

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Государственное образовательное учреждение
Высшего профессионального образования
Новосибирский государственный университет
Механико-математический факультет**

УТВЕРЖДАЮ

«___» _____ 201__ г.

Рабочая программа дисциплины
Обратные задачи

Направление подготовки
010100 – Математика

Квалификация (степень) выпускника
Магистр

Форма обучения
Очная

Новосибирск 2014

Аннотация рабочей программы

Дисциплина «Обратные задачи» входит в Базовую часть Профессионального цикла ООП по направлению подготовки «010100 – Математика», все профили подготовки. Дисциплина реализуется на Механико-математическом факультете Новосибирского государственного университета кафедрой Теории функций ММФ НГУ.

АННОТАЦИЯ

Магистерская программа по специальности «Обратные задачи» предназначена для подготовки выпускников к научно-исследовательской работе в аспирантуре, а также для подготовки специалистов, способных эффективно решать задачи, возникающие в различных областях приложений математики, и в первую очередь, в математической физике, геофизике, химии, биологии, медицине. Одной из важных целей программы является более полное отражение внутреннего единства и красоты математики и ее важнейших направлений: анализа, алгебры и геометрии, образующих органическую основу теории обратных и некорректных задач. Задачей программы является обоснование положения о том, что математика становится одним из главных инструментов исследований современной науки.

Основным направлением предлагаемой специализации является
Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, составляющих основу математической физики, вычислительной математики, классического функционального анализа и содержащих элементы современного функционального анализа: теория метрических, нормированных, гильбертовых пространств, теория линейных ограниченных операторов, спектральная теория.

Дисциплина нацелена на формирование общекультурных компетенций ОК-7, ОК-10, ОК-14, ОК-15, профессиональных компетенций ПК-2 – ПК-10, ПК-13, ПК-14, ПК-16, ПК-26, ПК-27, ПК-29.

Преподавание дисциплины предусматривает следующие формы организации учебного процесса: лекции, практические занятия, самостоятельная работа студента.

Программой дисциплины предусмотрены следующие виды контроля: текущий контроль успеваемости в форме контрольных, самостоятельных, индивидуальных работ, промежуточный контроль в форме двух зачетов. Рубежный контроль – в форме экзамена.

Общая трудоемкость дисциплины составляет 7 зачетных единиц, 108 академических часов (из них 32 аудиторных). Программой дисциплины предусмотрены 32 часов лекционных занятий, а также 68 часа самостоятельной работы студентов. Остальное время – контроль в форме экзамена.

1. Цели освоения дисциплины

ЦЕЛЕВАЯ АУДИТОРИЯ

Целевой аудиторией магистерской программы являются выпускники ВУЗов, использующие математические методы для решения научных и производственных задач.

Для обучения в рамках предлагаемой программы подготовки магистров могут быть зачислены лица, имеющие высшее образование, подтвержденное документом государственного образца (дипломом бакалавра/специалиста) по направлениям математика, прикладная математика.

Целью курса является знакомство студентов с основами теории и численных методов решения обратных и некорректных задач. Задачи курса – дать базовые понятия, лежащие в основе теории обратных задач, доказать их свойства, исследовать взаимосвязь между различными понятиями; показать неразрывную связь теории и численных методов решения обратных и некорректных задач с другими областями математики: алгеброй, геометрией, математическим анализом и т.д.; показать применение основных понятий и методов к различным областям математики, как теория интегральных уравнений, дифференциальные уравнения с частными производными, вариационное исчисление и др.; показать разнообразие конкретных реализаций общих конструкций, обеспечить возможность дальнейшего самостоятельного освоения и применения современных методов; расширить математический кругозор и поднять уровень математической культуры за счет работы с объектами более высокого уровня абстракции по сравнению с конечномерным анализом.

В первой части данный курс знакомит студентов с общими понятиями теории и численных методов решения обратных и некорректных задач: регуляризацией, численными методами, методами оптимизации в применении к некорректным задачам.

Вторая часть курса включает в себя классическую теорию линейных и нелинейных обратных задач.

2. Место дисциплины в структуре ООП магистратуры

Дисциплина «Обратные задачи» входит в Базовую часть Профессионального цикла ООП по направлению подготовки «010100 – Математика», все профили подготовки.

Дисциплина «Обратные задачи» опирается на следующие дисциплины данной ООП:

- Математический анализ (формализация основных понятий анализа: предел, непрерывность, дифференцируемость, ряд, интеграл и т.д. в конечномерных нормированных пространствах; метрические свойства этих пространств).
- Алгебра (свойства линейных отображений между конечномерными пространствами - основа для изучения свойств ограниченных операторов, теория евклидовых пространств, теория групп);
- Обыкновенные дифференциальные уравнения;
- Теория функций комплексного переменного;

Результаты освоения дисциплины «**Ошибка! Источник ссылки не найден.**» используются в следующих дисциплинах данной ООП:

- Уравнения математической физики;
- Вычислительная математика;
- Механика сплошной среды;
- Теория вероятности и математическая статистика.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины «010100 – Математика»:

- общекультурные компетенции: ОК-7, ОК-10, ОК-14, ОК-15;
- профессиональные компетенции: ПК-2 – ПК-10, ПК-13, ПК-14, ПК-16, ПК-26, ПК-27, ПК-29.
- К1 знать теоретические основы современного анализа, алгебры, геометрии, численных методов, теории вероятностей и математической статистики, функционального анализа, дифференциальных уравнений и уравнений математической физики, теории оптимального управления, в том числе:
 - К1.1 Основы дифференциального исчисления (производные Фреше, Гато, градиент и субградиент функционала)
 - К1.2 Основы интегрального исчисления (интегралы Римана, Стильтбеса, Бохнера)
 - К1.3 Основы теории приближений.
 - К1.4 Теорию и методы факторизации матриц (Жорданова форма, сингулярное и разложение).
 - К1.5 Теорию и методы приближения, интерполяции и экстраполяции функций.
 - К1.6 Теорию и методы интегрирования по кривым и поверхностям.
 - К1.7 Методы решения больших систем линейных алгебраических уравнений и задачи на собственные значения.
 - К1.8 Основы спектральной теории интегральных и дифференциальных операторов.
 - К1.9 Теорию и численные методы решения основных уравнений математической физики.
 - К1.10 Основы теории евклидовых, гильбертовых, банаховых, метрических и топологических пространств.
-
- К2 изучить технику работы с численными алгоритмами решения задач линейной алгебры и математической физики.
 - К2.1 Решение систем алгебраических уравнений и задачи на собственные значения.
 - К2.2 Базовые методы решения задач для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений: методы конечных разностей, конечных элементов.
-
- К3 владеть методами решения задач на ЭВМ
 - К3.1 Операционные системы.
 - К3.2 Языки программирования Фортран, С++.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

- иметь современное представление о месте обратных задач среди различных областей математики;
- знать основные понятия, доказывать их свойства, выраженные в различных леммах и теоремах, видеть взаимосвязь между понятиями; уметь использовать понятийный аппарат, принципы и методы функционального анализа при исследовании конкретных математических моделей.
- владеть навыками решения задач, предложенными в настоящем курсе.

4. Структура и содержание дисциплины

производственно-технологическая деятельность

К4 уметь применять современные методы численного решения задач математической физики.

К5 знать основные математические модели и основные алгоритмы их численной реализации

К6 владеть навыками исследования задач современной математической физики

научно-педагогическая деятельность

К7 уметь документировать научно-исследовательские работы и представлять результаты исследований, участвовать в научных дискуссиях

К8 знать особенностей научного доклада

К9 владеть навыками использования современных технических средств подготовки и проведения презентаций

СТРУКТУРА ПРОГРАММЫ И ОРГАНИЗАЦИЯ ОБУЧЕНИЯ

Основная образовательная программа подготовки магистров по направлению «математика и прикладная математика» предусматривает изучение следующих учебных циклов:

- 1.гуманитарный, социальный и экономический цикл,
- 2.математический и естественнонаучный цикл
- 3.профессиональный цикл

В рамках учебной программы по специальности “Обратные и некорректные задачи естествознания” студенты осваивают дисциплины гуманитарного, социального и экономического цикла в соответствии с программой подготовки магистров по направлению «Математика и прикладная математика».

Структура математического и естественнонаучного и профессионального циклов отображена в Таблице 1.

Таблица 1. Структура образовательной программы по специальности

Код *)	Учебные циклы и проектируемые результаты их освоения	Трудоемкость (зачетные единицы)	Перечень дисциплин для разработки программ, учебников и учебных пособий
М.МПИ.ММ.1	Гуманитарный, социальный и экономический цикл		
М.МПИ.ММ.2	Математический и естественно-научный цикл		
М.МПИ.ММ.3	Профессиональный цикл		
	Базовая часть		<ul style="list-style-type: none"> • Основы анализа, алгебры, геометрии • Уравнения математической физики • Численные методы
	Вариативная часть		<ul style="list-style-type: none"> • Функциональный анализ • Методы оптимизации • Дифференциальные уравнения • Языки программирования • Прикладные задачи (физика, геофизика) • Нейронные сети • Генетические алгоритмы
М.МПИ.ММ.4	Практика и научно-исследовательская работа		
М.МПИ.ММ.5	Итоговая государственная аттестация		Подготовка магистерской диссертации
	Общая трудоемкость основной образовательной программы	120	

*) Коды должны быть сформированы в соответствии с программой подготовки магистров по направлению «математика и прикладная математика»

5. Образовательные технологии

Используется традиционная система обучения, включающая лекции и практические занятия. Содержание лекции должно отвечать следующим дидактическим требованиям:

- изложение материала от простого к сложному, от известного к неизвестному;

- логичность, строгость, четкость и ясность в изложении материала;
- возможность проблемного изложения, с целью активизации деятельности студентов.

Для контроля освоения студентами теоретического материала в середине каждого семестра предполагается проведение коллоквиума.

Для проверки уровня знаний студентов и их аттестации в конце курса предполагается проведение экзамена. При проведении аттестации по предмету студентов важно помнить, что систематичность, объективность, аргументированность – главные принципы, на которых основаны контроль и оценка знаний студентов.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

6.1. Перечень задач для контрольных, самостоятельных и домашних работ содержится в учебнике: Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи, Сибирское научное издательство, 2011. (в распоряжении студентов имеются учебники и электронная версия).

6.2. Перечень теоретических задач, предлагаемых на экзамене по функциональному анализу:

6.3. Вопросы для подготовки к экзамену.

1. Корректные, некорректные и условно-корректные задачи.
2. Множество корректности.
3. Условная устойчивость.
4. Примеры некорректных задач - дифференцирование, задача Коши для уравнения Лапласа, задача для уравнения теплопроводности с обратным временем, интегральные уравнения первого рода.
5. Методы регуляризации А.Н. Тихонова.
6. Методы регуляризации М.М. Лаврентьева.
7. Теорема о непрерывности обратного оператора. Квазирешение. Теорема В.К. Иванова.
8. Теорема о сингулярном разложении матриц.
9. Метод С.К. Годунова регуляризации систем линейных алгебраических уравнений.
10. Сингулярное разложение компактного оператора.
11. Критерий разрешимости Пикара.
12. Производная Фреше. Целевой функционал $J(q) = \langle Aq-f, Aq-f \rangle$ и его градиент $J'q$. Выражение для градиента $J'q = 2[A'q]^*(Aq-f)$.
13. Условия единственности стационарной точки целевого функционала.
14. Прямая и обратная задача для уравнения колебаний струны.
15. Вычисление градиента целевого функционала для обратной задачи для уравнения колебаний струны. Метод простой итерации, метод итераций Ландвебера
16. Метод обращения разностной схемы.
17. Обратная задача акустики и методы ее решения.
18. Переход к обратной задаче с данными на характеристике. Задача Гурса. Конечно-разностный метод решения прямой задачи.
19. Численный метод решения обратной задачи акустики. Метод обращения разностной схемы.
20. Сведение обратной задачи акустики к системе интегральных уравнений типа Вольтерра.
21. Сходимость по функционалу метода простой итерации и метода наискорейшего спуска.
22. Оценка скорости сходимости по функционалу метода простой итерации и метода

наискорейшего спуска.

23. Модуль непрерывности обратного оператора и оценка условной устойчивости.
24. Задача Коши для уравнения теплопроводности с обратным временем. Оценка условной устойчивости.
25. Задача Коши для уравнения Лапласа. Оценка условной устойчивости.
26. Сильная сходимости метода наискорейшего спуска.

Программа.

- 1) Прямые и обратные задачи. Примеры. Некорректность.
- 2) Понятие корректности задачи математической физики. Определение. корректности по Адамару.
- 3) Условная корректность.
- 4) Обратная задача акустики.
- 5) Сведение обратной задачи к задаче Гурса с данными на характеристике.
- 6) Сведение обратной задачи акустики к системе интегральных уравнений Вольтерра.
- 7) Интегральные уравнения Вольтерра первого рода. Некорректность. Регуляризация.
- 8) Интегральные уравнения Фредгольма первого рода. Некорректность. Регуляризация.
- 9) Метод наискорейшего спуска.
- 10) Метод простой итерации.
- 11) Компактный оператор A и некорректность задачи $Aq=f$.
- 12) Теоремы о сингулярном разложении матрица и компактного оператора.
- 13) Критерий Пикара.
- 14) Обратная задача для волнового уравнения. Сопряженная задача.
- 15) Градиент функционала невязки $J(q) = \langle Aq-f, Aq-f \rangle$.
- 16) Градиентный метод решения обратной задачи для волнового уравнения.
- 17) Вычисление производной Фреше в обратной задаче для волнового уравнения.
- 18) Сведение обратной задачи для волнового уравнения к семейству интегральных уравнений Фредгольма.
- 19) Метод Гельфанда-Левитана решения обратной задачи для волнового уравнения.
- 20) Регуляризация операции дифференцирования.
- 21) Сходимость метода наискорейшего спуска.
- 22) Сходимость метода простой итерации.
- 23) Обратная задача электродинамики.
- 24) Метод регуляризации А.Н. Тихонова.
- 25) Метод регуляризации М.М. Лаврентьева.

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. М.М. Лаврентьев, В.Я. Савельев. Теория операторов и некорректные задачи, ИМ СО РАН, 2007 (второе издание).
2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ*. – СПб.: Изд-во Невский Диалект, БХВ – Санкт-Петербург, 2004.
3. Треногин В.А. *Функциональный анализ. Учебник для вузов*. – М.:Физматлит, 2002.

б) дополнительная литература:

1. Треногин В.А. *Задачи и упражнения по функциональному анализу. Учебное пособие*. – М.: Физматлит, 2002.
2. Натансон И.П. *Теория функций вещественной переменной*. – М.: Гостехиздат, 1974.

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

- Ноутбук, медиа-проектор, экран.
- Программное обеспечение для демонстрации слайд-презентаций.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО с учетом рекомендаций и ПрООП ВПО по направлению «010100 – Математика», все профили подготовки.

Автор: _____Кабанихин Сергей Игоревич,
член-корр. РАН, профессор кафедры теории функций.

Рецензент (ы) _____

Программа одобрена на заседании _____
(Наименование уполномоченного органа вуза (УМК, НМС, Ученый совет))
от _____ года, протокол № _____