

Аналитическая геометрия
Механико–математический факультет НГУ
К.В. Сторожук
2014-2015 уг

Введение. Векторы на плоскости и в пространстве. Сложение векторов. Нулевой вектор. Произведение вектора на число. Выбор системы координат.

Аксиомы векторного пространства Пространство \mathbb{R}^n .

Линейные комбинации. Линейная зависимость векторов. Базис векторного пространства. Теорема о замене. Размерность пространства. Координаты вектора. Изоморфизм n -мерного пространства пространству \mathbb{R}^n . Координатный признак линейной зависимости векторов.

Размерность подпространства. Пересечение и сумма подпространств, связь размерностей. Прямая сумма. Параллельное проектирование. Линейная оболочка множества векторов.

Аксиомы скалярного произведения. Модуль вектора. Угол между векторами. Неравенство Коши — Буняковского. Неравенство треугольника. Ортонормированный базис. Метод ортогонализации Грама — Шмидта. Матрица Грама системы векторов. Ортогональное дополнение к подпространству. Метризованные пространства.

Сумма подмножеств векторного пространства. Произведение множества на число. Сдвиг множества на вектор. Аффинные подпространства. Размерность аффинного подпространства. Параллельные аффинные подпространства. Теорема об уравнении гиперплоскости. Параметрические уравнения прямой. Деление отрезка в данном отношении. Задание полупространства линейным неравенством. Расстояние от точки до подпространства.

Параметрическое задание аффинного подпространства. Координаты. Формулы перехода. Матрица перехода. Связь матрицы перехода с матрицей Грама. Ортогональность матрицы перехода между прямоугольными системами координат.

Непрерывные отображения в векторное пространство. Путь в множестве базисов, деформация базиса. Эквивалентность базисов. Критерий эквивалентности базисов. Ориентированные векторные пространства. Стандартная ориентация пространства \mathbb{R}^n .

Высота и основание параллелепипеда. Объем. Связь объемов с определителем матрицы перехода. Выражение объема через матрицу Грама. Приложения: площадь треугольника, расстояние от точки до подпространства.

Смешанное произведение векторов. Векторное произведение векторов. Связь смешанного и векторного произведений. Тождество "бац минус цаб тождество Якоби. Приложения: расстояние от точки до прямой; расстояние между скрещивающимися прямыми; диагональ, объем, двугранные углы параллелепипеда, теорема синусов сферической тригонометрии.

Линейные отображения. Ядро линейного отображения, размерность ядра и образа. Аффинные отображения. Координатная запись отображений. Переход к другим системам координат. Геометрический смысл определителя матрицы отображения. Неподвижные точки. Критерий единственности неподвижной точки. Собственные и несобственные аффинные преобразования.

Собственные векторы и собственные числа линейного отображения. Связь с собственными числами матрицы. Условия существования базиса из собственных векторов, вид отображения в этом базисе. Собственные подпространства. Свойства собственных векторов симметричного преобразования. Инвариантные подпространства. Инвариантные гиперплоскости аффинного отображения.

Аффинность изометрий. Сохранение углов. Ортогональность матрицы, задающей изометрию.

Устройство матриц из $O(2)$ и $SO(2)$. Геометрический смысл собственных и несобственных линейных изометрий плоскости. Классификация аффинных изометрий плоскости.

Существование инвариантного вектора у матрицы из $SO(3)$. Классификация аффинных изометрий пространства.

Углы Эйлера.

Кинематические кривые. Циклоида. Кардиоида.