

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)**

Утверждаю:

\_\_\_\_\_

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

**МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

Рабочая программа дисциплины

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

Направление подготовки

**010200 – «Математика и компьютерные науки»**

Квалификация (степень)

**Бакалавр**

Форма обучения

**Очная**

Новосибирск – 2014 год

## **Аннотация рабочей программы**

Дисциплина «Математическое моделирование» входит в Базовую часть Естественнонаучного цикла ООП по направлению подготовки 010200 – «Математика и компьютерные науки», все профили подготовки. Дисциплина реализуется на Механико-математическом факультете Новосибирского государственного университета кафедрой Вычислительной математики ММФ НГУ.

Курс «Математическое моделирование» содержит теоретические основы математического моделирования физических явлений. Он характеризуется, с одной стороны, математической строгостью изложения и логической стройностью, с другой – широким охватом классических результатов теории и большим числом примеров математических моделей конкретных физических процессов. В курсе достаточно большое место отведено для изучения криволинейных систем координат, тензорного анализа, ковариантного дифференцирования. Это позволяет излагать материал курса в наиболее общем виде: законы сохранения записываются в инвариантной, независимой от выбора системы координат, форме. Материал, посвященный дивергентной форме дифференциальных законов сохранения, чрезвычайно полезен для усвоения курсов лекций, следующих сразу после курса «Математическое моделирование» и посвященных численной реализации математических моделей.

Дисциплина нацелена на формирование общекультурных компетенций ОК-6, ОК-8, ОК-11, ОК-12, профессиональных компетенций ПК-7, ПК-8, ПК-9, ПК-12, ПК-20, ПК-21, ПК-22, ПК-29, ПК-30, ПК-31, ПК-32, ПК-34 выпускника.

Преподавание дисциплины предусматривает следующие формы организации учебного процесса: лекции, практические занятия, контрольные работы, самостоятельная работа студента, экзамены.

Программой дисциплины предусмотрены следующие виды контроля: текущий контроль успеваемости в форме контрольной работы, контроль в форме экзамена. Формы рубежного контроля определяются решениями Ученого совета, действующими в течение текущего учебного года.

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных единиц, 144 общее количество часов, из них академических часов 64. Программой дисциплины предусмотрены 32 часа лекционных и 16 часов практических занятий, 16 часов лабораторных работ, а также 44 часов самостоятельной работы студентов. Остальное время (36 часа) – различным формам контроля успеваемости.

## **1. Цели освоения дисциплины**

Дисциплина «Математическое моделирование» предназначена для изучения основ математического моделирования физических явлений и дает студентам необходимый объем знаний для построения математических моделей задач механики сплошной среды, их анализа и численной реализации.

Основной целью освоения дисциплины является овладение студентами навыков решения практических задач механики сплошной среды и рассматривается как обязательная дисциплина прикладного характера, определяющая специализацию студента.

Для достижения поставленной цели выделяются задачи курса:

- изучение теоретической части курса в соответствии с программой;
- решение цикла задач по курсу в соответствии с программой;
- выполнение контрольных работ;
- разработка программ для ЭВМ, численно реализующих математические модели конкретных физических процессов;
- сдача зачета и экзамена в соответствии с учебным планом.

## **2. Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата**

Дисциплина «Математическое моделирование» входит в Базовую часть Естественнонаучного цикла ООП по направлению подготовки 010200 – «Математика и компьютерные науки», все профили подготовки.

Дисциплина «Математическое моделирование» опирается на следующие дисциплины данной ООП:

- Математический анализ (дифференциальное, интегральное исчисление);
- Высшая алгебра;
- Аналитическая геометрия;
- Дифференциальная геометрия (тензорный анализ);
- Дифференциальные уравнения;
- Теоретическая механика.

Результаты освоения дисциплины «Математическое моделирование» используются в следующих дисциплинах данной ООП:

- Механика сплошных сред: жидкости и газы;
- Механика сплошных сред: твердое тело;
- Вычислительные методы;

- Методы вычислений:
- Вычислительная практика.

### **3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины:**

Изучение дисциплины направлено на формирование следующих

#### **общекультурных компетенций:**

- умением активно использовать базовые знания в области гуманитарных и естественных наук в профессиональной деятельности (ОК-6);
- способностью приобретать новые знания, используя современные образовательные и информационные технологии (ОК-8);
- способностью и готовностью использования в профессиональной деятельности фундаментальной подготовки по основам профессиональных знаний (ОК-11);
- способностью активно использовать компьютер в профессиональной и социально-бытовой сфере (ОК-12);

#### **и профессиональных компетенций**

*научно-исследовательская:*

- умением грамотно пользоваться языком предметной области (ПК-7);
- умением ориентироваться в постановках задач (ПК-8);
- знанием корректных постановок классических задач (ПК-9);
- глубоким пониманием сути точности фундаментального знания (ПК-12);

*производственно-технологическая деятельность:*

- владением методами математического и алгоритмического моделирования при решении инженерно-технических задач (ПК-20);
- умением грамотно использовать программные комплексы при решении задач механики (ПК-21);
- пониманием того, что фундаментальное математическое знание является главным инструментом механики (ПК-22);

*организационно-управленческая деятельность:*

- глубокое понимание роли экспериментальных исследования в механике (ПК-29);
- умением самостоятельно математически корректно ставить задачи механики (ПК-30);

- способностью передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженных в терминах предметной области изучавшегося явления (ПК-31);

*преподавательская деятельность:*

- умением точно представить фундаментальные знания в устной форме (ПК-32);
- умением точно представлять математические знания в устной форме (ПК-34);

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

- **иметь представление** о месте и роли изучаемой дисциплины среди других наук, области применимости изучаемых методов;
- **знать** теоретические положения курса и способы их реализации;
- **уметь** квалифицированно применять численные методы для решения практических задач механики сплошной среды, анализировать полученные результаты.

#### 4. Структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных единицы, 144 часа.

| № п/п | Раздел дисциплины  | Семестр | Неделя семестра | Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах) |                     |                        |                     |                    |         | Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра)<br>Форма промежуточной аттестации (по семестрам) |
|-------|--|---------|-----------------|--|---------------------|------------------------|---------------------|--------------------|---------|---|
|       |  |         |                 | Лекция   | Практическая работа | Самостоятельная работа | Лабораторные работы | Контрольная работа | Экзамен |   |
| 1.    | <b>Криволинейные координаты. Вектор. Тензор</b><br>Криволинейные координаты. Базис. Кобазис. Ковариантные и контравариантные компоненты вектора. Инвариантное представление вектора. Тензор. Диада. Диадный базис. Инвариантное представление тензора. Линейное отображение. Матрица тензора в заданном базисе. Метрический тензор. "Жонглирование" индексами. Инварианты тензора. Свертка тензоров. Критерий тензора. | 4       | 1-3             | 6  | 3                   | 5                      | 3                   |                    |         |   |
| 2.    | <b>Ковариантное дифференцирование. Тензорный анализ. Дифференцирование отображения. Градиент. Дивергенция.</b><br>Дифференцирование отображения. Градиент. Градиент скалярной функции. Градиент векторной функции. Дивергенция. "Дифференцирование"  | 4       | 4-6             | 6  | 3                   | 5                      | 3                   | 2                  |         | Контрольная работа  |

|    |   |   |      |           |           |           |           |          |           |                    |
|----|---|---|------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|-----------|--------------------|
|    | произведения. Ковариантная производная. Символы Кристоффеля. Свойства ковариантного дифференцирования. Интегральные теоремы: формула Стокса, формула Гаусса-Остроградского. Инвариантное определение градиента и дивергенции. Финитные поля. Оператор. Основные гильбертовы пространства. Операторы, сопряженные по Лагранжу.   |   |      |           |           |           |           |          |           |                    |
| 3. | <b>Законы сохранения в механике сплошной среды.</b> Сплошная среда, параметры сплошной среды. Лагранжево и эйлерово описания. Закон сохранения массы в эйлеровом описании. Пример: задача фильтрации однородной жидкости. Замкнутая модель. Начально-краевая задача. Закон сохранения массы в лагранжевом описании. Связь между эйлеровым и лагранжевым описаниями. Формула Эйлера. Законы сохранения как аксиомы механики сплошной среды. Закон сохранения импульса. Тензор истинных напряжений. Дифференциальная форма закона сохранения импульса. Закон сохранения момента импульса и симметричность тензора истинных напряжений. Деформация. Тензор конечных деформаций Грина, тензор Альманси. Геометрически линейная упругая среда. Условие совместности деформаций. Физически линейная упругая среда. Пример: Динамическая задача линейной теории упругости. Замкнутая модель. Начально-краевая задача. Закон сохранения полной энергии. Тензор скоростей деформации. Принцип Фурье-Стокса. Пример: Задача о распространении тепла в ограниченном объеме. Замкнутая модель. Начально-краевая задача. Полная система законов сохранения. Определяющие соотношения. Замыкание модели. Уравнения состояния. Пример: Идеальная двухпараметрическая сплошная среда. | 4 | 7-13 | 12        | 6         | 5         | 5         |          |           |                    |
| 4. | <b>Дивергентная форма законов сохранения. Вопросы численной реализации.</b> Дивергентная форма дифференциальных законов сохранения. Интегральные законы сохранения. Линейные операторно-сопряженные модели. Эллиптическая, параболическая, гиперболическая задачи. Простейшие примеры построения дискретных аналогов. Основные априорные оценки.  | 4 | 4-16 | 8         | 4         | 5         | 5         | 2        |           | Контрольная работа |
|    |   | 4 | 17   |           |           |           |           |          | 36        | Экзамен            |
|    |   |   |      | <b>32</b> | <b>12</b> | <b>44</b> | <b>16</b> | <b>4</b> | <b>36</b> |                    |

## 5. Образовательные технологии

Лекционный материал включает в себя все темы, перечисленные в структуре курса. Курс в большей степени основан на классических учебниках и монографиях ведущих ученых связанных с темой «Математическое моделирование». Изложение лекций предполагает диалог со слушателями. В начале каждой лекции выделяется 10 минут для напоминания содержания предыдущей лекции и ответов на вопросы студентов. В конце лекции также выделяется 5 минут для ответов на вопросы по текущему материалу. Электронная версия лекций размещена на сайте кафедры «Вычислительной математики», что позволяет бакалавру тщательно прорабатывать лекционный материал.

Дополнительно студент может получить разъяснения преподавателя по электронной почте.

Лекционное изложение материала сочетается с проведением семинарских занятий. На семинарских занятиях студенты обучаются применению теоретических знаний к решению конкретных задач. Практические занятия проходят в форме активного общения студентов с преподавателем путем обсуждения и применения методов и алгоритмов решения задач, физического осмысления полученных результатов. Занятия проводят сотрудники базовых институтов СО РАН, которые ориентируют студентов о современных направлениях научных исследований.

Самостоятельная работа бакалавра состоит в выполнении домашних заданий, подкрепляющих лекционный материал, с обязательным последующим контролем преподавателем.

## **6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины**

Самостоятельная работа студентов включает в себя: теоретическое освоение лекционного курса, практическое выполнение заданий и лабораторных работ.

Для выполнения самостоятельной работы студентам обеспечивается доступ к информационным ресурсам курса, которые включают в себя:

1. Презентации лекций по курсу «Математическое моделирование»;
2. Примерный список вопросов для самостоятельной проверки знаний и подготовки к экзамену;
3. Список литературы, включающий учебники и книги по изучаемым в курсе вопросам.

Текущий контроль осуществляется в форме контрольных вопросов на семинарах, проверок решения домашних заданий, а также проведением двух контрольных работ. Аттестация по итогам освоения дисциплины, согласно учебному плану, осуществляется в форме экзамена в конце семестра. Экзаменационный билет промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины включает теоретический вопрос и задачу по теме, отличающейся от вопроса.

Контролирующие материалы включают набор заданий для самостоятельной работы, списки вопросов для сдачи экзамена.

### **6.1 Перечень примерных контрольных вопросов и заданий для самостоятельной**

### лабораторной работы.

1. Составить программу для:
  - а. численного нахождения решения стационарной задачи теплопроводности в области, состоящей из объединения прямоугольников, с заданным распределением температуры на ее границе;
  - б. численного нахождения решения задачи теплопроводности в области, состоящей из объединения прямоугольников, с заданным распределением температуры на границе этой области и известным начальным распределением температуры;
2. Проверить ее работоспособность на тестовых примерах.
3. Проанализировать поведение разностного решения в зависимости от шага сетки.

### 6.2. Пример контрольной работы из трех задач по пройденным на семинарах темам для текущего контроля успеваемости:

1. Доказать, что  $\varepsilon_{123} = \vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = \pm \sqrt{\det(g_{ij})}$ , где  $\vec{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  - вектора базиса,  $g_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  - ковариантные компоненты метрического тензора.

2. Пусть  $f(\vec{x}(t), t)$  - дифференцируемая функция. Показать, что

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f(\vec{x}, t) dV = \int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{x}, t) dV + \int_{S(t)} f \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \vec{n} dS,$$

где  $S(t)$  - граница области  $V(t)$ ,  $\vec{n}$  - вектор внешней нормали к  $S(t)$

3. Пусть  $u$  - скалярная функция векторного аргумента. Записать уравнение Лапласа:  $\operatorname{div} \operatorname{grad} u = 0$  в цилиндрической системе координат:  
 $x_1 = r \cos \varphi$ ,  $x_2 = r \sin \varphi$ ,  $x_3 = z$ .

### 6.3. Образцы вопросов для подготовки к экзамену

В экзаменационный билет входит один вопрос по теоретическому материалу курса и одна задача, причем вопрос и задача относятся к разным темам. Дополнительная задача дается по усмотрению экзаменатора. Ниже приводятся образцы экзаменационных вопросов и задач.

### Примерный перечень билетов к экзамену.

#### Билет №2.

1. Вектор. Ковариантные и контравариантные компоненты вектора. Инвариантное определение вектора.

2. Закон сохранения импульса

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \operatorname{div} P$$

привести к дивергентному виду  $\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} = \operatorname{div}(P - \rho\vec{v} \otimes \vec{v})$ .

Билет №4.

1. Фундаментальный (метрический) тензор, его свойства. Формулы жонглирования индексами. Длина вектора, угол между векторами.
2. Пусть скалярное, векторное или тензорное свойство представлено следующим образом  $A_{ij}(t) = \int_{V(t)} B_{ij}(\vec{x}, t) dV$ , где  $V(t)$  - объем в момент времени

$t$ . Доказать, что

$$\frac{d A_{ij}}{d t} = \int_{V(t)} \left[ \frac{\partial B_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_m} (v_m B_{ij}) \right] dV.$$

Билет №8.

1. Ковариантная производная контравариантных и ковариантных компонент вектора. Тензорный характер величин  $\nabla_i u^m$ ,  $\nabla_i u_m$ .
2. Доказать, что если пренебречь величинами  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \approx o(\delta^2)$ , (декартова

система координат) то закон сохранения массы записывается в виде

$$\rho = \rho_0(1 - J_1(\varepsilon)), \text{ где } J_1(\varepsilon) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \text{ первый инвариант}$$

тензора деформаций  $\varepsilon$ .

Билет №13.

1. Закон сохранения массы (уравнение неразрывности) в эйлеровом описании. Замкнутая модель фильтрации в однородной пористой среде.
2. Пусть  $\vec{f}, \vec{u}$  - векторные функции векторного аргумента, причем  $\vec{u}$  постоянная. Доказать, что

$$(\nabla \vec{f})\vec{u} = \operatorname{div}(\vec{f} \otimes \vec{u}).$$

Билет №18.

1. Замкнутая математическая модель идеальной жидкости, основанная на законе сохранения массы и законе сохранения импульса. Закон Дарси как приближение закона сохранения импульса.
2. Компонентная запись уравнения  $\operatorname{div} P = 0$ ,  $P = P^*$  в полярной системе координат:

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi.$$

Здесь  $P$  - тензор ранга два.

#### Билет №22.

1. Замкнутая модель линейной теории упругости, основанная на линеаризации закона сохранения массы, закона сохранения импульса, тензора деформаций Альманси и законе Гука (нестационарный случай).
2. Компонентная запись уравнения

$$\operatorname{div} P = 0, \quad P = P^*$$

в декартовой системе координат. Здесь  $P$  - тензор ранга два.

#### Билет №26.

1. Идеальная двухпараметрическая сплошная среда (газ, жидкость).
2. Пусть  $\varphi$  - скалярная, а  $\vec{f}$  - векторная функции векторного аргумента. Доказать, что

$$\operatorname{div}(\varphi \vec{f}) = \vec{f} \cdot \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{div} \vec{f}.$$

### 7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

#### а) основная литература:

1. Абрамов А.А. Введение в тензорный анализ и риманову геометрию  
Издательство: ФИЗМАТЛИТ, 2004 г.
2. Акивис М.А., Гольдберг В.В. Тензорное исчисление  
Издательство: ФИЗМАТЛИТ, 2005 г.
3. Бондарь В.Д. Лекции по курсу "Введение в механику сплошных сред".  
Новосибирск: НГУ, 1967 г.
4. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. Пер. с англ. Изд.3,  
Едиториал УРСС, 2010 г.
5. Овсянников Л.В. Введение в механику сплошных сред. Часть I. Учеб. пособие /  
Новосиб. гос. ун-т. – Новосибирск. 1976 г.

6. Победря Г.Е. Лекции по тензорному анализу. М.: МГУ, 1986 г.
7. Победря Б.Е., Георгиевский Д.В. Основы механики сплошной среды. М.:Физматлит, 2006 г.
8. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование Издательство: ФИЗМАТЛИТ, 2005 г.
9. Седов Л.И. Механика сплошной среды (комплект из 2 книг). Серия: Классический университетский учебник, Издательство: Лань, 2004 г.

**б) дополнительная литература:**

1. Годунов С.К., Роменский Е.И. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. Новосибирск: Науч. кн., 1998 г.
2. Mikhail Itskov. Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers With Applications to Continuum Mechanics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007 г.
3. Хакимзянов Г.С., Чубаров Л.Б., Воронина П.В. Математическое моделирование. Часть I. Общие принципы математического моделирования. Учебное пособие. / Новосиб. Гос. ун-т, Новосибирск, 2010 г.
4. Хакисмзянов Г.С., Черный С.Г. Методы вычислений: В 4 ч. Новосибирск: НГУ, 2005. Ч. 2: Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

**8. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

- Ноутбук, медиа-проектор, экран.
- Программное обеспечение для демонстрации слайд-презентаций.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО с учетом рекомендаций и ПрООП ВПО по направлению 010200 – «Математика и компьютерные науки», все профили подготовки.

Автор: \_\_\_\_\_ Сорокин Сергей Борисович  
д.ф.-м.н., профессор ММФ НГУ

Рецензент (ы) \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Программа одобрена на заседании \_\_\_\_\_  
от \_\_\_\_\_ года, протокол № \_\_\_\_\_