МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» (НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)

УТВЕРЖДАЮ

____

"_____"_______________201_ г.

Рабочая программа дисциплины

Методы вычислений

Направление подготовки

010800 – Механика и математическое моделирование

Квалификация (степень) выпускника

Бакалавр

Форма обучения

Очная

Новосибирск 2014

Аннотация рабочей программы

Дисциплина «Методы вычислений» входит в Базовую часть естественнонаучного цикла ООП по направлению подготовки «**Ошибка! Источник ссылки не найден.**», все профили подготовки. Дисциплина реализуется на Механико-математическом факультете Новосибирского государственного университета кафедрой Математического моделирования ММФ НГУ.

Содержание дисциплины охватывает широкий круг вопросов, связанных с общими принципами изучаемого предмета, общими требованиями к вычислительным методам; с приемами и примерами построения и анализа численных методов для уравнений математической физики.

Дисциплина нацелена на формирование общекультурных компетенций ОК-1, ОК-2, ОК-4, ОК-6, ОК-7, ОК-8, ОК-10, ОК-11, профессиональных компетенций ПК-1, ПК-2, ПК-3, ПК-4, ПК-5, ПК-7, ПК-8, ПК-9, ПК-10, ПК-11, ПК-14, ПК-15, ПК-20 – ПК-23 выпускника.

Преподавание дисциплины предусматривает следующие формы организации учебного процесса: лекции, практические занятия, контрольные работы, лабораторные работы, самостоятельная работа студента, экзамены.

Программой дисциплины предусмотрены следующие виды контроля: текущий контроль успеваемости в форме контрольной работы, промежуточный контроль в форме зачета. Формы рубежного контроля определяются решениями Ученого совета, действующими в течение текущего учебного года.

Общая трудоемкость дисциплины составляет 10 зачетных единиц, 368 академических часа (из них 198 аудиторных). Программой дисциплины предусмотрены 72 часов лекционных, 72 часов семинарских занятий и 54 часов лабораторных работ, а также 170 часов самостоятельной работы студентов. Остальное время – различным формам контроля успеваемости.

1. Цели освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины «Методы вычислений» является обучение студентов теоретическим основам и практическим методам приближенного решения задач математической физики, свойствам этих методов и их особенностям.

Достижение поставленной цели осуществляется путем чтения лекций, посвященных теоретическим основам приближенных методов, проведением семинарских занятий, подкрепляющих лекции за счет решения задач, тщательно подобранных по каждой теме, и выполнением лабораторных работ, нацеленных на реализацию на компьютере алгоритмов, изученных на лекциях и семинарских занятиях.

В курсе излагаются общие принципы изучаемого предмета, рассматриваются общие требования построения наиболее используемых в практике конечно-разностных и конечно-элементных схем для решения типичных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, подходы к разработке программ, реализующих типичные численные алгоритмы, грамотному представлению и правильной интерпретации результатов расчетов на ЭВМ. Представляемые слушателям универсальные методологические подходы, позволяют безотносительно к конкретным проблемам строить адекватные численные методы решения математических задач.

2. Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата

Дисциплина «Методы вычислений**Ошибка! Источник ссылки не найден.**» входит в Базовую часть естественнонаучного цикла ООП по направлению подготовки «010800 – Механика и математическое моделирование», все профили подготовки.

Дисциплина «Методы вычислений**Ошибка! Источник ссылки не найден.**» опирается на следующие дисциплины данной ООП:

- Математический анализ (дифференциальное, интегральное исчисление);
- Высшая алгебра (теория матриц);
- Дифференциальная геометрия (тензорный анализ);
- Дифференциальные уравнения;

- Теоретическая механика.

Результаты освоения дисциплины «Математическое моделирование» используются в следующих дисциплинах данной ООП:

- Механика сплошных сред: жидкости и газы;
- Механика сплошных сред: твердое тело;
- Математические модели механики сплошных сред;
- Волны в сплошной среде;
- Механика разрушений;
- Геофизическая гидродинамика;
- Уравнения Навье-Стокса;
- Нелинейные задачи механики твердого тела и методы их решения.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины «Математическое моделирование»

- общекультурные компетенции: ОК-1, ОК-2, ОК-4, ОК-6, ОК-7, ОК-8, ОК-10, ОК-11;
- профессиональные компетенции: ПК-1, ПК-2, ПК-3, ПК-4, ПК-5, ПК-7, ПК-8, ПК-9, ПК-10, ПК-11, ПК-14, ПК-15, ПК-20 – ПК-23.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

- иметь представление о различных численных методах решения задач математической физики, свойствах этих методов и их особенностях;
- знать наиболее используемые в практике конечно-разностные и конечно-элементные схемы для решения типичных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных;
- уметь разрабатывать программы, реализующие типичные численные алгоритмы, уметь грамотно представлять и правильно интерпретировать результаты расчетов на ЭВМ.

4. Структура и содержание дисциплины (модуля) «Методы вычислений»

Общая трудоемкость дисциплины составляет 10 зачетных единицы, 368 часов.

Наименование разделов	Количество часов				
	Лекции	Семинары	Лабор. работы	Самост. работа	Всего часов
Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений	16	16	8	30	70
Численные методы решения краевых задач для ОДУ	12	12	14	34	72
Разностные схемы для уравнений параболического типа	18	18	10	40	86
Численные методы решения задач для уравнений эллиптического типа	12	10	12	30	64
Разностные схемы для уравнений гиперболического типа	14	16	10	36	76
Итого по курсу:	72	72	54	170	368

5. Образовательные технологии

Используется традиционная система обучения, включающая лекции, семинарские занятия и лабораторные работы.

Лекционный материал включает в себя все темы, перечисленные в структуре курса. Курс в существенной степени основан на классических и оригинальных работах, выполняемых в течение ряда лет в лабораториях ИВТ СО РАН и связанных с темой «Методы вычислений». Изложение лекций предполагает диалог со слушателями. В начале каждой лекции выделяется 5 минут для напоминания содержания предыдущей лекции и ответов на вопросы студентов. В конце лекции также выделяется 5 минут для ответов на вопросы по текущему материалу. Лекции изданы в виде пособий, что позволяет бакалавру тщательно прорабатывать лекционный материал. Дополнительно студент может получить разъяснения преподавателя по электронной почте.

Лекционное изложение материала сочетается с проведением семинарских занятий и лабораторных работ.

Самостоятельная работа бакалавра состоит в выполнении домашних заданий, подкрепляющих лекционный материал, с обязательным последующим контролем преподавателем.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.

Самостоятельная работа студентов включает в себя: теоретическое освоение лекционного курса, практическое выполнение заданий на семинарах и лабораторных занятиях.

Для выполнения самостоятельной работы студентам обеспечивается доступ к информационным ресурсам курса, которые включают в себя а) описание семинарских занятий, б) примерный список вопросов для самостоятельной проверки знаний и подготовки к экзамену, в) список литературы, включающий книги, журналы.

Контролирующие материалы включают набор заданий для самостоятельной работы, списки вопросов для сдачи экзамена.

6.1. Содержание разделов и тем лекций.

Математические модели и вычислительный эксперимент. Классификация уравнений математической физики. Примеры корректных постановок задач для различных типов уравнений. Математические модели, численные методы и вычислительный эксперимент.

Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Метод степенных рядов. Метод Эйлера. Глобальная погрешность метода Эйлера. Модифицированный метод Эйлера. Одношаговые методы. Методы Рунге-Кутты. Многошаговые методы. Явные методы Адамса. Достоинства и недостатки явных методов Адамса в сравнении с методами Рунге-Кутты. Неявные методы Адамса. Реализация неявного метода Адамса 4-го порядка с помощью итерационного метода прогноза - коррекции, сходимость итераций. Конечно-разностные методы. Сетки и сеточные функции. Различные способы приближения первой производной. Оператор проектирования. Локальная аппроксимация дифференциального оператора разностным оператором. Метод неопределенных коэффициентов. Аппроксимация дифференциальной задачи разностной схемой. Порядок аппроксимации. Устойчивость разностной схемы. Сходимость и точность разностной схемы. Теорема о сходимости. Каноническая форма разностной схемы. Достаточный признак устойчивости линейной разностной схемы. Необходимый признак устойчивости линейной разностной схемы. Теорема о необходимом спектральном признаке ограниченности норм степеней оператора перехода. Представление решений разностных задач для однородных разностных уравнений первого и второго порядков. Необходимый признак устойчивости разностной схемы с постоянными коэффициентами, основанный на исследовании корней характеристического уравнения. Оценки постоянной, входящей в условие устойчивости.

Исследование устойчивости нелинейных разностных схем. Численное решение жестких систем дифференциальных уравнений. Выбор шага интегрирования.

Численные методы решения краевых задач для ОДУ. Метод стрельбы. Пример вычислительной неустойчивости метода стрельбы. Конечно-разностные методы решения краевых задач для ОДУ второго порядка. Теорема об устойчивости линейной разностной схемы с разностным уравнением второго порядка. Принцип максимума. Лемма о мажоранте для решения разностной задачи. Теорема о сходимости разностной схемы, аппроксимирующей краевую задачу для ОДУ второго порядка. Разностный метод решения нелинейных краевых задач. Теорема о достаточном условии сходимости нелинейной разностной схемы. Метод последовательных приближений для решения нелинейных разностных задач. Скалярные произведения и нормы пространств сеточных функций. Формулы разностного дифференцирования и суммирования по частям. Первая и вторая разностные формулы Грина. Неравенство Коши - Буняковского и ε-неравенство. Сеточные теоремы вложения. Нижняя и верхняя оценки нормы $\|y_{\bar{x}}\|$. Разностная задача на собственные значения. Собственные значения и собственные функции оператора второй разностной производной. Оценки собственных значений. Ортонормированность системы собственных функций. Разложение сеточной функции в конечный ряд Фурье. Сеточный аналог равенства Парсеваля. Самосопряженность и положительная определенность оператора второй разностной производной. Свойства оператора второй разностной производной с переменным коэффициентом. Метод энергетических неравенств и метод операторных неравенств получения априорных оценок решений разностных схем. Использование оценок для доказательства сходимости схем в среднеквадратичной и равномерной нормах. Сходимость в среднем и равномерная сходимость разностной схемы для стационарного уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами. Метод адаптивных сеток. Понятие проекционных методов (на примере краевых задач для ОДУ). Метод Галеркина. Метод конечных элементов.

Разностные схемы для уравнений параболического типа. Уравнение теплопроводности с постоянными коэффициентами. Двухслойная схема с весом. Порядок аппроксимации при различных значениях весового параметра. Устойчивость двухслойных схем по начальным данным и по правой части. Принцип максимума. Теорема об устойчивости в равномерной норме линейной разностной схемы, удовлетворяющей принципу максимума. Примеры условно и абсолютно устойчивых схем. Спектральный признак устойчивости разностных схем. Принцип замороженных коэффициентов. Метод разделения переменных с представлением решения в виде конечного ряда Фурье. Применение метода Фурье при исследовании устойчивости разностных схем для одномерного уравнения теплопроводности. Метод энергетических неравенств. Теорема о сходимости схемы с весами в равномерной норме. Каноническая форма двухслойных схем. Метод операторных неравенств. Теорема о необходимом и достаточном условии устойчивости по начальным данным в пространстве H_A. Необходимое и достаточное условие устойчивости схемы с весами. Консервативная схема для уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности. Интегро-интерполяционный метод получения разностных уравнений. Теорема об устойчивости консервативной схемы. Дивергентные схемы. Лемма о неконсервативности недивергентной схемы. Трехслойные схемы для уравнения теплопроводности. Понятие условной аппроксимации. Способы задания дополнительного начального условия для трехслойных схем. Схемы для параболических уравнений с несколькими пространственными переменными. Свойства двумерного разностного оператора Лапласа Λ. Самосопряженность и положительная определенность оператора $A=-\Lambda$. Устойчивость в среднеквадратичной норме схем для многомерного уравнения теплопроводности. Необходимое и достаточное условие устойчивости в H_A схемы с весами для двумерного уравнения теплопроводности. Экономичные разностные схемы. Схема приближенной факторизации (СПФ). Устойчивость и порядок аппроксимации СПФ. Реализация СПФ для двумерной задачи методом дробных шагов. Граничные условия для вспомогательных функций. Экономичность СПФ. Выполнение для СПФ свойства полной аппроксимации. Обобщение на трехмерный случай.

Схема переменных направлений (СПН). Экономичность СПН. Погрешность аппроксимации и устойчивость СПН. Граничные значения промежуточного решения. Обобщение СПН на трехмерный случай.

Численные методы решения задач для уравнений эллиптического типа. Конечно-разностные схемы на равномерной сетке для уравнения Пуассона. Аппроксимация. Принцип максимума. Устойчивость. Сходимость. Итерационные методы решения систем разностных уравнений. Понятие о методе установления для решения стационарных задач. Сходимость явного метода простой итерации и итерационного метода переменных направлений. Оптимальное значение итерационного параметра. Оценка минимального количества шагов итерационного метода для получения заданной относительной погрешности. Попеременно-треугольный итерационный метод. Конечно-разностные схемы на неравномерной сетке для многомерного уравнения Пуассона. Уравнения для координат узлов неравномерной сетки. Метод конечных элементов. Симплициальное разбиение области. Определение конечного элемента. Построение сеточных уравнений.

Разностные схемы для уравнений гиперболического типа. Определения гиперболической системы уравнений и ее характеристик. Задача Коши и начально-краевая задача для гиперболической системы уравнений. Инварианты Римана. Начально-краевая задача для волнового уравнения. Явная противопоточная схема, схема Лакса и схема Лакса – Вендроффа для уравнения переноса. Схема "крест" и трехслойная неявная схема с весами для волнового уравнения. Дифференциальное представление разностной схемы. П-форма дифференциального представления. Первое дифференциальное приближение разностной схемы. Аппроксимационная вязкость, численная диссипация и численная дисперсия разностной схемы. Разностные схемы, сохраняющие монотонность. Необходимое и достаточное условие сохранения монотонности. Нелинейное уравнение переноса. Механизм возникновения разрывов. Расчет разрывных решений. Консервативная разностная схема. Схема С.К. Годунова. TVD-схемы. Схема предиктор-корректор на подвижной сетке. Разностные схемы для гиперболической системы уравнений. Разностные схемы для двумерного уравнения переноса.

6.2. Темы семинарских занятий.

1. Метод степенных рядов и метод Эйлера для ОДУ.
2. Локальная и глобальная погрешность численных методов для ОДУ.
3. Методы Рунге-Кутта и Адамса. Правило Рунге контроля локальной погрешности одношаговых методов.
4. Конечно-разностные методы. Равномерные и неравномерные сетки. Метод неопределенных коэффициентов. Погрешность аппроксимации дифференциального оператора и дифференциального уравнения.
5. Конечно-разностная аппроксимация дифференциальной задачи.
6. Каноническая форма разностной схемы. Достаточные условия устойчивости и сходимость разностной схемы.
7. Необходимые условия устойчивости разностной схемы. Оценки снизу и сверху постоянной, входящей в условие устойчивости.
8. Представление решений разностных задач Коши для однородных разностных уравнений первого и второго порядков с постоянными коэффициентами. Оценка точности численного решения.
9. Исследование устойчивости нелинейных разностных схем, аппроксимирующих задачу Коши для ОДУ.
10. Численное решение задачи Коши для жесткой системы ОДУ.
11. Собственные значения и собственные функции операторов разностных краевых задач для ОДУ.
12. Метод Фурье для решения разностных краевых задач для ОДУ.

13. Метод операторных неравенств получения априорных оценок решений разностных схем. Использование априорных оценок для доказательства сходимости схем в среднеквадратичной и равномерной нормах.

14. Метод адаптивных сеток для решения краевых задач для ОДУ.

15. Метод конечных элементов для решения краевых задач для ОДУ.

16. Порядок аппроксимации одномерного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами.

17. Конечно-разностная аппроксимация начально-краевой задачи для одномерного уравнения теплопроводности.

18. Конечно-разностная аппроксимация начально-краевой задачи для одномерного уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами. Интегроинтерполяционный метод.

19. Консервативные схемы.

20. Спектральный метод Неймана исследования устойчивости разностных схем для одномерного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами.

21. Принцип максимума для исследования устойчивости разностных задач для уравнения теплопроводности.

22. Исследование устойчивости разностных схем методом операторных неравенств.

23. Решение разностных задач методом Фурье.

24. Экономичные разностные схемы для параболических уравнений с несколькими пространственными переменными. Аппроксимация, устойчивость, сходимость, реализация.

25. Конечно-разностные схемы численного решения краевых задач для уравнения Пуассона.

26. Свойство полной аппроксимации. Метод установления. Итерационные методы решения разностной задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

27. Порядок аппроксимации разностных схем для уравнения переноса.

28. Исследование устойчивости разностных схем для уравнений гиперболического типа. Принцип максимума, спектральный метод Неймана.

29. Первое дифференциальное приближение разностных схем для уравнения переноса с постоянным коэффициентом.

30. Схемы для расчета разрывных решений. Консервативная разностная схема для нелинейного уравнения переноса. Схема С.К. Годунова.

31. Схемы, сохраняющие монотонность. TVD-схемы.

32. Разностные схемы для гиперболической системы уравнений.

6.3. Темы практических занятий на ЭВМ.

1. Одношаговые и многошаговые методы решения задачи Коши для ОДУ и систем ОДУ.

2. Метод стрельбы и конечно-разностные методы решения краевых задач для ОДУ второго порядка.

3. Метод адаптивных сеток и метод конечных элементов решения краевых задач для ОДУ второго порядка.

4. Разностные схемы решения начально-краевых задач для уравнения теплопроводности с одной пространственной переменной.

5. Итерационные методы решения разностной задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

6. Конечно-разностные схемы для уравнений гиперболического типа и гиперболических систем уравнений первого порядка.

6.4. Перечень примерных контрольных вопросов и заданий для самостоятельной работы

1. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод степенных рядов. Метод Эйлера. Методы Рунге-Кутты. Многошаговые методы. Конечно-разностные методы. Метод неопределенных коэффициентов. Порядок аппроксимации. Устойчивость разностной схемы. Сходимость и точность разностной схемы.

Теорема о сходимости. Достаточный признак устойчивости линейной разностной схемы. Необходимый признак устойчивости линейной разностной схемы.

2. Численные методы решения краевых задач для ОДУ. Метод стрельбы. Конечно-разностные методы решения краевых задач для ОДУ второго порядка. Разностный метод решения нелинейных краевых задач. Собственные значения и собственные функции оператора второй разностной производной. Разложение сеточной функции в конечный ряд Фурье. Метод адаптивных сеток. Метод конечных элементов.

3. Разностные схемы для уравнений параболического типа. Двухслойная схема с весами. Порядок аппроксимации при различных значениях весового параметра. Принцип максимума. Спектральный признак устойчивости разностных схем. Представление решения в виде конечного ряда Фурье. Каноническая форма двухслойных схем. Метод операторных неравенств. Теорема о необходимом и достаточном условии устойчивости по начальным данным. Консервативная схема для уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности. Дивергентные схемы. Трехслойные схемы для уравнения теплопроводности. Понятие условной аппроксимации. Схемы для параболических уравнений с несколькими пространственными переменными. Экономичные разностные схемы.

4. Численные методы решения задач для уравнений эллиптического типа. Конечно-разностные схемы на равномерной сетке для уравнения Пуассона. Аппроксимация. Принцип максимума. Устойчивость. Сходимость. Итерационные методы решения систем разностных уравнений. Понятие о методе установления для решения стационарных задач. Сходимость явного метода простой итерации и итерационного метода переменных направлений. Конечно-разностные схемы на криволинейных сетках для многомерного уравнения Пуассона. Метод конечных элементов.

5. Разностные схемы для уравнений гиперболического типа. Понятие гиперболической системы уравнений и ее характеристик. Задача Коши и начально-краевая задача для гиперболической системы уравнений. Инварианты Римана. Явная противопоточная схема, схема Лакса и схема Лакса – Вендроффа для уравнения переноса. Схема "крест" и трехслойная неявная схема с весами для волнового уравнения. Первое дифференциальное приближение разностной схемы. Аппроксимационная вязкость, численная диссипация и численная дисперсия разностной схемы. Разностные схемы, сохраняющие монотонность. Консервативные разностные схемы. TVD-схемы. Схемы на подвижных сетках.

6.5. Примерный перечень вопросов на экзаменах.

6.5.1. **Экзамен после 5-го семестра.**

1. Метод степенных рядов. Вывод. Формулы для метода степенных рядов с локальной погрешностью вычисления $O(h^2)$, $O(h^3)$, $O(h^4)$.

2. Метод Эйлера. Локальная погрешность метода Эйлера. Теорема о глобальной погрешности метода Эйлера.

3. Модифицированный метод Эйлера. Расчетные формулы модифицированного метода Эйлера, две модификации. Локальная погрешность модифицированного метода Эйлера. Сравнение метода степенных рядов и модифицированного метода Эйлера по вычислительным затратам.

4. Методы Рунге-Кутты. Определение одношаговых методов. Модифицированные методы Эйлера как частный случай методов Рунге - Кутты. Вычисление коэффициентов формул методов Рунге-Кутты с локальной погрешностью $O(h^3)$ и $O(h^4)$. Привести (без доказательства) формулы четырехстадийного метода Рунге - Кутта, имеющего локальную погрешность порядка $O(h^5)$.

5. Явные методы Адамса. Определение явных многошаговых методов. Вывод формулы явного методы Адамса с глобальной погрешностью $O(h^2)$. Привести (без доказательства)

формулы явных методов Адамса с глобальной погрешностью $O(h^3)$ и $O(h^4)$. Достоинства и недостатки явных методов Адамса в сравнении с методами Рунге - Кутты.

6. Неявные методы Адамса. Определение неявных многошаговых методов. Вывод формулы неявного метода Адамса с глобальной погрешностью $O(h^2)$. Привести (без доказательства) формулы неявного метода Адамса с глобальной погрешностью 4-го порядка. Реализация неявного метода Адамса 4-го порядка с помощью итерационного метода прогноз - коррекция. Доказательство сходимости итераций.

7. Погрешность аппроксимации дифференциального оператора (локальная). Различные способы приближения первой производной: двухточечная направленная вперед разность, двухточечная направленная назад разность, центральная разность, трехточечная направленная вперед разность, трехточечная направленная назад разность. Оператор проектирования $U \to U_h$. Определение локальной аппроксимации дифференциального оператора разностным оператором. Примеры аппроксимации дифференциального оператора первой производной.

8. Метод неопределенных коэффициентов. Аппроксимация дифференциального оператора первой производной разностным оператором с порядком $O(h^p)$. Примеры для $p=1$ и $p=2$. Аппроксимация производных порядка выше первого.

9. Аппроксимация дифференциальной задачи разностной схемой. Запись дифференциальной задачи и соответствующей ей разностной задачи в операторном виде $Ly = f$ и $L_h y_h = f_h$. Определение погрешности аппроксимации разностной схемы. Определение величины погрешности аппроксимации. Согласованные нормы. Равномерная (локальная, кубическая) норма в U_h. Среднеквадратичная (сферическая) норма в U_h. Определение аппроксимации и порядка аппроксимации дифференциальной задачи разностной схемой. Примеры аппроксимирующих разностных схем.

10. Устойчивость разностной схемы. Определение устойчивости разностной схемы $L_h y_h = f_h$ с произвольным разностным оператором L_h, в общем случае нелинейным. Определение устойчивости разностной схемы с линейным оператором L_h. Равносильность определений устойчивости в случае линейного оператора L_h.

11. Сходимость разностной схемы. Определение сходимости и точности разностной схемы. Пример сходящейся разностной схемы. Теорема Лакса. Сходимость метода Эйлера для задачи Коши.

12. Каноническая форма разностной схемы. Каноническая форма в случае разностного уравнения первого порядка. Коэффициент перехода R_h. Каноническая форма в случае системы разностных уравнений первого порядка. Оператор перехода R_h. Каноническая форма в случае разностного уравнения второго порядка.

13. Достаточный признак устойчивости линейной разностной схемы для задачи Коши. Теорема о достаточном признаке устойчивости линейной разностной схемы. Лемма о достаточном условии равномерной по h ограниченности норм степеней оператора R_h. Примеры устойчивых схем. Лемма о норме матричного оператора.

14. Необходимый признак устойчивости линейной разностной схемы для задачи Коши. Теорема о необходимом признаке устойчивости линейной разностной схемы. Теорема о необходимом спектральном признаке ограниченности норм степеней оператора перехода. Пример неустойчивой схемы.

15. Необходимый признак устойчивости разностной схемы с постоянными коэффициентами, основанный на исследовании корней характеристического уравнения. Определение характеристического уравнения для разностного уравнения. 3 леммы о решениях разностных задач для разностных уравнений второго порядка. Необходимое условие

устойчивости разностной схемы с постоянными коэффициентами. Примеры устойчивой и неустойчивой схем.

16. Оценки снизу и сверху для постоянной, входящей в условие устойчивости. Теорема о достаточном признаке устойчивости линейной разностной схемы (без доказательства). Теорема о необходимом признаке устойчивости линейной разностной схемы (с доказательством). Примеры оценок.

17. Исследование устойчивости нелинейных разностных схем. Переход к линейной модельной задаче. Устойчивость модифицированного метода Эйлера. Устойчивость метода Адамса второго порядка.

18. Численное решение жестких систем дифференциальных уравнений. Определение жесткой системы линейных дифференциальных уравнений. Ограничения на шаг интегрирования h при использовании явного метода Эйлера. Устойчивость неявного метода Эйлера.

19. Метод стрельбы для решения краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка. Краевая задача. Схема доказательства теоремы о существовании решения краевой задачи. Решение основного уравнения метода стрельбы методом деления отрезка пополам, методом Ньютона (касательных), методом хорд. Пример вычислительной неустойчивости метода стрельбы.

20. Конечно - разностные методы решения краевых задач. Конечно-разностные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Определения сходимости, аппроксимации и устойчивости. Формулировка теоремы Лакса (без доказательства). Теорема об устойчивости линейной разностной схемы с разностным уравнением второго порядка. Пример на применение теоремы Лакса и сходимости разностной схемы.

21. Оценка решения разностной краевой задачи с помощью принципа максимума. Лемма (принцип максимума). Лемма о мажоранте для решения разностной задачи.

22. Использование принципа максимума при исследовании сходимости разностных схем. Теорема о сходимости разностной схемы, аппроксимирующей краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

23. Разностный метод решения нелинейной краевой задачи. Теорема о достаточном условии сходимости разностной схемы со вторым порядком в равномерной норме.

24. Метод последовательных приближений для получения решения нелинейной разностной задачи. Теорема о достаточных условиях сходимости метода последовательных приближений.

25. Разностные тождества и неравенства. Скалярные произведения и нормы. Формулы разностного дифференцирования. Формулы суммирования по частям. Первая формула Грина. Вторая формула Грина. Неравенство Коши-Буняковского. ε-неравенство.

26. Сеточный аналог теоремы вложения.

27. Нижняя и верхняя оценки нормы $\| y_{\bar{x}}]|$.

28. Собственные значения и собственные функции оператора второй разностной производной. Задача на собственные значения, ее решение. Лемма об оценках собственных значений. Лемма об ортогональности собственных функций. Лемма об ортонормированности системы собственных функций. Лемма о разложении сеточной функции в конечный ряд Фурье. Сеточный аналог равенства Парсеваля.

29. Свойства оператора второй разностной производной. Теорема о самосопряженности и положительной определенности оператора второй разностной производной. Теорема о свойствах оператора второй разностной производной с переменными коэффициентами.

30. Метод энергетических неравенств получения априорных оценок решений разностных схем. Пример получения априорной оценки для решения разностной краевой задачи. Оценки в среднеквадратичной и равномерной нормах. Использование оценок для доказательства сходимости схемы.

31. Метод операторных неравенств получения априорных оценок решений разностных схем. Априорная оценка в случае положительно определенного разностного оператора.

Использование оценки для доказательства сходимости схемы. Априорная оценка в случае самосопряженного положительного разностного оператора.

32. Разностная схема для стационарного уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами. Построение схемы второго порядка аппроксимации с самосопряженным и положительно определенным оператором. Сходимость в среднем и равномерная сходимость построенной схемы.

33. Метод адаптивных сеток на примере краевых задач для стационарного уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами. Схема на неравномерной сетке. Сходимость в среднем и равномерная сходимость построенной схемы. Пример схемы на неравномерной сетке четвертого порядка точности. Метод эквираспределения для построения неравномерной сетки. Принцип эквираспределения в разностной форме. Итерационный алгоритм метода адаптивных сеток.

34. Проекционные методы на примере краевых задач для стационарного уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами. Метод Галеркина. Метод конечных элементов. Порядок точности метода конечных элементов.

6.5.2. **Экзамен после 6-го семестра.**

1. Схема с весами для решения начально-краевой задачи для одномерного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами. Определение аппроксимации. Погрешность аппроксимации при различных значениях весового параметра.

2. Принцип максимума. Определение. Теорема об устойчивости в равномерной норме линейной разностной схемы, удовлетворяющей принципу максимума. Примеры условно и абсолютно устойчивых схем для одномерного уравнения теплопроводности.

3. Спектральный признак устойчивости Неймана для разностных схем, аппроксимирующих одномерное уравнение теплопроводности. Вывод. Пример.

4. Метод разделения переменных с представлением решения в виде конечного ряда Фурье. Разложение решения разностной задачи для одномерного однородного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами в конечный ряд Фурье. Определение устойчивости схемы по начальным данным. Лемма об устойчивости схемы с весами по начальным данным в среднеквадратичной норме. Следствия.

5. Применение метода Фурье при исследовании устойчивости разностных схем для одномерного уравнения теплопроводности. Определение устойчивости схемы по правой части. Лемма о достаточном условии устойчивости по правой части схемы с весами. Теорема об устойчивочти схемы с весами в среднеквадратичной норме по начальным данным и по правой части.

6. Метод энергетических неравенств. Лемма о достаточном условии устойчивости схемы с весами по начальным данным в энергетической норме $\| y_{\bar{x}}]|$.

7. Использование метода энергетических неравенств для доказательства сходимости схемы с весами. Лемма о достаточном условии устойчивости схемы с весами по правой части в равномерной сеточной норме. Теорема о сходимости схемы с весами в равномерной норме.

8. Равномерная устойчивость схемы по начальным данным. Каноническая форма двухслойных схем. Определение устойчивости двухслойных схем по начальным данным. Определение равномерной устойчивости двухслойных схем по начальным данным. Теорема о необходимом и достаточном условии равномерной устойчивости схемы по начальным данным. Достаточный признак равномерной устойчивости. Теорема о равномерной устойчивости по начальным данным схемы, устойчивой по начальным данным.

9. Устойчивость схемы. Определение устойчивости двухслойных схем по начальным данным и по правой части. Теорема о достаточности условия равномерной ограниченности операторов перехода для устойчивости схемы по начальным данным и правой части. Теорема об устойчивости по правой части схемы, равномерно устойчивой по начальным данным. Теорема о необходимости и достаточности устойчивости схемы по начальным данным для ее устойчивости по правой части.

10. Метод операторных неравенств. Определение устойчивости с постоянной ρ по начальным данным в пространстве H_A. Теорема о необходимом и достаточном условии устойчивости с постоянной ρ по начальным данным в пространстве H_A.

11. Применение метода операторных неравенств для исследования устойчивости схемы с весами. Необходимое и достаточное условие устойчивости схемы с весами в общем случае. Необходимое и достаточное условие устойчивости схемы с весами для уравнения теплопроводности.

12. Консервативная схема для уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности. Интегральный закон сохранения тепла (интегральное уравнение баланса тепла). Дискретное уравнение баланса тепла для элементарной ячейки. Интегро-интерполяционным метод получения разностных уравнений. Дискретный закон сохранения в составной области. Определение консервативной разностной схемы. Теорема об устойчивости консервативной схемы. Сходимость консервативной схемы.

13. Дивергентные схемы. Определение. Пример, показывающий совпадение консервативной и дивергентной схем. Недивергентные схемы. Лемма о неконсервативности недивергентной схемы.

14. Трехслойные схемы для уравнения теплопроводности. Схема Ричардсона. Аппроксимация, устойчивость. Схема Дюфорта - Франкела. Аппроксимация, устойчивость, понятие условной аппроксимации. Неявная трехслойная схема. Аппроксимация, устойчивость. Способ задания дополнительного начального условия для трехслойных схем.

15. Схемы для многомерного уравнения теплопроводности. Первая начально-краевая задача для многомерного уравнения теплопроводности. Явная, чисто неявная схемы и схема Кранка -- Николсона для двумерного уравнения теплопроводности. Порядок аппроксимации указанных схем.

16. Спектральный признак устойчивости Неймана для разностных схем, аппроксимирующих многомерное уравнение теплопроводности. Применение признака на примере явной схемы для многомерного уравнения теплопроводности.

17. Свойства двумерного разностного оператора Лапласа. Вывод формул для собственных функций и собственных значений оператора $A = -\Lambda$. Полнота системы собственных функций оператора A. Представление функции $u \in H_h$ в виде конечного ряда Фурье. Лемма о самосопряженности и положительной определенности оператора $A = -\Lambda$.

18. Устойчивость в среднеквадратичной норме явной схемы для многомерного уравнения теплопроводности. Теорема о достаточном условии устойчивости явной двумерной схемы по начальным данным и правой части в среднеквадратичной норме.

19. Применение метода операторных неравенств для исследования устойчивости многомерных разностных схем. Вывод необходимого и достаточного условия устойчивости в H_A схемы с весами для двумерного уравнения теплопроводности.

20. Сходимость явного метода простой итерации. Понятие о методе установления для решения стационарных задач. Теорема о сходимости явного метода простой итерации и оптимальном значении итерационного параметра. Оценка минимального количества шагов итерационного метода для получения заданной относительной погрешности.

21. Экономичные разностные схемы. Определение экономичной разностной схемы. Экономичность явной схемы для многомерного уравнения теплопроводности и причина ее практической непригодности. Практическая пригодность неявных схем для многомерного уравнения теплопроводности и причина их неэкономичности (на примере схемы Кранка - Николсона).

22. Схема приближенной факторизации (СПФ). Определение СПФ. Лемма об устойчивости СПФ. Погрешность аппроксимации СПФ (на примере СПФ, построенной на основе схемы Кранка - Николсона).

23. Метод дробных шагов для СПФ. Реализация СПФ для двумерной задачи методом дробных шагов. Граничные условия для вспомогательных функций. Экономичность СПФ. Выполнение для СПФ свойства полной аппроксимации. Обобщение на трехмерный случай.

24. Схема переменных направлений (СПН). Вывод формул СПН. Экономичность СПН. Аппроксимация и устойчивость СПН. Граничные значения промежуточного решения. Обобщение СПН на трехмерный случай.

25. Схема стабилизирующей поправки (ССП). Вывод формул ССП. Экономичность ССП. Аппроксимация и устойчивость ССП. Граничные значения промежуточного решения. Обобщение ССП на трехмерный случай.

26. Сходимость итерационного метода переменных направлений. Теорема о сходимости итерационного метода переменных направлений и оптимальном значении итерационного параметра. Оценка минимального количества шагов итерационного метода для получения заданной относительной погрешности. Сравнение с методом простой итерации.

27. Конечно-разностные схемы на неравномерной сетке для многомерного уравнения Пуассона. Метод эквираспределения для построения адаптивных сеток. Итерационные методы решения системы разностных уравнений для координат узлов неравномерной сетки.

28. Метод конечных элементов. Симплициальное разбиение области. Определение конечного элемента. Построение сеточных уравнений.

29. Гиперболические линейные системы дифференциальных уравнений первого порядка. Определения гиперболической системы уравнений и ее характеристик. Задача Коши для гиперболической системы уравнений. Начально-краевая задача для гиперболической системы уравнений. Инварианты Римана. Примеры начально-краевых задач для гиперболических уравнений (линейная модель мелкой воды, линейное уравнение переноса) и точные решения этих задач.}

30. Явная противопоточная схема. Теорема о достаточном условии устойчивости схемы в равномерной норме. Необходимое условие устойчивости противопоточной схемы. Явная противопоточная схема в случае уравнения переноса со знакопеременным коэффициентом $a(x,t)$.

31. Схема Лакса для уравнения переноса. Условная аппроксимация схемы Лакса. Необходимое условие устойчивости.

32. Схема Лакса - Вендроффа для уравнения переноса. Порядок аппроксимации. Необходимое условие устойчивости.

33. Диссипация и дисперсия. Анализ поведения гармоник, являющихся решениями уравнения переноса, уравнения с диссипативным членом и уравнения с дисперсионным членом. Качественное поведение решения задачи Коши для этих уравнений в случае, когда начальная функция имеет вид ступеньки.

34. Дифференциальное приближение разностной схемы. Дифференциальное представление явной противопоточной схемы. П-форма дифференциального представления разностной схемы. Первое дифференциальное приближение (п.д.п.) разностной схемы. Численная диссипация. П.д.п. разностной схемы Лакса – Вендроффа (без вывода). Численная дисперсия.

35. Свойство монотонности схем. Определение разностной схемы, сохраняющей монотонность. Теорема С.К. Годунова о необходимом и достаточном условии того, что разностная схема сохраняет монотонность. Показать, что противопоточная схема сохраняет монотонность, схема Лакса - Вендроффа - не сохраняет.

36. TVD-схемы. Определение TVD-схемы. Теорема Хартена о достаточном условии того, что разностная схема является TVD-схемой. Следствие о монотонности TVD-схемы. Показать, что противопоточная схема является TVD-схемой, а схема Лакса - Вендроффа не удовлетворяет достаточному условию теоремы А. Хартена.

37. Схема С.К. Годунова для нелинейного уравнения переноса и системы уравнений газовой динамики.

38. Схема предиктор-корректор на подвижной сетке для линейного уравнения переноса с одной пространственной переменной. Разностные схемы на адаптивных сетках для двумерного уравнения переноса.

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) Основная литература:

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. *Численные методы.* М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2007.
2. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. *Численные методы в задачах упражнений*. М.: Высшая школа. 2000.

3. Хакимзянов Г. С., Черный С. Г. *Методы вычислений. Часть 1. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений*. Новосибирск: Новосибирский госуниверситет, 2003.

4. Хакимзянов Г. С., Черный С. Г. *Методы вычислений. Часть 2. Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений*. Новосибирск: Новосибирский госуниверситет, 2005.

5 .Хакимзянов Г.С., Черный С.Г. *Методы вычислений. Часть 3. Численные методы решения задач для уравнений параболического и эллиптического типов.* Новосибирск: Новосибирский госуниверситет. 2008.

6 .Хакимзянов Г.С., Черный С.Г. *Методы вычислений. Часть 4. Численные методы решения задач для уравнений гиперболического типа*. Новосибирск: Новосибирский госуниверситет. 2014.

б) Дополнительная литература:

1. Азаров А.И., Монастырный П.И., Басик В.А. Сборник задач по методам вычислений. Минск: БГУ, 2007.

1. Бахвалов Н.С., Корнеев А.А., Чижонков Е.В. *Численные методы. Решения задач и упражнения.* М.: Дрофа. 2009.

2. Лебедев А. С., Черный С. Г. *Практикум по численному решению уравнений в частных производных*. Новосибирск: Новосибирский госуниверситет, 2000.

3. Миньков С.Л., Миньков Л.Л. *Основы численных методов.* Томск: Изд-во НТЛ, 2006.

4. Михайлов А.П. *Учебные задания вычислительной практики в компьютерном классе.* Новосибирск. Новосибирский госуниверситет. 2003.

5. Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Самарская Е.А. Задачи и упражнения по численным методам. М.: Эдиториал УРСС, 2000.

6. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. М.: Научный мир. 2003.

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Доска, мел.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО с учетом рекомендаций и ПрООП ВПО по направлению «**Ошибка! Источник ссылки не найден.**», все профили подготовки.

Автор: ____ ЧЕРНЫЙ Сергей Григорьевич

д.ф.-м.н., профессор ММФ НГУ

Рецензент (ы) ____

____

Программа одобрена на заседании ____

(Наименование уполномоченного органа вуза (УМК, НМС, Ученый совет)

от ___________ года, протокол № ________