ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Курс «Функциональный анализ»
по направлениям 010800 – «Механика и математическое моделирование»,
010400 «Прикладная математика и информатика»,
квалификация (степень) «бакалавр»,
утвержден приказом № 826 Министерства образования и науки
Российской федерации от 24 декабря 2009 года

Лектор: к.ф.-м.н., доцент Люлько Н.А.

5-6 семестры, 2014-2015 гг.

1. Метрические пространства. Сходимость, фундаментальность последовательностей. полнота метрических пространств. Теорема о пополнении. Критерий полноты метрического пространства. Принцип сжимающих отображений. Теорема Бэра. Компактность. Критерий компактности в метрическом пространстве. Теорема Арцела. ([1], гл. 2;[2], гл. 1;[3], гл.1).
2. Линейные, нормированные, евклидовы пространства. Теорема об изоморфизме конечномерных нормированных пространств. Гильбертовы пространства. Тождество параллелограмма. Теорема о разложении гильбертова пространства в прямую сумму. Ортонормированные системы. Неравенство Бесселя. Полные ортонормированные системы. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве. ([1], гл. 3;[2], гл. 2;[3], гл.4; [5] гл.3).
3. Линейные операторы в нормированных пространствах. Пространство линейных непрерывных операторов; его полнота. Сопряженное пространство X^*. Теорема Хана-Банаха. Общий вид линейных ограниченных функционалов в некоторых конкретных нормированных пространствах. Естественное вложение нормированного пространства X во второе сопряженное пространство. Рефлексивность нормированных пространств. ([1], гл.4;[2], гл. 3,4;[3], гл.5; [5], гл.4).
4. Теорема Банаха-Штейнгауза. Слабая сходимость, слабая ограниченность в нормированных пространствах. Критерий слабой сходимости в нормированном пространстве. Слабая сходимость в сопряженном пространстве. Теорема Алаоглу.[1], гл. 4; [2], гл. 4;[3], гл. 8).
5. Обратные операторы. Критерий существования обратного ограниченного оператора. Теорема Неймана. Спектр и резольвента линейного оператора. Свойства спектра линейного ограниченного оператора ([1], гл.4;[3], гл. 13; [5], гл.3, 6).
6. Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема о замкнутом графике.([1], гл.4;[2], гл.3).
7. Сопряженные операторы в банаховом пространстве. Сопряженные, самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Элементы спектральной теории. ([2], гл. 7; [3], гл. 9; [5], гл. 6).
8. Компактные операторы. Основные свойства компактных операторов. Критерий конечномерности нормированного пространства. Альтернатива Фредгольма. Теоремы Фредгольма. Полнота собственных функций самосопряженного вполне непрерывного оператора в гильбертовом пространстве. ([1], гл. 4,9;[2], гл.6;[3], гл. 9,13).
9. Функции ограниченной вариации. Теорема о представлении функции ограниченной вариации в виде суммы функции скачков, абсолютно непрерывной функции и сингулярной функции. Интеграл Римана-Стилтьеса. Вид линейного ограниченного функционала в $C[a,b]$. Нерефлексивность пространства $C[a,b]$. ([1], гл.5,6,7;[4], гл.3,4,8,9).

Темы лекций в V семестре

№ п/п	Раздел дисциплины	Неделя V семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)				Фомы текущего контроля успеваемости *(по неделям семестра).*
			Лекции	Семинары	Самостоятельная работа	Сумма	
1	ВВЕДЕНИЕ. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ПРИМЕРЫ.	1	2	2	2	6	
2	ТОПОЛОГИЯ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ.	2	2	2	2	6	
3	СХОДИМОСТЬ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ. ПОЛНОТА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ.	3	2	2	2	6	САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА
4	ПОЛНОТА ПРОСТРАНСТВ $L_1(X)$, $L_p(X)$ ($1 < p < \infty$), ГДЕ X ИЗМЕРИМОЕ В R^n МНОЖЕСТВО. ПРИМЕР НЕПОЛНОГО ПРОСТРАНСТВА $\mathcal{L}_p\left[a,b\right]$.	4	2	2	2	6	
5	ТЕОРЕМА О ПОПОЛНЕНИИ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ.	5	2	2	2	6	
6	ТЕОРЕМА ВЕЙЕРШТРАССА О ПЛОТНОСТИ ПОЛИНОМОВ В ПРОСТРАНСТВЕ $C[a,b]$. ТЕОРЕМА О ПЛОТНОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_p([a,b])$ ($1 \leq p < \infty$).	6	2	2	2	6	
7	СВОЙСТВА ПОЛНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ. КРИТЕРИЙ ПОЛНОТЫ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА	7	2	2	2	6	КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

	(ТЕОРЕМА О ВЛОЖЕННЫХ ШАРАХ). ПРИНЦИП СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ.						
8	ТЕОРЕМА БЭРА. СЕПАРАБЕЛЬНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА.	8	2	2	2	6	
9	КОМПАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА. КРИТЕРИЙ КОМПАКТНОСТИ.	9	2	2	2	6	
10	КОМПАКТНЫЕ И ОТНОСИТЕЛЬНО КОМПАКТНЫЕ МНОЖЕСТВА. КРИТЕРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ КОМПАКТНОСТИ МНОЖЕСТВ В КОНКРЕТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ	10	2	2	2	6	СДАЧА ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ
11	ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА.	11	2	2	2	6	
12	ПРОСТРАНСТВА СО СКАЛЯРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ (ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА).	12	2	2	2	6	
13	ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО.ОПРЕДЕЛЕНИЕ.СВОЙСТВА.	13	2	2	2	6	
14	ОРТОНОРМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ. РЯДЫ ФУРЬЕ.	14	2	2	2	6	
15	ТЕОРЕМА ОБ ИЗОМОРФИЗМЕ СЕПАРАБЕЛЬНЫХ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ.	15	2	2	2	6	КОНТОРОЛЬНАЯ РАБОТА
16	ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ФУНКЦИОНАЛЫ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ, ПРИМЕРЫ. ТЕРЕМЫ О ПОЛНОТЕ ПРОСТРАНСТВА $L(X,Y)$, О ПРОДОЛЖЕНИИ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА ПО НЕПРЕРЫВНОСТИ.	16	2	2	2	6	ИТОГОВОЕ ТЕСТИРОВАНИЕ
17	СОПРЯЖЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО. ТЕОРЕМА ХАНА-БАНАХА. СЛЕДСТВИЯ.	17	2	2	3	7	СДАЧА ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ
18	ОБЩИЙ ВИД ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В	18	2	2	3	7	ЗАЧЕТ

	НЕКОТОРЫХ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ.						
	ВСЕГО ЧАСОВ		36	36	38	110	

Темы лекций в VI семестре

№ п/п	Раздел дисциплины	Неделя VI семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)				Фомы текущего контроля успеваемости *(по неделям семестра)*
			Лекции	Семинары	Самостоятельная работа	Сумма	
1	ПРИНЦИП РАВНОМЕРНОЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ (ТЕОРЕМА БАНАХА – ШТЕЙНГАУЗА)	1	2	2	2	6	
2	СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ В НОРМИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. СВОЙСТВА. ПРИМЕРЫ	2	2	2	3	7	
3	СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ В НЕКОТОРЫХ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. СЛАБАЯ И *- СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ В X^*	3	2	2	3	7	САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА
4	ОБРАТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ, СВОЙСТВА, ПРИМЕРЫ. ТЕОРЕМА НЕЙМАНА	4	2	2	3	7	
5	ТЕОРЕМА БАНАХА ОБ ОБРАТНОМ ОПЕРАТОРЕ	5	2	2	2	6	
6	ЛЕММА ОБ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ НОРМАХ. ТЕОРЕМА БАНАХА О ЗАМКНУТОМ ГРАФИКЕ	6	2	2	2	6	
7	СПЕКТР И РЕЗОЛЬВЕНТА ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА	7	2	2	3	7	КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА
8	СОПРЯЖЕННЫЙ ОПЕРАТОР ДЛЯ ОПЕРАТОРА $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.СОПРЯЖЕН	8	2	2	3	7	

	НЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ						
9	ЭЛЕМЕНТЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ	9	2	2	3	7	
10	КОМПАКТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ПРИМЕРЫ. ЛЕММА РИССА О ПОЧТИ ПЕРПЕНДИКУЛЯРЕ	10	2	2	2	6	
11	КОМПАКТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ. СВОЙСТВА	11	2	2	3	7	
12	ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ	12	2	2	3	7	
13	ТЕОРЕМА ГИЛЬБЕРТА-ШМИДТА О ПОЛНОТЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНОГО САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ	13	2	2	3	7	
14	ФУНКЦИИ С ОГРАНИЧЕННЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ. СВОЙСТВА. ПРИМЕРЫ	14	2	2	3	7	КОНТОРОЛЬНАЯ РАБОТА
15	ИНТЕГРАЛ РИМАНА - СТИЛТЬЕСА. СВЯЗЬ С ИНТЕГРАЛОМ ЛЕБЕГА-СТИЛТЬЕСА	15	2	2	2	6	СДАЧА ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ ИТОГОВОЕ ТЕСТИРОВАНИЕ
16	ТЕОРЕМА РИССА О ВИДЕ ЛИНЕЙНОГО НЕПРЕРЫВНОГО ФУНКЦИОНАЛА В ПРОСТРАНСТВЕ $C[a,b]$. НЕРЕФЛЕКСИВНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА $C[a,b]$.	16	2	2	2	6	ЗАЧЕТ
	ВСЕГО ЧАСОВ		32	32	42	106	

Программа семинарских занятий

5 семестр

1. Счетные множества. Метрические пространства.
2. Открытые, замкнутые множества.
3. Сходимость в метрических пространствах. Полнота, пополнение.
4. Плотность, всюду плотность; сепарабельность метрических

пространств.
5-6. Компактность, вполне ограниченность, относительная компактность.
7. Контрольная работа.
8. Нормированные пространства.
9-10 Гильбертовы пространства.
11. Линейные функционалы. Непрерывные функционалы. Свойства.
12. Сопряженное пространство. Сходимость.
13-14. Теорема Хана-Банаха. Следствия из теоремы.
15. Виды линейных непрерывных функционалов некоторых нормированных пространствах.
16. Контрольная работа.

6 семестр

1-2. Линейные ограниченные операторы. Норма, сходимость операторов.
3. Обратные операторы.
4-5. Спектр, резольвента линейного оператора.
6. Сопряженные, самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве.
7. Контрольная работа.
8. Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема о замкнутом графике. Теорема Банаха-Штейнгауза.
9-10. Вложение нормированного пространства во второе сопряженное. Слабая сходимость в нормированных пространствах.
11.-12. Компактные операторы.
13. Альтернатива Фредгольма. Интегральные уравнения с вырожденным ядром.
14. Контрольная работа.

Основная литература

1. Колмогоров. А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. М.: Наука, 2004.
2. Люстерник Л.А.. Соболев В.И. *Элементы функционального анализа*. М.:Наука, 1965.
3. Канторович Л.В., Акилов Г.П.. *Функциональный анализ*. М.: Наука, 1984.
4. Натансон И.П. *Теория функций вещественной переменной*. М.: Гостехизд-во. 1974.
5. Треногин В.А. *Функциональный анализ*. М.: Наука, 1980.

Дополнительная литература

6. Люлько Н.А ., Максимова О.Д ., Ляпидевский В.Ю.*Функциональный* анализ. *Учебное пособие*. НГУ.2005, 136 стр.
7. Треногин В.А., Писаревский Е.М., Соболева Т.С. *Задачи и упражнения по функциональному анализу. 1984.*
8. Очан Ю.С. *Сборник задач по математическому анализу*. М.: Просвещение, 1981.
9. Антоневич А.Б., Князев П.Н., Радыко Я.В. *Задачи и упражнения по функциональному анализу*. Минск, 1978.
10. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. *Теоремы и задачи функционального анализа*. 2-е изд., М. Наука, 1988.

Экзаменационные вопросы по функциональному анализу

5, 6 семестр (2014-2015 гг.)

1. **Метрические пространства.** Неравенства Гельдера и Минковского. Примеры.
2. Замкнутые, открытые множества в метрическом пространстве. Свойства.
3. Сходимость в метрическом пространстве. Полнота метрических пространств.
4. Полнота пространства $L_1(X)$, где X – измеримое в R^n множество. Полнота пространства $L_p(X)$, где X - множество конечной меры, $1 \le p < \infty$.
5. Теорема о пополнении метрических пространств.
6. Теорема о плотности полиномов в пространстве $C[a,b]$.
7. Теорема о плотности непрерывных функций в пространстве $L_p[a,b]$, $1 \le p < \infty$.
8. Критерий полноты метрического пространства (теорема о вложенных шарах). Контрпримеры к теореме.
9. Принцип сжимающих отображений в метрическом пространстве.
10. Теорема Бэра.
11. Сепарабельные метрические пространства. Примеры несепарабельных пространств.
12. Компактные, вполне ограниченные метрические пространства. Критерий компактности метрического пространства (теорема).
13. Компактные и относительно компактные множества в метрическом пространстве. Теорема Хаусдорфа.
14. Критерии относительной компактности множеств в конкретных пространствах: в R^n, в $l_p, 1 \le p < \infty$, в C[a,b] (теорема Арцела), $L_p[a,b]$, $1 \le p < \infty$.
15. Линейные пространства. Свойства. Примеры.
16. **Нормированные, банаховы пространства**. Примеры.
17. Теорема об изоморфизме конечномерных нормированных пространств. Следствия.
18. Линейные пространства со скалярным произведением. Свойства. Примеры.
19. Тождество параллелограмма (теорема).
20. Ортонормальные системы. Свойства. Лемма об ортогонализации.
21. **Гильбертовы пространства**. Примеры. Теорема о разложении гильбертова пространства в прямую сумму. Следствие (критерий всюду плотности линейного многообразия).
22. Существование ортонормального базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве.
23. Ряды Фурье. Теорема о свойстве минимальности коэффициентов Фурье. Следствие (неравенство Бесселя).
24. Равенство Парсеваля. Теорема об эквивалентности в сепарабельном гильбертовом пространстве понятий полной и замкнутой ортонормальных систем.
25. Теорема Рисса-Фишера. Теорема об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.
26. **Операторы, действующие из X в Y (**X, Y – нормированные пространства). Линейность, непрерывность, ограниченность операторов. Теорема об эквивалентности понятий непрерывности и ограниченности линейного оператора. Примеры.
27. Пространство L (X,Y). Норма оператора. Равномерная и сильная сходимости операторов. Полнота пространства L(X,Y). Теорема о продолжении линейного оператора по непрерывности.
28. **Сопряженное пространство X*** . Теорема Хана-Банаха. Следствия из теоремы.
29. Общий вид линейных непрерывных функционалов в конкретных пространствах: в конечномерном, в c_0, в l_1, в l_p (p>1), в гильбертовом (теорема Рисса), $L_p[a,b]$, $1 \le p < \infty$
30. Естественное вложение X в X** . Рефлексивные нормированные пространства.

Примеры.

31. Теорема Банаха-Штейнгауза. Теорема о полноте пространства L (X,Y) в смысле сильной сходимости. Критерий сильной сходимости линейных операторов.

32. Слабая сходимость в нормированных пространствах. Свойства. Ограниченность слабо сходящейся последовательности. Критерий слабой сходимости. Теорема об эквивалентности ограниченности и слабой ограниченности множества.

33.   Критерий слабой сходимости в конечномерном пространстве, l_p (p>1), гильбертовом пространстве, $L_p[a,b]$ (p>1) .

34. Слабая сходимость и *- слабая сходимость в сопряженном пространстве. Свойства. Теорема о *- слабой компактности замкнутого шара в X^*, где X - сепарабельное нормированное. пространство.

35. Обратные операторы. Свойства. Критерий существования обратного линейного оператора. Критерий существования обратного линейного ограниченного оператора.

36. Теорема Неймана. Теорема об открытости множества операторов в L(X,Y), имеющих обратные ограниченные операторы.

37. Теорема Банаха об обратном операторе. Следствие об эквивалентности норм.

38. Замкнутые операторы. Свойства. Примеры. Теорема Банаха о замкнутом графике.

39. Спектр и резольвента линейного оператора. Классификация точек спектра.

40. Компактность спектра линейного непрерывного оператора. Аналитичность резольвенты на резольвентном множестве. Следствие.

41. Сопряженные операторы в банаховом пространстве. Теорема существования.

42. Сопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Теорема существования. Свойства сопряженных операторов.

43. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Норма оператора. Свойства спектра. Теорема о границе спектра самосопряженного оператора. Следствие.

44. Вполне непрерывные (компактные) линейные операторы. Примеры. Свойства.

45. Лемма Рисса (о почти перпендикуляре). Следствие. Критерий конечномерности нормированного пространства (теорема).

46. Теорема о замкнутости множества вполне непрерывных операторов в L(X,Y). Компактность оператора Гильберта-Шмидта.

47. Теорема о компактности сопряженного оператора (д-во в гильбертовом пространстве).

4 8. Леммы о конечномерности ядра и о замкнутости множества значений оператора I – A, где A - вполне непрерывный оператор в банаховом пространстве.

49. Линейные операторные уравнения с вполне непрерывными операторами. Теорема Рисса об обратном операторе. Альтернатива Фредгольма.

50. Теорема о связи между неоднородным и однородным сопряженным уравнением (д-во в гильбертовом пространстве).

51. Теорема об одинаковом количестве линейно независимых решений однородного и сопряженного однородного уравнений (д-во в гильбертовом пространстве).

52. Теорема о спектре компактного оператора.

53. Теорема Гильберта - Шмидта о полноте собственных функций вполне непрерывного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве. Следствия.

55.   Теорема о представлении функции с ограниченным изменением в виде разности двух монотонно возрастающих функций.

56.   Абсолютно непрерывные функции. Свойства. Примеры.

57.   Теорема о представлении функции с ограниченным изменением в виде суммы функции скачков, абсолютно непрерывной функции и сингулярной функции.

58.   Интеграл Римана-Стилтьеса. Определение. Свойства.

59.   Теорема существования интеграла от непрерывной функции по функции ограниченной вариации.

60.   Вычисление интеграла Р.- С. в случае функции скачков, абсолютно непрерывной функции.

61.   Теорема Рисса о виде линейного непрерывного функционала в пространстве C[a,b].

Нерефлексивность пространства C[a,b].