Математический анализ

Лектор — профессор В. Н. Старовойтов

2014 – 2015 учебный год

3-й семестр

9. Функциональные последовательности и ряды.

9.1. Функциональные последовательности. Определения поточечной и равномерной сходимостей последовательности функций. Критерий Коши равномерной сходимости. Теорема Дини о равномерности сходимости монотонной последовательности непрерывных функций, определенных на компакте. Теорема о непрерывности равномерного предела последовательности непрерывных функций. Теорема о перестановке пределов двойной числовой последовательности. Теорема о предельном переходе под знаком интеграла Римана. Теорема о предельном переходе под знаком производной.

9.2. Функциональные ряды. Понятие функционального ряда. Определение поточечной и равномерной сходимости ряда. Критерий Коши равномерной сходимости ряда. Необходимый признак сходимости ряда. Теорема о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда непрерывных функций. Критерий Дини равномерной сходимости ряда. Теорема об интегрировании по Риману равномерно сходящихся рядов. Теорема о дифференцировании рядов. Критерий Вейерштрасса равномерной и абсолютной сходимости ряда. Признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости ряда.

9.3. Равномерная сходимость вещественных степенных рядов. Теорема о равномерной и абсолютной сходимости на замкнутом отрезке, лежащем внутри интервала сходимости. Непрерывность суммы степенного ряда на интервале сходимости. Теорема о дифференцировании степенного ряда на интервале сходимости. Теорема о единственности разложения функции в степенной ряд. Понятие аналитической функции. Связь между аналитичностью и бесконечной дифференцируемостью функции.

9.4. Методы суммирования расходящихся рядов. Требования к правилам суммирования рядов: линейность и регулярность. Метод суммирования Чезаро. Доказательство линейности и регулярности метода Чезаро. Теорема Абеля о равномерной сходимости степенного ряда. Метод Абеля — Пуассона, его линейность и регулярность.

10. Интегралы, зависящие от параметра.

10.1. Собственные интегралы, зависящие от параметра. Теорема о непрерывности по параметру интеграла от непрерывной функции. Теоремы о дифференцировании интеграла по параметру. Теорема об интегрировании интеграла Римана по параметру (о перестановке интегралов). Примеры вычисления интегралов с помощью интегрирования и дифференцирования интегралов, зависящих от параметра.

Теорема Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций полиномами.

10.2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Понятие равномерно сходящегося несобственного интеграла, зависящего от параметра. Критерий Коши равномерной сходимости. Признаки Вейерштрасса, Абеля и Дирихле равномерной сходимости несобственных интегралов. Теорема о предельном переходе под знаком несобственного интеграла. Теорема о дифференцировании несобственного интеграла по параметру. Теоремы об интегрировании несобственных интегралов по параметру (о перестановке несобственных интегралов). Γ- и B-функции Эйлера и их основные свойства.

11. Мера и интеграл Лебега.

11.1. Общее понятие меры. Кольцо, σ-кольцо, алгебра, σ-алгебра множеств и их примеры. Функция множества. Общее понятие конечно-аддитивной и счётно-аддитивной мер. Пространство с мерой. Простейшие примеры мер: считающая мера, мера Дирака.

11.2. Мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Параллелепипеды и их объем. Внешняя мера множества. Монотонность и счётная полуаддитивность внешней меры. Внешняя мера параллелепипеда. Множества меры нуль. Конечная аддитивность внешней меры относительно замкнутых множеств. Теоремы о внешней мере открытого множества и его замкнутого подмножества. Понятие измеримого множества (по Лебегу). Измеримость дополнения и пересечения измеримых множеств. Измеримость параллелепипедов и множеств меры нуль. Измеримость счетного объединения измеримых множеств. Счётная аддитивность внешней меры на измеримых множествах. Мера Лебега на σ-алгебре измеримых множеств. Непрерывность меры Лебега. Борелевские множества, множества типа F_σ и G_δ и их измеримость. Теорема о представлении измеримых множеств в виде объединения множества типа F_σ и множества меры нуль. Пример неизмеримого множества. Инвариантность меры Лебега относительно сдвигов.

Теорема Витали о покрытии. Инвариантность меры Лебега относительно ортогональных отображений. Теорема об изменении меры множества при линейном отображении.

11.3. Измеримые функции. Понятие измеримой функции. Теорема об измеримости композиции функций. Измеримость суммы, произведения и частного измеримых функций. Понятие борелевской функции. Лемма об измеримости поточечного предела последовательности измеримых функций. Сходимость почти всюду. Понятие эквивалентных функций. Теорема об измеримости предела сходящейся почти всюду последовательности измеримых функций. Теорема Егорова.

11.4. Интеграл Лебега. Понятие простой функции. Интегрируемые (суммируемые) простые функции и их свойства. Теорема об измеримой функции как равномерном пределе последовательности простых функций. Определение интегрируемой (суммируемой) функции и обоснование его корректности. Интеграл Лебега и его свойства. Теорема об аддитивности интеграла Лебега. Неравенство Чебышева. Теорема об абсолютной непрерывности интеграла Лебега. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Теорема Леви. Теорема Фату. Интегрируемость по Лебегу функции, интегрируемой по Риману.

Теорема о сечении измеримого множества. Теорема Фубини. Подграфик скалярной функции. Теорема о мере подграфика.

Теорема об оценке меры образа замкнутого шара при диффеоморфизме. Теорема о мере образа измеримого множества при диффеоморфизме. Теорема о замене переменных в интеграле Лебега. Полярные, цилиндрические и сферические координаты.

11.5. Пространства интегрируемых функций. Нормированные линейные пространства L^p. Неравенство Юнга. Вложения пространств L^p друг в друга. Неравенство Гёльдера. Неравенство Минковского. Понятие фундаментальной последовательности. Определение полного нормированного (банахова) пространства. Полнота пространств L^p.

Плотные подмножества. Плотность пространства непрерывных функций в L^p, $p \in [1, \infty)$. Понятие сепарабельного пространства. Сепарабельность L^p при $p \in [1, \infty)$. Несепарабельность пространства L^∞.

4-й семестр

12. Ряды и преобразование Фурье.

12.1. Гильбертовы пространства. Определение гильбертова пространства. Неравенство Коши — Буняковского. Полная система элементов гильбертова пространства. Понятия базиса и ортонормированного базиса в гильбертовом пространстве. Счётность и существование базиса в сепарабельном пространстве. Процесс ортогонализации базиса. Понятие ряда Фурье. Лемма о наилучшей аппроксимации частичными суммами ряда Фурье. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Теорема об эквивалентности равенства Парсеваля и полноты ортонормированной системы в гильбертовом пространстве. Теорема Рисса — Фишера. Понятие тотальной системы элементов. Теорема об эквивалентности полноты и тотальности системы элементов.

12.2. Тригонометрические ряды Фурье. Тригонометрическая система функций на отрезке $[-\pi, \pi]$, ее ортогональность в $L^2(-\pi, \pi)$. Понятие тригонометрического полинома (многочлена). Теорема об аппроксимации непрерывных функций тригонометрическими полиномами. Полнота тригонометрической системы в $L^2(-\pi, \pi)$ и ее следствия. Интеграл Дирихле. Лемма Римана — Лебега. Принцип локализации. Первое и второе условия Дини. Теоремы о сходимости ряда Фурье в точке. Условия Липшица и Гёльдера. Пространство функций непрерывных по Гёльдеру. Теорема о равномерной сходимости ряда Фурье непрерывных по Гёльдеру функций. Суммы Фейера. Теорема Фейера. Полные тригонометрические системы на отрезках $[0, \pi]$ и $[-\ell, \ell]$. Ряд Фурье в комплексной форме. Комплексное пространство $L^2(-\pi, \pi)$.

12.3. Преобразование Фурье. Интеграл Фурье. Теорема о представлении функции в виде интеграла Фурье. Интеграл Фурье в комплексной форме. Преобразование Фурье. Формула обращения. Теорема о равномерной сходимости образов Фурье сходящейся в $L^1(-\infty, \infty)$ последовательности функций. Теорема о непрерывности и убывании на бесконечности преобразования Фурье функции из $L^1(-\infty, \infty)$. Лемма об убывании на бесконечности функции из $L^1(-\infty, \infty)$ с ограниченной производной. Теорема о преобразовании Фурье производной функции. Теорема о производной преобразования Фурье. Свёртка функций. Преобразование Фурье свёртки и произведения функций. Преобразование Фурье функций из $L^2(-\infty, \infty)$. Теорема Планшереля. Применение преобразования Фурье к решению уравнения теплопроводности.

13. Анализ гладких отображений.

13.1. Непрерывные отображения. Понятие метрического пространства. Определение непрерывного отображения. Взаимно-однозначное отображение. Понятие гомеоморфизма. Сжимающие отображения. Понятие полного метрического пространства. Неподвижная точка отображения. Принцип сжимающих отображений. Теорема о непрерывной зависимости неподвижной точки от параметра.

13.2. Неявные функции. Понятие неявно заданного отображения. Теорема о неявной функции. Теоремы о непрерывности и о дифференцируемости неявного отображения. Теорема об обратном отображении. Теорема о гладкости обратного отображения.

13.3. Многообразия в $\mathbb{R}^n$. Определение p-мерного многообразия класса C^k в $\mathbb{R}^n$. Примеры многообразий. Теорема о локальном явном задании многообразия. Теорема о локальном параметрическом задании многообразия. Понятия параметризации, карты и атласа. Лемма о двух локальных параметризациях. Теорема о касательном пространстве к параметрически заданному многообразию. Ориентация параметрически заданных многообразий. Определение карт согласованной ориентации. Понятия согласованного атласа и ориентируемого многообразия. Определение многообразия с краем. Ориентация края многообразия.

13.4. Неявно заданные многообразия. Теорема о неявно заданном многообразии. Теорема о касательном пространстве к неявно заданному многообразию. Понятие экстремума функции на многообразии. Теорема о множителях Лагранжа.

14. Дифференциальные формы.

14.1. Полилинейные формы. Понятие полилинейной формы на линейном пространстве. Тензорное произведение полилинейных форм и его простейшие свойства (дистрибутивность, ассоциативность). Координатная линейная форма π. Лемма о представлении полилинейных форм. Определение кососимметрической полилинейной формы степени p (внешней p-формы).Пространство $\Lambda^p(X)$. Лемма о равенстве нулю p-формы от набора векторов, среди которых два совпадают, и её следствия.

Понятия перестановки и транспозиции. Теорема об изменении значения формы при перестановках аргументов. Операция альтернирования и ее простейшие свойства (линейность). Лемма о представлении p-форм. Базис в $\Lambda^p(X)$ и размерность этого пространства.

Определение внешнего произведения p-форм. Простейшие свойства внешнего произведения (дистрибутивность). Понятие упорядоченной перестановки. Теорема об эквивалентном определении внешнего произведения. Теорема об ассоциативности внешнего умножения. Связь внешнего произведения линейных форм с определителями. Каноническое представление внешних форм. Теорема об антикоммутативности внешнего произведения. Преобразование форм при линейных отображениях пространств и его свойства.

14.2. Дифференциальные формы в $\mathbb{R}^n$. Понятие внешней дифференциальной формы. Примеры дифференциальных форм. Дифференциал функции как дифференциальная форма. Координатная дифференциальная форма. Каноническое представление дифференциальных форм. Дифференциальные формы класса C^k.

Понятие внешнего дифференцирования. Теорема о внешнем дифференциале внешнего произведения форм. Теорема о равенстве нулю двойного внешнего дифференциала формы.

Перенос форм при отображениях. Линейность операции переноса. Теорема о переносе внешнего произведения форм. Теорема о переносе внешнего дифференциала формы. Точные и замкнутые формы. Пример замкнутой формы, не являющейся точной. Теорема Пуанкаре о точности замкнутых форм. Интегрирование дифференциальных форм по области в $\mathbb{R}^n$.

14.3. Дифференциальные формы на многообразиях. Определение дифференциальной формы, заданной на многообразии. Определение внешнего дифференциала формы, заданной на многообразии, и доказательство его корректности. Интеграл от формы по куску многообразия, заданному одной картой. Понятие разбиения единицы. Лемма Урысона. Теорема о существовании разбиении единицы. Определение интеграла от формы по многообразию и обоснование его корректности. Теорема Стокса.

Поверхностные интегралы 2-го рода. Форма объема в $\mathbb{R}^n$ и на многообразии. Поверхностные интегралы 1-го рода.

14.4. Элементы теории векторных полей в $\mathbb{R}^3$. Понятия скалярного и векторного полей. Дифференциальные формы в $\mathbb{R}^3$, соответствующие векторным полям. Связь операций над векторными полями (скалярное и векторное умножение) с операциями над дифференциальными формами. Определение операторов ∇, div, rot и их представление в декартовых координатах. Формулы для $\mathrm{rot}(f\vec{a})$, $\mathrm{div}(f\vec{a})$, $\mathrm{div}(\vec{a}\times\vec{b})$. Интегральные формулы векторного анализа. Формула Ньютона — Лейбница, формула Грина. Лемма о форме площади на 2-мерном многообразии в $\mathbb{R}^3$. Векторная формула Стокса. Формула Гаусса — Остроградского.

Понятие потенциального векторного поля. Понятие пути в $\mathbb{R}^3$. Теорема о необходимом и достаточном условии потенциальности векторного поля (через интеграл по замкнутым путям). Понятие гомотопных путей. Пути, гомотопные точке. Понятие односвязной области. Необходимое и достаточное условие потенциальности векторного поля для односвязных областей. Теорема Пуанкаре для 1-форм на односвязных областях. Соленоидальные векторные поля. Векторный потенциал и условия его существования.

Литература

1. Зорич В.А. Математический анализ. М.: «Наука», Т.2 (1984).
2. Решетняк Ю. Г. Курс математического анализа. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999. Ч. 2 (Кн.1, 2).
3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: «Физматлит», 2006. Т. 2 – 3.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: «Наука» (1989).
5. Рудин У. Основы математического анализа. М.: «Мир» (1966).
6. Спивак М. Математический анализ на многообразиях. М.: «Мир» (1968).
7. Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: «Мир» (1971).
8. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: «Наука» (1990).
9. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. М.: «Дрофа», Т.1,2 (2001).
10. Очан Ю.С. Сборник задач по математическому анализу. М.: «Наука» (1981).