y^3} \cdot \mathrm{I}(y > 0)$, где $\theta > 0$. Проверить, является ли оценка максимального правдоподобия асимптотически несмещённой оценкой для параметра θ.

Контрольная работа 2, вариант 2

1. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из следующего распределения:

$$\mathsf{P}(X_1 = 2) = \mathsf{P}(X_1 = 3) = \theta, \quad \mathsf{P}(X_1 = 1) = 1 - 2\theta, \quad \text{где } 0 < \theta < \frac{1}{2}.$$

а) Найти ОММ θ_1^* для параметра θ по первому моменту, проверить её несмещённость и состоятельность.
б) Найти ОММ θ_2^* для параметра θ по функции $g(y) = \mathrm{I}(y = 1)$, проверить её несмещённость и состоятельность.
в) Сравнить θ_1^* и θ_2^* в среднеквадратичном смысле.
г) Проверить асимптотическую нормальность θ_1^* и θ_2^*, найти коэффициенты асимпт. нормальности.
д) Найти ОМП для параметра θ.

2. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют биномиальное распределение с параметрами m и p.

а) Для какого параметра $\theta = \theta(m, p)$ оценка $\theta^* = e^{\overline{X}}$ будет АНО? Найти коэффициент.
б) Проверить несмещённость оценки θ^* для параметра θ.

3. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют равномерное распределение на отрезке $[3,\, \theta + 3]$, $\theta > 0$.

а) Найти оценку максимального правдоподобия для параметра θ.
б) Проверить асимптотическую нормальность полученной оценки.
в) Проверить состоятельность полученной оценки.

4. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют распределение с плотностью $f_\theta(y) = \theta y^{\theta - 1} \cdot \mathrm{I}(y \in (0, 1))$, где $\theta > 1$. Проверить, является ли оценка максимального правдоподобия асимптотически несмещённой оценкой для параметра θ.

Контрольная работа 2, вариант 3

1. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из следующего распределения:

$$\mathsf{P}(X_1 = -1) = \theta, \quad \mathsf{P}(X_1 = 1) = 1 - 3\theta, \quad \mathsf{P}(X_1 = 0) = 2\theta, \quad \text{где } 0 < \theta < \frac{1}{3}.$$

а) Найти ОММ θ_1^* для параметра θ по первому моменту, проверить её несмещённость и состоятельность.
б) Найти ОММ θ_2^* для параметра θ по функции $g(y) = \mathrm{I}(y = 1)$, проверить её несмещённость и состоятельность.
в) Сравнить θ_1^* и θ_2^* в среднеквадратичном смысле.
г) Проверить асимптотическую нормальность θ_1^* и θ_2^*, найти коэффициенты асимпт. нормальности.
д) Найти ОМП для параметра θ.

2. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют равномерное распределение на отрезке $[\tau/2,\ \tau]$, $\tau > 0$.

а) Для какого параметра $\theta = \theta(\tau)$ оценка $\theta^* = \ln(4\overline{X}/3)$ будет АНО? Найти коэффициент.

б) Проверить несмещённость оценки θ^* для параметра θ.

3. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют равномерное распределение на отрезке $[4, \theta + 4]$, $\theta > 0$.

а) Найти оценку максимального правдоподобия для параметра θ.
б) Проверить асимптотическую нормальность полученной оценки.
в) Проверить состоятельность полученной оценки.

4. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют распределение с плотностью $f_\theta(y) = 4\theta y^3 e^{-\theta y^4} \cdot \mathrm{I}(y > 0)$, где $\theta > 0$. Проверить, является ли оценка максимального правдоподобия асимптотически несмещённой оценкой для параметра θ.

Контрольная работа 2, вариант 4

1. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из следующего распределения:

$$\mathsf{P}(X_1 = 0) = \mathsf{P}(X_1 = 3) = \theta, \quad \mathsf{P}(X_1 = 2) = 1 - 2\theta, \quad \text{где } 0 < \theta < \frac{1}{2}.$$

а) Найти ОММ θ_1^* для параметра θ по первому моменту, проверить её несмещённость и состоятельность.
б) Найти ОММ θ_2^* для параметра θ по функции $g(y) = \mathrm{I}(y = 2)$, проверить её несмещённость и состоятельность.
в) Сравнить θ_1^* и θ_2^* в среднеквадратичном смысле.
г) Проверить асимптотическую нормальность θ_1^* и θ_2^*, найти коэффициенты асимпт. нормальности.
д) Найти ОМП для параметра θ.

2. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют нормальное распределение с параметрами $a = 0$ и σ^2.

а) Для какого параметра $\theta = \theta(\sigma^2)$ оценка $\theta^* = e^{\overline{X^2}}$ будет АНО? Найти коэффициент.
б) Проверить несмещённость оценки θ^* для параметра θ.

3. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют равномерное распределение на отрезке $[5, \theta + 5]$, $\theta > 0$.

а) Найти оценку максимального правдоподобия для параметра θ.
б) Проверить асимптотическую нормальность полученной оценки.
в) Проверить состоятельность полученной оценки.

4. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют распределение с плотностью $f_\theta(y) = \theta y^{\theta-1} \cdot \mathrm{I}(y \in (0, 1))$, где $\theta > 1$. Проверить, является ли оценка максимального правдоподобия асимптотически несмещённой оценкой для параметра θ.

Контрольная работа 2, вариант 5

1. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из следующего распределения:

$$\mathsf{P}(X_1 = 0) = \theta, \quad \mathsf{P}(X_1 = -1) = 1 - 3\theta, \quad \mathsf{P}(X_1 = 2) = 2\theta, \quad \text{где } 0 < \theta < \frac{1}{3}.$$

а) Найти ОММ θ_1^* для параметра θ по первому моменту, проверить её несмещённость и состоятельность.

б) Найти ОММ θ_2^* для параметра θ по функции $g(y) = \mathrm{I}(y = -1)$, проверить её несмещённость и состоятельность.

в) Сравнить θ_1^* и θ_2^* в среднеквадратичном смысле.

г) Проверить асимптотическую нормальность θ_1^* и θ_2^*, найти коэффициенты асимпт. нормальности.

д) Найти ОМП для параметра θ.

2. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют равномерное распределение на отрезке $[\tau,\ 2\tau]$, $\tau > 0$.

а) Для какого параметра $\theta = \theta(\tau)$ оценка $\theta^* = \ln(2\overline{X}/3)$ будет АНО? Найти коэффициент.

б) Проверить несмещённость оценки θ^* для параметра θ.

3. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют равномерное распределение на отрезке $[6,\ \theta + 6]$, $\theta > 0$.

а) Найти оценку максимального правдоподобия для параметра θ.

б) Проверить асимптотическую нормальность полученной оценки.

в) Проверить состоятельность полученной оценки.

4. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют распределение с плотностью $f_\theta(y) = 5\theta y^4 e^{-\theta y^5} \cdot \mathrm{I}(y > 0)$, где $\theta > 0$. Проверить, является ли оценка максимального правдоподобия асимптотически несмещённой оценкой для параметра θ.

Контрольная работа 2, вариант 6

1. Элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют распределение $\mathsf{P}(X_1 = -2) = \theta$, $\mathsf{P}(X_1 = 0) = 1 - 2\theta$, $\mathsf{P}(X_1 = 1) = \theta$, где $\theta \in [0,\ 1/2]$.

а) Найти ОММ θ_1^* для параметра θ по третьему моменту, проверить её несмещённость и состоятельность.

б) Найти ОММ θ_2^* для параметра θ по функции $g(y) = \mathrm{I}(y \neq 0)$, проверить её несмещённость и состоятельность.

в) Сравнить θ_1^* и θ_2^* в среднеквадратичном смысле.

г) Проверить асимптотическую нормальность θ_1^* и θ_2^*, найти коэффициенты асимпт. нормальности.

д) Найти ОМП для параметра θ.

2. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют равномерное распределение на отрезке $[-\theta,\ 2\theta]$, $\theta > 0$.

а) Найти оценку максимального правдоподобия для параметра θ.

б) Проверить асимптотическую нормальность полученной оценки.

в) Найти ОММ для параметра θ по первому моменту.

3. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют нормальное распределение $\mathrm{N}_{a,1}$, где $a \neq 0$.

а) Для какого параметра $\theta = \theta(a)$ оценка $\theta^* = e^{-(\overline{X})^2}$ будет АНО? Найти коэффициент.

б) Доказать, что оценка θ^* является асимптотически несмещённой оценкой для параметра θ.

4. Элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$. Проверить, является ли оценка $\theta^* = \overline{X} e^{-\overline{X}}$ асимптотически несмещённой оценкой для параметра $\theta = \mathsf{P}(X_1 = 1)$.

Контрольная работа 2, вариант 7

1. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из следующего распределения:

$$\mathsf{P}(X_1 = 0) = \theta, \quad \mathsf{P}(X_1 = -1) = 1 - 3\theta, \quad \mathsf{P}(X_1 = 1) = 2\theta, \quad \text{где } 0 < \theta < \frac{1}{3}.$$

а) Найти ОММ θ_1^* для параметра θ по 4-му моменту, проверить её несмещённость и состоятельность.

б) Найти ОММ θ_2^* для параметра θ по функции $g(y) = \mathrm{I}(y \neq -1)$, проверить её несмещённость и состоятельность.

в) Сравнить θ_1^* и θ_2^* в среднеквадратичном смысле.

г) Проверить асимптотическую нормальность θ_1^* и θ_2^*, найти коэффициенты асимпт. нормальности.

д) Найти ОМП для параметра θ.

2. Элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют равномерное распределение на отрезке $[-\theta, 3\theta]$, где $\theta > 0$.

а) Найти оценку максимального правдоподобия для параметра θ.

б) Проверить асимптотическую нормальность полученной оценки.

3. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют показательное распределение с параметром $\alpha > 0$.

а) Для какого параметра $\theta = \theta(\alpha)$ оценка $\theta^* = e^{-\overline{X}}$ будет АНО? Найти коэффициент.

б) Проверить несмещённость оценки θ^* для параметра θ.

в) Сравнить в асимптотическом смысле две оценки $\mu_1^* = \overline{X} \cdot \ln 2$ и $\mu_2^* = X_{([n/2])}$ для медианы μ этого распределения.

4. Элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют показательное распределение с параметром $\alpha > 0$. Проверить, является ли оценка $\theta^* = \dfrac{1}{\overline{X}}\, e^{-\overline{X}}$ асимптотически несмещённой оценкой для параметра $\theta = \alpha\, e^{-1/\alpha}$.

Контрольная работа 2, вариант 8

1. Дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из следующего распределения:

$$\mathsf{P}(X_1 = -1) = \mathsf{P}(X_1 = 0) = \theta, \quad \mathsf{P}(X_1 = 2) = 1 - 2\theta, \quad \text{где } 0 < \theta < \frac{1}{2}.$$

а) Найти ОММ θ_1^* для параметра θ по третьему моменту, проверить её несмещённость и состоятельность.

б) Найти ОММ θ_2^* для параметра θ по функции $g(y) = \mathrm{I}(y \neq 2)$, проверить её несмещённость и состоятельность.

в) Сравнить θ_1^* и θ_2^* в среднеквадратичном смысле.

г) Проверить асимптотическую нормальность θ_1^* и θ_2^*, найти коэффициенты асимпт. нормальности.

д) Найти ОМП для параметра θ.

2. Элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют равномерное распределение на отрезке $[-2\theta, \theta]$, где $\theta > 0$.

а) Найти оценку максимального правдоподобия для параметра θ.

б) Проверить асимптотическую нормальность полученной оценки.

в) Найти ОММ для параметра θ по первому моменту.

3. Элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют распределение Бернулли с параметром $p \in (0, 1)$.

а) Для какого параметра $\theta = \theta(p)$ оценка $\theta^* = e^{-(\overline{X})^3}$ будет АНО? Найти коэффициент.

б) Доказать асимптотическую несмещённость оценки θ^* для параметра θ.

4. Пусть элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеют распределение Пуассона с параметром λ. Проверить, является ли оценка $\theta^* = \dfrac{n}{n\overline{X}+1}$ асимптотически несмещенной оценкой для параметра $\theta = \dfrac{1}{\lambda}$.

8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Боровков А.А. Математическая статистика (Оценка параметров. Проверка гипотез). М.: Физматлит, 2007, 704 с.

2. Борисов И. С. Лекции по математической статистике. Новосибирск: НГУ, 2010.

3. Коршунов Д.А., Чернова Н.И. Сборник задач и упражнений по математической статистике. 2-е изд. Новосибирск: Изд-во Института математики им. С.Л.Соболева СО РАН, 2004.

б) дополнительная литература:

1. Боровков А.А. и др. Сборник задач по математической статистике. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1989.

2. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975.

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Нет.