МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» (НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)

УТВЕРЖДАЮ

____

"_____"_______________20__ г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

«Аналитическая геометрия»

НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ «010100 - МАТЕМАТИКА»

Квалификация (степень) выпускника
Бакалавр

Форма обучения очная

Новосибирск
2014

Программа дисциплины «Аналитическая геометрия» составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО к структуре и результатам освоения основных образовательных программ бакалавриата по «Профессиональному циклу. Дисциплины по выбору студента» по направлению подготовки «Математика», а также задачами, стоящими перед Новосибирским государственным университетом по реализации Программы развития НГУ.

Авторы:
Грешнов Александр Валерьевич, д.ф.- м.н., доцент по специальности «математический анализ».
Механико-математический факультет
Кафедра геометрии и топологии.

1. Цели освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины «Аналитическая геометрия» является подготовка квалифицированных студентов в области аналитической геометрии, владеющих методологией применения дисциплины в смежных областях математики и в прикладных задачах.

2. Место дисциплины в структуре магистерской программы

Дисциплина входит в число обязательных курсов профессионального цикла образовательной программы бакалавра. Изучение данной дисциплины основывается на курсах «Линейная алгебра», «Математический анализ», «Элементарная геометрия». Для освоения данного курса студент должен знать современные концепции линейной алгебры и математического анализа; владеть базовыми дефинициями и теоремами элементарной геометрии; должен освоить методологию построения алгебраических моделей, адекватно описывающих соотношения и взаимосвязи геометрических объектов. Студент должен уметь использовать основные законы естественнонаучных дисциплин для понимания преподаваемой дисциплины, иметь навыки работы с компьютером как средством управления и обработки информации. Знания, полученные при освоении дисциплины, являются фундаментальными для многих прикладных разделов математики и естествознания: дифференциальной геометрии, тензорного анализа, математического анализа, функционального анализа, математических моделей механики сплошных сред, компьютерной томографии, космогонии, компьютерной графики, приборостроении и машиностроении. Дисциплина является предшествующей для выполнения квалификационной работы бакалавра.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

Изучение дисциплины направлено на формирование следующих общекультурных компетенций ОК-1, ОК-2, ОК-3, ОК-4, ОК-5, ОК-6, ОК-7, ОК-8 и профессиональных компетенций ПК-1, ПК-2, ПК-4, ПКС-8, ПКС-9, ПКС-10, ПК-14 выпускника.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

- Знать: определения и формулировки основных утверждений следующих тем:

1. Метрическое пространство (мп): определение расстояния, определение метрического пространства, базовые примеры расстояний на R^n и их свойства.
2. Векторное пространство (вп): определение векторного пространства, линейная зависимость (линейная независимость) системы векторов, базис вп, размерность вп, система координат вп, подпространства вп, понятие изоморфизма для вп.
2. Аффинное пространство (ап): Определение аффинного пространства, изоморфизм ап, аффинная система координат, подпространства ап, размерность ап, параллельность векторных и аффинных подпространств, прямая, плоскость, k-мерная плоскость, гиперплоскость, формулы перехода в другую систему координат, отрезок, полуплоскость, полупространство, внутренняя и внешняя нормали.
3. Ориентация вп и ап: одноименные и разноименные базисы, согласованные базисы, понятия ориентации и деформации базисов.
4. Скобочная операция и скобка Ли: определения, векторное и смешанное произведения и форма ориентированного объема в 3-мерном вп как полилинейные кососимметрические отображения.
5. Евклидово пространство (еп): скалярное произведение, стандартное ориентированное евклидово пространство, стандартные ориентированные евклидовы плоскость и 3-мерное пространство, полярная система координат, определение синуса и косинуса, тригонометрические формулы косинуса и синуса суммы и разности, неравенства Коши- Буняковского, Минковского, матрица Грамма, метод ортогонализации Грама–Шмидта, изоморфность еп, ортогональное дополнение, ортогональная проекция вектора на подпространство, ортогональная проекция точки на подпространство в еп, расстояние от точки до k-мерной плоскости, смешанное произведение векторов, векторное произведение векторов, направляющие косинусы прямой, формулы расстояний от точки до прямой, от точки до гиперплоскости, между двумя скрещивающимися прямыми.
4. Аффинные отображения: линейные отображения векторных пространств, задание линейного

отображения в координатах, аффинные преобразования, формулы аффинного преобразования в аффинных системах координат, изометрические преобразования аффинных пространств, изометрические преобразования плоскости, изометрические преобразования трехмерного пространства, углы Эйлера.
5. Кривые: общее понятие кривой, плоские кривые, их параметрические и неявные задания, графики..
6. Кривые второго порядка: эллипс, гипербола, парабола (определение, свойства, хорды диаметры и сопряженные диаметры, асимптоты, уравнение в полярной системе координат, геометрические и оптические характеристики, касательные), конические сечения, приведение уравнения второго порядка к каноническому виду, классификация кривых второго порядка, уравнение сопряженного диметра кривой второго порядка, центр симметрии кривой второго порядка, оси симметрии, уравнение касательной, асимптоты, классификация.
7. Теория инвариантов для уравнений второго порядка: приведение многочлена второй степени от n переменных к простейшему виду ортогональным преобразованием, инварианты, полуинварианты, инварианты и полуинварианты при n=2,3, канонические уравнения поверхностей второго порядка.
8. Поверхности второго порядка: эллипсоид, однополостный гиперболоид, конус, эллиптический параболоид, гиперболический параболоид, цилиндр, касательный конус к алгебраической поверхности, уравнение касательной плоскости к поверхности второго порядка, сопряженная плоскость, прямолинейные образующие, цилиндрические поверхности, конические поверхности, поверхности вращения, центр симметрии поверхности второго порядка, плоскость симметрии поверхности второго порядка, плоскость сопряженная данному направлению, асимптотические направления, классификация поверхностей второго порядка. .
9. Проективная геометрия: проективные системы координат (пск), проективные преобразования, расширенное аффинное пространство, аффинно-проективные системы координат, проективные координаты на проективной прямой, двойное отношение, уравнение гиперплоскости в пск, кривые второго порядка на проективной плоскости, классификация, отношение инцидентности, принцип двойственности на проективной плоскости, теоремы Дезарга, Паппа--Паскаля и Паппа--Брианшона.

- Уметь: решать основные типы задач по следующим темам: Векторы, координаты вектора, скалярное произведение, аффинные координаты. Уравнение прямой, перпендикулярные прямые угол между прямыми, расстояние от точки до прямой. Уравнения плоскостей и прямых в пространстве. Взаимное расположение прямых и плоскостей, перпендикулярность прямых и плоскостей, углы между прямыми и плоскостями, расстояние от точки до плоскости. Векторное и смешанное произведения. Аффинные преобразования. Эллипс, гипербола, парабола. Инварианты.
Приведение уравнения кривой второго порядка к каноническому виду. Касательные, центр, диаметры кривых второго порядка. Приведение уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду. Цилиндры, конусы, эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды. Касательная плоскость. Прямолинейные образующие. Центр, диаметральные плоскости.
- Владеть: формализацией связей между геометрическими объектами на языке систем алгебраических уравнений и неравенств, анализом соответствующей алгебраической модели методами линейной алгебры и математического анализа и геометрической интерпретацией полученных результатов для решения широкого круга задач.

4. Структура и содержание дисциплины (модуля) «Аналитическая геометрия»

Общая трудоемкость дисциплины составляет 8 зачетных единиц, 276 часа.

№ п/п	Разделы дисциплины	Семестр	Недели семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (часы)				Контроль успеваемости (*по неделям семестра*). Промежуточная аттестация (*по семестрам*)
				Лекции	Семинары	Самост. работа	Экзамен	
1	МЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО. ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО	1	1-4	8	8	8		
2	АФФИННОЕ ПРОСТРАНСТВО	1	5-9	10	10	8		КР (9)
3	ОСНОВЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА	1	10-12	6	6	8		
4	ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА	1	13-18	12	12	10		КР (18)
		1	19					КР (19), ЗАЧЕТ
		1	20				36	ЭКЗАМЕН
5	КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА	2	1-4	8	8	8		
6	АФФИННЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ	2	5-7	6	6	8		
7	ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА	2	8-13	12	12	8		КР (8)
8	ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ	2	14-16	6	6	10		КР (16)
		2	17					КР (17)
		2	18				36	ЭКЗАМЕН
Всего часов				68	68	68	72	

А) Лекции
Раздел 1. (8 часов) Метрическое пространство. Векторное пространство.

Раздел 2. (10 часа) Аффинное пространство.

Раздел 3. (6 часа) Основы векторного анализа.

Раздел 4. (12 часов) Евклидовы пространства.

Раздел 5. (8 часов). Кривые второго порядка.

Раздел 6. (6 часов). Аффинные отображения.

Раздел 7. (12 часов). Поверхности второго порядка.

Раздел 8. (6 часов). Проективная геометрия.

Б) Семинары.

Номера задач указаны по задачнику Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002 г., 384 стр.**;** сдвоенная нумерация соответствует номерам из задачника Грешнов А.В., Малюгин С.А., Потапов В.Н. «Сборник задач и упражнений по математическому анализу. 2-й семестр», 2012. Новосибирск: Новосиб. гос ун-т. 250 с. 2-е издание.

Семестр 1.
1) Векторы: сложение, умножение на число, координаты. 1, 2, 4, 10, 17, 20, 21, 24, 29.
2) Расстояние, длина вектора. 65, 67, 68, 77; 22.20, 22.22--22.24, 22.33, 22.38.
3) Прямоугольные и аффинные координаты на плоскости и в пространстве. Радиус-вектор. 31, 37, 44, 52, 54.
4) Деление отрезка в данном отношении. 59, 80, 92, 94, 98.
5) Скалярное произведение векторов. Угол между векторами. 131, 141, 144, 145, 150--152, 154.
6) Уравнение прямой на плоскости. 363--365, 369, 370, 373, 375. Взаимное расположение 2-х прямых на плоскости. 384, 386, 389, 393, 387, 391, 394, 388.
7) Пучок прямых. 397--399. Расположение точек относительно прямых. 404--406, 408, 409, 412, 413.
8) Перпендикулярность прямых 421, 423, 425, 427. Угол между прямыми. Угол от одной прямой до другой. 432, 434, 440, 442, 446, 448.
9) Контрольная работа.
10) Расстояние от точки до прямой на плоскости. 470, 473, 454, 455, 469.
11) Уравнение прямых и плоскостей в пространстве. 491, 493, 497, 498, 500--504, 513, 516, 517, 520.
12) Взаимное расположение прямых и плоскостей. 532, 534, 539, 541, 543. Пучок плоскостей. 545, 547, 549.
13) Перпендикулярность прямых и плоскостей. 570, 574, 580--582, 585, 588~[МП].
14) Угол между прямыми и плоскостями. 593, 594, 597, 600, 601.
15) Расположение точек относительно плоскостей. 556--558, 594, 595.
16) Ориентация пространства. Векторное и смешанное произведения. Площадь треугольника и объем параллелепипеда. 157, 172, 175, 183, 190, 192--195.
17) Расстояние точек до прямых и плоскостей в пространстве. Расстояние между двумя прямыми. 609--611, 615, 618, 620, 621.
18) Контрольная работа.

Семестр 2.

1) Эллипс (759, 764, 787, 828, 853, 856, 863, 866).
2) Гипербола (759, 762, 769, 785, 794, 785, 864).
3) Парабола (760, 797—800, 803, 830, 867).
4) Аффинные преобразования (1156, 1158, 1160-1168, 1175-1178, 1181, 1234, 1236).
5, 6) Приведение уравнения кривой второго порядка к каноническому виду (807, 808, 809).
7) Касательные, центр, диаметры кривых второго порядка (860, 875, 879, 880, 883, 892, 834, 902, 914).
8) Контрольная работа.
9,10) Приведение уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду (1046, 1045, 1051, 1058).
11) Цилиндры, конусы, эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды (976, 993, 1002, 1021, 1022, 1098).
12) Касательная плоскость. Прямолинейные образующие (1076, 1078, 1079, 1084, 1085, 1086, 1089).
13) Центр, диаметральные плоскости (1104, 1105, 1106, 1107, 1109).
14) Проективная прямая (1290, 1292, 1305, 1307, 1309, 1324, 1325, 1327).
15) Проективная плоскость (1346, 1347, 1350, 1357, 1376, 1377, 1381, 1385, 1387).
16) Контрольная работа.

5. Образовательные технологии

Лекционный материал включает в себя все темы, перечисленные в структуре курса. Курс в существенной степени основан на оригинальных работах, методических разработках, выполняемых в течение ряда лет сотрудниками кафедры геометрии и топологии Новосибирского Государственного Университета, в лаборатории теории функций вещественных переменных Института Математики им. Соболева СО РАН. Изложение лекций предполагает диалог со слушателями. В начале каждой лекции выделяется 10 минут для напоминания содержания предыдущей лекции и ответов на вопросы студентов. В конце лекции также выделяется 10 минут для ответов на вопросы по текущему материалу и его обсуждения. Презентация каждой лекции пересылается бакалаврам по электронной почте и сопровождается списком вопросов, которые позволяют бакалавру проверить степень усвоения лекционного материала. Дополнительно студент может получить разъяснения преподавателя по электронной почте.

Лекционное изложения дисциплины дополняется и конкретизируется материалами семинарских занятий. Программа семинаров, разработанная кафедрой геометрии и топологии, состоит из набора примеров и задач, необходимых для более полного усвоения и закрепления студентами лекционного материала, дополняет и расширяет представление базовых концептов дисциплины. Семинар начинается с обсуждения решений домашних заданий и ответов на вопросы студентов. Краткое напоминание теоретического материала позволяет сконцентрировать внимание на наиболее существенных деталях текущего семинара. Опрос студентов в процессе занятия позволяет увидеть и устранить проблемы студентов в усвоении материала курса

Самостоятельная работа делится на две части. Первая часть состоит в выполнении домашних заданий, полученных на лекциях и семинарах, которые нацелены на закрепление материала и на привитие навыков использования нового математического аппарата. Вторая часть самостоятельной работы состоит в ознакомлении с российскими и иностранными публикациями по аналитической геометрии, ее приложениям и современным исследованиям в смежных областях математики, основанных на классических проблемах дисциплины. Целью данной работы является знакомство с традиционными и современными математическими школами, проблематикой, идеями и методами.

Для получения графических представлений и проведения аналитических расчетов, на компьютерных практикумах студентов обучают использовать систему «Mathcad». Система «Mathcad» позволяет исследовать линейную зависимость и независимость системы векторов, находить метрические величины (скалярные произведения, расстояния, углы), производить матричные вычисления, вычисление определителей, расстояний между подпространствами, устанавливать взаимное расположение прямых и плоскостей в арифметических векторных пространствах, получать графическое изображение моделируемой геометрической задачи. Выше представлена организация базовой части курса, но он также предоставляет студенту дополнительные возможности по изучению геометрии. Эти возможности нацелены на привитие студенту навыков публичных выступлений и командной работы, опыта общения и участия в дискуссиях. Студенты, изучающие курс «Аналитическая геометрия» имеют возможность участвовать в работе постоянно действующего (один раз в неделю) семинара «Алгебраическая топология для начинающих» кафедры геометрии и топологии НГУ. К работе в семинаре привлекаются ведущие специалисты в области геометрии, топологии и приложений. Участие в работе семинара является действенной формой обучения студентов профессиональным компетенциям, связанным в первую очередь с научно-исследовательской деятельностью. Для студентов является обязательным прослушивание лекций, подготовка и прочтение докладов по заданной теме, участие в дискуссиях.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.

Приняты два вида самостоятельных работ (см. выше). Первый вид - выполнение домашних заданий. Эти работы обеспечивают более полное усвоение материала курса и подготавливают студентов к выполнению контрольных работ. Второй вид – изучение материала курса аналитической геометрии и современных российских и зарубежных публикаций по аналитической геометрии и смежным разделам математики расширяют математический кругозор, знакомит студентов с основными идеями и методами курса, постановками классических задач дисциплины и подготавливает студентов к сдаче коллоквиумов и зачетов.

Для выполнения самостоятельной работы студентам обеспечивается доступ к информационным ресурсам курса. Каждый обучающийся имеет сетевой доступ к базам данных и библиотечным фондам, представленных на сервере Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирского Государственного Университета, и к электронным материалам включающим: презентации лекций по курсу «Аналитическая геометрия», список литературы, включающий книги, журналы, труды конференций.

Контролирующие материалы включают набор заданий для самостоятельной работы, списки вопросов для коллоквиумов, сдачи экзамена, варианты контрольных работ.

Примерный перечень билетов к экзамену.

Семестр 1.

БИЛЕТ 1

Определения и формулировки

1.1) Аффинная система координат.

1.2) Определение стандартного скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$в евклидовом пространстве.

1.3) Смешанное произведение в стандартном ориентированном евклидовом пространстве R^3.

1.4) Понятие расстояния на множестве.

1.5) Параметрическое уравнение прямой в n-мерном векторном пространстве.

Задачи

2.1) Найти расстояние между прямыми x+2y-z+1=0, 2x-3y+z-4=0, x+y+z-9=0, 2x-y-z=0.

2.2) Найти ортогональную проекцию вектора (-14,2,5) на прямую с направляющим вектором (2,-2,1).

Теоретические вопросы

3.1) Рассмотрим систему уравнений Ax+By+Cz=0, A_1x+B_1y+C_1z=0, где векторы (A,B,C), (A_1,B_1,C_1) не коллинеарны. Доказать, что решение этой системы --- прямая с направляющим вектором

a=$\det\begin{pmatrix} B & C \\ B_1 & C_1 \end{pmatrix}$, $b = \det\begin{pmatrix} C & A \\ C_1 & A_1 \end{pmatrix}$, $c = \det\begin{pmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{pmatrix}$;
других решений нет.
3.2) Попарно ортогональные ненулевые векторы $\{a_1, \dots, a_k\} \in (V, (\cdot, \cdot))$ линейно независимы (доказать).

БИЛЕТ 2
Определения и формулировки
1.1) Линейная оболочка (не обязательно конечного) множества $\{a_1, \dots, a_k, \dots\}$ векторов в векторном пространстве.
1.2) Определение скалярного произведения в векторном пространстве.
1.3) Векторное произведение в ориентированном евклидовом
пространстве R^3.
1.4) Линейно зависимые-независимые векторы в линейном пространстве.
1.5) Угол между плоскостями в стандартном ориентированном евклидовом
пространстве R^3.
Задачи
2.1) Показать, что системы уравнений {x=1+5s+2t, y=2+s+4t, z=-2+6s-t}, {x=3-8s'-5t', y=s'-t', z=4-3s'} определяют плоскости в 3-мерном аффинном пространстве. Выяснить, пересекаются ли эти плоскости или нет, и в случае положительного ответа указать направляющий вектор соответствующей прямой.
2.2) Даны два вектора a=(1,1,1), b=(1,0,0). Найти вектор c, |c|=1, перпендикулярный к вектору a, образующий с вектором b угол π/3 и направленный так, чтобы упорядоченная тройка векторов
имела бы положительную ориентацию.
Теоретические вопросы
3.1) Вывести формулу ориентированной площади параллелограмма на плоскости.
3.2)Рассмотрим прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, пересекающиеся в точке с координатами (x_0, y_0). Рассмотрим некоторую прямую $A_3x + B_3y + C_3 = 0$, отличную от предыдущих. Доказать: $A_3x + B_3y + C_3 = \lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2)$ для некоторых ненулевых чисел $\mu, \lambda \Leftrightarrow A_3x_0 + B_3y_0 + C_3 = 0$.

БИЛЕТ 3
Определения и формулировки
1.1) Изоморфизм векторных пространств.
1.2) Аффинное подпространство векторного пространства.
1.3) Ортогональное дополнение.
1.4) Угол между прямой и плоскостью в стандартном ориентированном евклидовом пространстве R^3.
1.5) Векторное произведение в стандартном ориентированном евклидовом пространстве R^3.
Задачи
2.1) Найти ортогональный базис **v**, **u** плоскости x+y+z+2012=0 такой, что тройка (**n, v, u**) правая, где **n** - вектор положительной нормали к плоскости x-y+z+2013=0.
2.2) Найти расстояние между прямыми —— —— и 3x-y+7z=0, x+y+z=0.
Теоретические вопросы
3.1) $\{e_1, \dots, e_n\} \in V$--- базис в.п. $\Leftrightarrow$ $\{e_1, \dots, e_n\}$~--- линейно независимы, и для любого a$\in V$ система векторов$\{e_1, \dots, e_n, a\}$ --- линейно зависима.
3.2) Вывести формулу расстояния от точки до гиперплоскости.

БИЛЕТ 4
Определения и формулировки
1.1) Аффинное пространство.
1.2) Система ортогональных векторов.

1.3) Тождество Якоби для векторного произведения.
1.4) Угол между плоскостями в стандартном ориентированном евклидовом пространстве R^3.
1.5) Объем параллелепипеда и ориентированный объем параллелепипеда в стандартном ориентированном евклидовом пространстве R^3.

Задачи

2.1) Найти расстояние между прямыми —— —— и $2x - y + 6z = 0, x + y + z = 0$.
2.2) Выяснить --- пересекаются, параллельны или совпадают плоскости x=1+u+v, y=2+u, z=3+u+v и x=-1+2u+v, y=u+2v, z=1+3v.

Теоретические вопросы

3.1) Ненулевые векторы $\{a_1, \dots, a_n\}$ линейно независимы $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = 0 \ \ \lambda_i = 0, i = 1, \dots, n.$
3.2) ДОКАЗАТЬ: Для любой прямой $l \subset V_{aff}$, $\dim V_{aff} = 2$, существует тройка чисел (A,B,C), $A^2 + B^2 \neq 0$, такая, что параметрические уравнения прямой l является решением уравнения $kAx + kBy + kC = 0$ для любого $k \in R$, где (x, y)~--- аффинные координаты пространства V_{aff}. При этом не существует тройки чисел (A_1, B_1, C_1), отличной от троек вида (kA, kB, kC), $k \in R$, такой, что параметрические уравнения прямой lявляется решением уравнения $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$.

БИЛЕТ 5

Определения и формулировки

1.1) Векторное подпространство.
1.2) Формулы для синуса и косинуса угла между единичными векторами на плоскости.
1.3) Скалярное произведение в векторном пространстве.
1.4) Понятие расстояния.
1.5) Взаимное расположение 2-х параметрически заданных прямых в 3-мерном пространстве.

Задачи

2.1) Найти расстояние между прямыми $x + 2y - z + 1 = 0$, $2x - 3y + z - 4 = 0$, $x + y + z - 9 = 0$, $2x - y - z = 0$.
2.2) Доказать, что если $a \otimes b + b \otimes c + c \otimes a = 0$, то векторы a,b,c компланарны. (Попробуйте ввести новый вектор $\varepsilon = a - b$.)

Теоретические вопросы

3.1) Вывести формулу площади параллелограмма в стандартном ориентированном евклидовом пространстве R^3.
3.2) ДОКАЗАТЬ: Векторы u, v, wнекомпланарны в в.п. V_{aff}, $dimV = 3$, $\Leftrightarrow$ прямая, проходящая через произвольную точку $M_0 \in V_{aff}$, с направляющим вектором u, и плоскость, проходящая через произвольную точку $M_1 \in V_{aff}$, натянутая на векторы v, w, имеют единственную общую точку.

БИЛЕТ 6

Определения и формулировки

1.1) Аффинная система координат.
1.2) Формула расстояния от точки до прямой в стандартном ориентированном евклидовом пространстве R^n.
1.3) Параллельные аффинные подпространства.
1.4) Параметрическое уравнение k-мерной плоскости.
1.5) Ортонормальная система векторов.

Задачи

2.1) Через прямую $x + 5y + z = 0, x - z + 4 = 0$провести плоскость, образующую угол π/4 с плоскостью $x - 4y - 8z + 12 = 0$.
2.2) Пусть $a + b + c = 0$. Доказать $a \otimes b = b \otimes c = c \otimes a$.

Теоретические вопросы

3.1) Любое уравнение вида $Ax + By + Cz + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, однозначно определяет некоторую плоскость в пространстве V_{aff}, $\dim V_{aff} = 3$.

3.2) Вывести формулу аффинного преобразования координат в V_{aff}.

БИЛЕТ 7

Определения и формулировки

1.1) Определение аффинного пространства.

1.2) Формула расстояния между скрещивающимися прямыми.

1.3) Евклидово пространство.

1.4) Внешняя нормаль к гиперплоскости.

1.5) Скалярное произведение в векторном пространстве.

Задачи

2.1) Показать, что системы уравнений $\{x = 1 + 5s + 2t, y = 2 + s + 4t, z = -2 + 6s - t\}$, $\{x = 3 - 8s' - 5t', y = s' - t', z = 4 - 3s\}$определяют плоскости в 3-мерном аффинном пространстве. Выяснить, пересекаются ли эти плоскости или нет, и в случае положительного ответа указать направляющий вектор соответствующей прямой.

2.2) Найти ориентированную площадь параллелограмма, натянутого на векторы (u_1, u_2), где $u_1 = (1, 2), u_2 = (1, 1)$(ориентация параллелограмма определяется нумерацией векторов). Результат объяснить.

Теоретические вопросы

3.1) ДОКАЗАТЬ: Для любых двух линейно независимых векторов $u, v \in V_{aff}$, $\dim V_{aff} = 3$, и любой точки $M \in V_{aff}$ существуют набор чисел (A,B,C,D) такой, что координаты любой точки плоскости П, проходящей через точку М, натянутой на векторы u,v, являются решением уравнения $kAx + kBy + kCz + kD = 0$, $k \in R$; при этом набора чисел (A_1, B_1, C_1, D_1), отличного от $(kA, kB, kC, kD), k \in R$, такого, что координаты любой точки плоскости Пявляются решением уравнения $A_1x + B_1y + kC_1z + D_1 = 0$, не существует.

3.2) Площадь параллелограмма в стандартном евклидовом пространстве R^3.

БИЛЕТ 8

Определения и формулировки

1.1) Правило параллелограмма (сложение векторов).

1.2) Прямая сумма подпространств векторного пространства.

1.3) k-мерная плоскость.

1.4) Ортогональная система векторов.

1.5) Смешанное произведение в стандартном ориентированном евклидовом пространстве R^3.

Задачи

2.1) Выяснить, являются ли прямые

$$\left\{\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}, \frac{x+7}{2} = \frac{y+3}{4} = -z\right\},$$

параллельными, скрещивающимися, пересекающимися? (система координат аффинная).

2.2) Пусть векторы $a, b, c \in R^3$линейно независимы. Являются ли векторы $(a-b) \otimes (b-c)$, $(b-c) \otimes (c-a)$, $(c-a) \otimes (a-b)$ линейно независимыми, компланарными, коллинеарными (ответ обосновать).

Теоретические вопросы

3.1) Полупространства в 3-мерном пространстве. Внутренняя и внешняя нормали. Критерий неразделенности пары точек плоскостью в 3-мерном пространстве.

3.2) Вывести формулу косинуса угла между векторами на плоскости.

БИЛЕТ 9

Определения и формулировки

1.1) Матрица Грама.

1.2) Пересечение векторных пространств.

1.3) Угол между прямой и плоскостью.

1.4) Базис векторного пространства.
1.5) При каких условиях на A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$: пересекаются, но не совпадают; совпадают; параллельны.

Задачи

2.1) Найти расстояние между прямыми $\frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{-5} = -z$ и $3x - y + 7z = 0, x + y + z - 2 = 0$.
2.2) Написать уравнение биссекторной плоскости острого двугранного угла, образованного плоскостью 2x-3y+6z-6=0 и плоскостью YOZ.

Теоретические вопросы

3.1) Точки плоскости, неразделенные прямой. Критерий неразделенности пары точек плоскости. Нормаль к прямой. Свойство вектора внешней нормали прямой.
3.2) Тождество Якоби для векторного произведения.

БИЛЕТ 10

Определения и формулировки

1.1) Что такое «базис положительно (отрицательно) ориентирован».
1.2) Понятие расстояния на множестве. Примеры.
1.3) Смешанное произведение в стандартном ориентированном евклидовом пространстве R^3.
1.4) Каноническое уравнение прямой.
1.5) Система попарно ортогональных векторов.

Задачи

2.1) Найти расстояние от точки (1,2,1) до прямой $\frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{-4}$.
2.2) Найти синус угла между векторами a=(1,2,3), b=(3,2,1).

Теоретические вопросы

3.1) Единственная плоскость, содержащая параллельные прямые l_1, l_2, проходящие через точки с координатами (x_0, y_0, z_0) и (x_1, y_1, z_1) соответственно, с направляющими векторами, коллинеарными вектору (a,b,c), определяется уравнением

$$\det\begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ a & b & c \end{pmatrix} = 0$$

(доказать).
3.2) Ортогональное дополнение к подпространству в евклидовом пространстве. Свойства ортогонального дополнения.

БИЛЕТ 11

Определения и формулировки

1.1) Направляющие косинусы прямой.
1.2) Ортогональное дополнение к подпространству евклидова пространства.
1.3) Векторное произведение в стандартном ориентированном евклидовом пространстве R^3.
1.4) Параметрическое уравнение прямой в $n-$мерном пространстве.
1.5) Когда две прямые на плоскости, определяемые своими уравнениями $Ax + By + C = 0$, $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$, пересекаются, параллельны, совпадают (в терминах A, B, C, A_1, B_1, C_1).

Задачи

2.1) Найти расстояние от точки (1,3,5) до прямой $2x + y + z - 1 = 0$, $3x + y + 2z - 3 = 0$.
2.2) Написать уравнение биссекторной плоскости какого-либо угла, образованного плоскостями x-z-5=0, 3x+5y-4z+1=0.

Теоретические вопросы

3.1) Деление направленного отрезка в заданном отношении в R^n. Теорема Чевы.
3.2) Пусть существует деформация базисов $A, B \in B_V$. Тогда базисы A,B одноименны (доказать).

БИЛЕТ 12

Определения и формулировки

1.1) Стандартное скалярное евклидово произведение в R^n.

1.2) Параллельные аффинные подпространства.

1.3) Отношение векторов на оси.

1.4) Изоморфизм аффинных пространств.

1.5) Общее уравнение прямой на плоскости.

Задачи

2.1) Плоскости x=1+u+v, y=2+u, z=3+u-v и x=1+4u, y=3u+v, z=4+2u+2v пересекаются, параллельны, совпадают?

2.2) Пусть a,b,c --- векторы, на которые натянут параллелепипед (ребра параллелепипеда), α,β,γ - углы между ребрами {b,c}, {c,a}, {a,b} соответственно, A,B,C--- двугранные углы параллелепипеда (содержат ребра a,b,c соответственно). Вывести формулу для cos A.

Теоретические вопросы

3.1) Гиперплоскости. Общее уравнение гиперплоскости и его свойства.

3.2) Теорема об изоморфизме аффинного пространства A и $R^{\dim A}$.

БИЛЕТ 13

Определения и формулировки

1.1) Уравнение отрезка, соединяющего две точки в n-мерном векторном пространстве.

1.2) Векторное произведение в стандартном ориентированном евклидовом пространстве R^3.

1.3) Изоморфизм векторных пространств.

1.4) k-мерная плоскость (параметрическое задание).

1.5) Угол между прямыми в стандартном ориентированном евклидовом пространстве R^3.

Задачи

2.1) Найти ортогональную проекцию точки (1,3,5) на прямую $2x + y + z - 1 = 0, 3x + y + 2z - 3 = 0$.

2.2) Доказать $a \otimes (b \otimes c) = b\langle a, c\rangle - c\langle a, b\rangle$.

Теоретические вопросы

3.1) Доказать: прямая $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$ и плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$

1^0 не пересекаются $\Leftrightarrow aA + bB + cC = 0, Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$,

2^0 имеют единственную общую точку $\Leftrightarrow aA + bB + cC \neq 0$,

3^0 прямая содержится в плоскости $\Leftrightarrow aA + bB + cC = 0, Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

3.2) Угол между векторами в стандартном евклидовом пространстве R^3.

БИЛЕТ 14

Определения и формулировки

1.1) Линейная оболочка подмножества векторного пространства.

1.2) Смешанное произведение в стандартном ориентированном евклидовом пространстве R^3.

1.3) Изоморфизм аффинных пространств.

1.4) Синус угла между векторами на плоскости.

1.5) Угол между плоскостями в стандартном ориентированном евклидовом пространстве R^3.

Задачи

2.1) Прямые $x = x_0 + ta, y = y_0 + tb, z = z_0 + ct$ и $x = x_1 + s\alpha, y = y_1 + s\beta, z = z_1 + s\gamma$ лежат в одной плоскости и не пересекаются $\Leftrightarrow$ векторы (a, b, c), (α, β, γ) коллинеарны, векторы (a, b, c), $(x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$ неколлинеарны.

2.2) Найти площадь параллелограмма, натянутого на векторы (1,2,3), (6,5,4), приложенные к точке с координатами (7,8,9).

Теоретические вопросы

3.1) Вывести формулу расстояния от точки до гиперплоскости.

3.2) Параллельные аффинные подпространства.

БИЛЕТ 15

Определения и формулировки

1.1) Скалярное произведение в векторном пространстве.

1.2) Угол между векторами в стандартном ориентированном евклидовом пространстве R^3.

1.3) Ориентация как непрерывная на деформациях функция.

1.4) Формула размерности суммы подпространств X,Y векторного пространства.

1.5) Смешанное произведение в стандартном ориентированном евклидовом пространстве R^3.

Задачи

2.1) Доказать $a \otimes (b \otimes c) = b\langle a, c\rangle - c\langle a, b\rangle$.

2.2) Найти ортонормальный базис $\vec{v}, \vec{u}$ плоскости x+y+z+2012=0 такой, что тройка $(\vec{n}, \vec{v}, \vec{u})$ правая, где $\vec{n}$~--- вектор положительной нормали к плоскости x-y+z+2012=0.

Теоретические вопросы

3.1) Необходимые и достаточные условия того, что две различные прямые на плоскости, определяемые уравнениями $Ax + By + C = 0$, $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$, параллельны (не пересекаются).

3.2) Аффинные замены координат и их свойства.

БИЛЕТ 16

Определения и формулировки

1.1) Аффинные подпространства векторного пространства.

1.2) Евклидово пространство.

1.3) Угол между прямой и плоскостью в стандартном ориентированном евклидовом пространстве R^3.

1.4) Векторное пространство.

1.5) Изоморфизм аффинных пространств.

Задачи

2.1) Найти расстояние от точки (3,-1,6) до прямой $\dfrac{x+2}{5} = y - 2 = \dfrac{z+3}{6}$.

2.2) Доказать, что объем параллелепипеда P, натянутого на векторы a,b,c, равен
$\sqrt{\det\begin{pmatrix}\langle a,a\rangle & \langle a,b\rangle & \langle a,c\rangle \\ \langle b,a\rangle & \langle b,b\rangle & \langle b,c\rangle \\ \langle c,a\rangle & \langle c,b\rangle & \langle c,c\rangle\end{pmatrix}}$.

Теоретические вопросы

3.1) Гиперплоскости. Общее уравнение гиперплоскости и его свойства.

3.2) Вывести формулу синуса угла между векторами в стандартном ориентированном евклидовом пространстве R^3.

БИЛЕТ 17

Определения и формулировки

1.1) Каноническое уравнение прямой.

1.2) Понятие деформации базисов в векторном пространстве.

1.3) Ортонормированная система векторов.

1.4) Векторное произведение в стандартном ориентированном евклидовом пространстве R^3.

1.5) Неравенство Минковского.

Задачи

2.1) Найти расстояние между прямыми $x + 2y - z + 1 = 0, 2x - 3y + z - 4 = 0$ и $x + y + z - 9 = 0, 2x - y - z = 0$.

2.2) Доказать, что площадь параллелограмма, построенного на векторах a,b, равна $\sqrt{\det\begin{pmatrix}\langle a,a\rangle & \langle a,b\rangle \\ \langle b,a\rangle & \langle b,b\rangle\end{pmatrix}}$

Теоретические вопросы

3.1) Параллельность плоскостей в 3-мерном пространстве. Теорема о взаимном расположении 2-х

плоскостей в 3-мерном пространстве.
3.2) Расстояние d_2: неравенство Минковского, неравенство треугольника.

БИЛЕТ 18

Определения и формулировки

1.1) Базис векторного пространства.
1.2) Аффинная система координат.
1.3) Параметрическое уравнение гиперплоскости.
1.4) Формула расстояния от точки до прямой в стандартном ориентированном евклидовом пространстве R^3.
1.5) Неравенство Коши.

Задачи

2.1) Найти ортогональную проекцию вектора (1,2,3) на плоскость x-y+z+1=0.
2.2) Три ненулевых вектора a,b,c стандартного ориентированного евклидова пространства R^3 связаны соотношениями a=[b,c], b=[c,a], c=[a,b]. Найти: 1) углы между этими векторами, 2) длины эти векторов.

Теоретические вопросы

3.1) Плоскости, проходящие через начало координат, в 3-мерном пространстве, и их свойства.
3.2) Прямая сумма подпространств, теорема о параллельном проектировании.

БИЛЕТ 19

Определения и формулировки

1.1) Компланарные векторы.
1.2) Понятие координатного изоморфизма векторного пространства и R^n.
1.3) Понятие расстояния в R^n.
1.4) Уравнение плоскости, проходящей через 3 заданные точки.
1.5) Деформация базисов.

Задачи

2.1) Найти расстояние между прямыми $2x+2y-z+1=0, 2x-3y+z-4=0$ и $x+y+z-9=0, 2x-y-z=0$.
2.2) Является ли отображение $F(t)=\begin{pmatrix} 2t-1 & t^2 \\ -t+4 & 3t^2+2 \end{pmatrix} : [-2,-1] \to B_V$ деформацией базисов $F(-2)$, $F(-1)$?

Теоретические вопросы

3.1) Векторы u, v, w некомпланарны в в.п. V_{aff} , $\dim V_{aff}=3$, $\Leftrightarrow$ прямая, проходящая через произвольную точку $M_0 \in V_{aff}$, с направляющим вектором u, и плоскость, проходящая через произвольную точку $M_1 \in V_{aff}$, натянутая на векторы v, w, имеют единственную общую точку.
3.2) Расстояние от точки до k-мерной плоскости как длина перпендикуляра, опущенного из точки на k-мерную плоскость.

БИЛЕТ 20

Определения и формулировки

1.1) Изоморфизм векторных пространств.
1.2) Векторное произведение в стандартном ориентированном евклидовом пространстве R^3.
1.3) Косинус и синус угла между единичными векторами на плоскости.
1.4) Параметрическое уравнение прямой в n-мерном пространстве.
1.5) Ортогональное дополнение к подпространству в евклидовом пространстве.

Задачи

2.1) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку (-2,3,0) и прямую $x+y+z-2=0, -x+y-z-10=0$. Система координат аффинная.
2.2) Доказать, что если векторы [a,b], [b,c], [c,a] компланарны, то они и коллинеарны.

Теоретические вопросы

3.1) Точки плоскости, неразделенные прямой. Критерий неразделенности пары точек плоскости. Нормаль к прямой. Свойство вектора внешней нормали прямой.
3.2) Доказать, что в векторном пространстве R^n всегда можно деформировать положительно ориентированный базис в такой, что i-й вектор имеет все, кроме одной, нулевые компоненты в координатной записи.

Семестр 2.

БИЛЕТ 1
Определения и формулировки
1.1) Уравнение поверхности 2-го порядка
1.2) Аффинное преобразование
1.3) Линейный эксцентриситет эллипса
1.4) Изоморфизм евклидовых пространств
1.5) Прямолинейная образующая поверхности 2-го порядка
Задачи
2.1) Определить тип поверхности $4x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 10xy + 4yz + 4zx - 16x - 16y + 10z - 2 = 0$.
Теоретические вопросы
3.1) Эллипс, гипербола, парабола в полярной системе координат.
3.2) Асимптотические направления, асимптотический конус.
3.3) Собственные линейные ортогональные преобразования плоскости, их геометрический смысл.

БИЛЕТ 2
Определения и формулировки
1.1) Уравнение кривой 2-го порядка
1.2) Директрисы гиперболы
1.3) Ортогональная матрица
1.4) Асимптотическое направление к поверхности 2-го порядка
1.5) Аналитическая формула аффинных преобразований
Задачи
2.1) Найти фокусы и директрисы равносторонней гиперболы $2xy = a^2$.
Теоретические вопросы
3.1) Геометрическое определение гиперболы.
3.2) Касательная прямая и касательная плоскость у поверхности 2-го порядка
3.3) Линейные преобразования евклидовых пространств и их свойства. Матрица линейного преобразования

БИЛЕТ 3
Определения и формулировки
1.1) Эксцентриситет эллипса
1.2) O(n), SO(n)
1.3) Уравнение касательной плоскости к поверхности 2-го порядка
1.4) Матрица линейного преобразования
1.5) Диаметр эллипса
Задачи
2.1) Определить тип линии $x^2 - 12xy - 4y^2 + 12x + 8y + 5 = 0$.
Теоретические вопросы
3.1) Геометрическое определение эллипса

3.2) Поверхность 2-го порядка в евклидовом пространстве R^3, определение. Канонические поверхности 2-го порядка в евклидовом пространстве R^3, рисунки. Эллиптический и гиперболический параболоиды и их элементарные свойства.
3.3) Деление отрезка в заданном отношении и действие аффинных преобразований.

БИЛЕТ 4
Определения и формулировки
1.1) Эксцентриситет гиперболы
1.2) Симметрическое линейное преобразование евклидова пространства
1.3) Асимптотическое направление поверхности 2-го порядка
1.4) Каноническое уравнение эллиптического параболоида
1.5) Уравнение касательной к эллипсу
Задачи
2.1) Определить тип поверхности $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 4yz - 8zx - 28x + 2y + 16z + 45 = 0$.
Теоретические вопросы
3.1) Оптическое свойство эллипса
3.2) Углы Эйлера.
3.3) Аффинные преобразования. Собственные и несобственные аффинные преобразования. Ортогональные аффинные преобразования.

БИЛЕТ 5
Определения и формулировки
1.1) Директрисы гиперболы
1.2) Симметрии плоскости как ее преобразования, ось симметрии
1.3) Фокальный параметр эллипса
1.4) Каноническое уравнение гиперболического параболоида
1.5) Уравнение касательной к эллипсу
Задачи
2.1) Определить тип линии $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0$.
Теоретические вопросы
3.1) Оптическое свойство параболы
3.2) Особые точки поверхности 2-го порядка
3.3) Групповые свойства аффинных преобразований.

БИЛЕТ 6
Определения и формулировки
1.1) Эксцентриситет эллипса
1.2) Каноническое уравнение однополостного гиперболоида
1.3) Касательная параболы
1.4) Линейное ортогональное преобразование евклидова пространства
1.5) Фокусы параболы
Задачи
2.1) Определить тип линии $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$.
Теоретические вопросы
3.1) Оптическое свойство гиперболы

3.2) Прямолинейные образующие гиперболического параболоида, их уравнения
3.3) Аффинные преобразования и k-мерные плоскости

БИЛЕТ 7
Определения и формулировки

1.1) Фокусы эллипса
1.2) Уравнение касательной гиперболы
1.3) SO(n), O(n)
1.4) Скользящая симметрия
1.5) Каноническое уравнение двуполостного гиперболоид
Задачи
2.1) Объяснить, почему гиперболический параболоид может быть получен движением «подвижной» параболы вдоль «неподвижной» параболы
Теоретические вопросы
3.1) Хордальное свойство параболы
3.2) Приведение кривой второго порядка к каноническому виду, центральный случай. Центр кривой второго порядка. Классификация кривых второго порядка в центральном случае.
3.3) Деление отрезка в заданном отношении и действие аффинных преобразований

БИЛЕТ 8
Определения и формулировки
1.1) Отношение расстояния текущей точки эллипса, гиперболы, параболы до фокуса к расстоянию этой же текущей точки до соответствующей этому фокусу директрисы.
1.2) Директрисы параболы
1.3) Невырожденное линейное преобразование
1.4) Круговой конус как фигура вращения
1.5) Движение евклидова пространства
Задачи
2.1) Объяснить, почему эллиптический параболоид может быть получен движением «подвижной» параболы вдоль «неподвижной» параболы
Теоретические вопросы
3.1) Хордальное свойство гиперболы. Сопряженные диаметры.
3.2) Существование прямолинейных образующих у однополостного гиперболоида. Уравнения прямолинейных образующих, проходящих через точки горлового эллипса.
3.3) Аффинные преобразования. Собственные и несобственные аффинные преобразования. Ортогональные аффинные преобразования. Аналитическая формула аффинных преобразований

БИЛЕТ 9
Определения и формулировки
1.1) Ядро линейного преобразования
1.2) Каноническое уравнение двуполостного гиперболоида
1.3) Директрисы эллипса
1.4) Хорда поверхности 2-го порядка
1.5) Эксцентриситет гиперболы
Задачи
2.1) Определить тип линии $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$.
Теоретические вопросы
3.1) Оптическое свойство параболы
3.2) Центр симметрии поверхности 2-го порядка
3.3) Ортогональные матрицы--- эквивалентные определения и свойства

БИЛЕТ 10
Определения и формулировки
1.1) Каноническое уравнение эллиптического параболоида
1.2) Асимптоты гиперболы
1.3) Связь между матрицами, задающими в разных базисах одно и то же линейное преобразование (формула)

1.4) Симметрическое линейное преобразование
1.5) Эксцентриситет эллипса
Задачи
2.1) Определить тип линии второго порядка, фокус которой находится в точке (2,0), соответствующая этому фокусу директриса имеет уравнение x=5, а сама линия проходит через точку (10,6). Сделайте качественный рисунок этой линии. Найти фокальный параметр линии.
Теоретические вопросы
3.1) Признак принадлежности точки гиперболе или эллипсу, связанный с эксцентриситетом.
3.2) Упрощение уравнения кривых 2-го порядка путем выбора специальной прямоугольной системы координат. Формула тангенса удвоенного угла.
3.3) Движения плоскости.

БИЛЕТ 11
Определения и формулировки
1.1) Каноническое уравнение гиперболического параболоида
1.2) Прямолинейная образующая
1.3) Изоморфизм евклидовых пространств
1.4) Уравнение касательной к эллипсу
1.5) Фокальный параметр параболы
Задачи
2.1) По какой линии плоскость $x + y - z + 3 = 0$ пересекает двуполостный гиперболоид $x^2 + y^2 - z^2 = -4$?
Теоретические вопросы
3.1) Хордальное свойство эллипса. Сопряженные диаметры.
3.2) Поверхность 2-го порядка в евклидовом пространстве R^3, определение. Канонические поверхности 2-го порядка в евклидовом пространстве R^3, рисунки. Конус 2-го порядка и его свойства (конус вращения, направляющие конуса).
3.3) Линейные преобразования евклидовых пространств и их свойства.
Матрица линейного преобразования.

БИЛЕТ 12
Определения и формулировки
1.1) Эксцентриситет гиперболы.
1.2) Несобственные линейные ортогональные преобразования плоскости
1.3) Изоморфизм евклидовых пространств
1.4) Каноническое уравнение однополостного гиперболоида
1.5) Линейный эксцентриситет эллипса
Задачи
2.1) Написать уравнения эллипса и гиперболы с фокусами (7,0), (-7,0), проходящих через точку (-2,12).
Теоретические вопросы
3.1) Расстояние между фокусом эллипса или гиперболы и фокальный параметр кривых. Отношение расстояний точки эллипса или гиперболы до фокуса и до соответствующей директрисы и эксцентриситет кривой.
3.2) Прямолинейные образующие поверхностей 2-го порядка. Поверхности, у которых они есть, и у которых их нет.
3.3) Собственные линейные преобразования евклидова пространства R^3~--- определение, их «нормальные» формы и геометрический смысл.

БИЛЕТ 13
Определения и формулировки

1.1) Эксцентриситет эллипса.
1.2) Вид симметрической матрицы в базисе из ее собственных векторов
1.3) Теорема об уравнении кривой в неявной форме
1.4) Каноническое уравнение двуполостного гиперболоида
1.5) Линейный эксцентриситет гиперболы

Задачи

2.1) Написать уравнение линии второго порядка, зная ее фокус (2,0), соответствующую ему директрису x=8 и эксцентриситет, равный 1/2. Найти второй фокус и вторую директрису линии.

Теоретические вопросы

3.1) Геометрическое определение параболы.
3.2) Приведение поверхностей 2-го порядка к каноническому виду.
3.3) Операции над линейными преобразованиями.

БИЛЕТ 14

Определения и формулировки

1.1) Фокусы эллипса.
1.2) Директрисы параболы
1.3) Аффинные преобразования
1.4) Каноническое уравнение эллиптического параболоида
1.5) Асимптотические направления поверхности 2-го порядка

Задачи

2.1) Составить уравнение гиперболы, зная уравнения ее асимптот $y = \pm\frac{x}{2}$ и уравнение одной из ее касательных 5x-6y-8=0.

Теоретические вопросы

3.1) Оптическое свойство эллипса.
3.2) Асимптотические направления, асимптотический конус.
3.3) Ортогональные матрицы~--- эквивалентные определения и свойства.

БИЛЕТ 15

Определения и формулировки

1.1) Асимптотические направления гиперболоидов.
1.2) Эксцентриситет гиперболы.
1.3) Директриса параболы
1.4) Линейная зависимость (независимость) собственных векторов матрицы симметрического преобразования.
1.5) Вращения как преобразования пространства.

Задачи

2.1) Доказать, что следующая поверхность является поверхностью вращения:
$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy - 2xz - 2yz - 2x - 2y - 2z - 1 = 0.$

Теоретические вопросы

3.1) Хордальное свойство эллипса. Сопряженные диаметры.
3.2) Прямолинейные образующие гиперболического параболоида, их существование, их уравнения.
3.3) Групповые свойства аффинных преобразований.

БИЛЕТ 16

Определения и формулировки

1.1) Симметрическое линейное преобразование.
1.2) Каноническое уравнение эллиптического параболоида.
1.3) Эксцентриситет гиперболы
1.4) Касательная параболы.

1.5) Канонический вид матрицы, сохраняющий скалярное произведение.

Задачи

2.1) Объясните, почему любая прямолинейная образующая однополостного гиперболоида обязательно должна пересечь его горловой эллипс.

Теоретические вопросы

3.1) Фокальные радиусы гиперболы и их свойства.

3.2) Классификация кривых 2-го порядка

3.3) Ось симметрии. Ось симметрии несобственного линейного преобразования евклидовой плоскости.

БИЛЕТ 17

Определения и формулировки

1.1) Эксцентриситет эллипса

1.2) Геометрическое определение гиперболы.

1.3) Изоморфизм евклидовых пространств.

1.4) Геометрический смысл собственного линейного преобразования.

1.5) Каноническое уравнение однополостного гиперболоида.

Задачи

2.1) Определить тип линии $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0$.

Теоретические вопросы

3.1) Эллипс, гипербола, парабола в полярной системе координат

3.2) Прямолинейные образующие гиперболического параболоида: существование, вывод уравнений.

3.3) Аналитическая формула аффинных преобразований, ее связь с аффинными заменами координат.

БИЛЕТ 18

Определения и формулировки

1.1) Эксцентриситет гиперболы

1.2) Геометрическое определение эллипса

1.3) Изоморфизм евклидовых пространств.

1.4) Геометрический смысл собственного линейного преобразования.

1.5) Каноническое уравнение двуполостного гиперболоида.

Задачи

2.1) Определить вид поверхности $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0$.

Теоретические вопросы

3.1) Хордальное свойство эллипса. Сопряженные диаметры

3.2) Свойства прямолинейных образующих гиперболического параболоида, принадлежащих разным семействам.

3.3) Аналитическая формула аффинных преобразований, ее связь с аффинными заменами координат.

БИЛЕТ 19

Определения и формулировки

1.1) Образ линейного преобразования

1.2) Каноническое уравнение двуполостного гиперболоида

1.3) Директрисы гиперболы

1.4) Касательная плоскость поверхности 2-го порядка

1.5) Прямолинейная образующая

Задачи

2.1) Определить тип линии $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$.

Теоретические вопросы
3.1) Оптическое свойство параболы
3.2) Многочлены 2-го порядка от nпеременных. Вид многочлена 2-го порядка от n переменных в аффинной системе координат $(O, u_1, \ldots, u_n)$, где O --- начало координат евклидова пространства R^n, $u_1, \ldots, u_n$ ~--- собственные векторы матрицы A.
3.3) Ортогональные матрицы~--- эквивалентные определения и свойства

Примерные варианты контрольных работ.

Контрольная работа 1.

1. Даны четыре вектора a=(0,1,1), b=(1,0,2), c=(1,1,0), d=(1,0,0). Найти вектор, являющийся проекцией вектора d на плоскость, определяемую векторами a и b, при направлении проектирования, параллельном вектору c.

2. Даны две системы координат Oxyz и O'x'y'z'. По отношению к первой системе начало второй находится в точке O'=(1,1,1), а базисные векторы второй системы суть $e'_1 = (1, 1, 0)$, $e'_2 = (0, 1, 1)$, $e'_3 = (1, 0, 1)$. Найти координаты начала O и координаты базисных векторов e_1, e_2, e_3 первой системы относительно второй.

3. Найти косинус того угла между двумя прямыми x+y+1=0, x-2y=0, в котором лежит точка (1,1).

4. К точке M приложены три ненулевых вектора x, y, z, сумма которых равна нулю. Зная углы A, B, C между векторами y и z, z и x, x и y, найти отношение модулей этих векторов |x|:|y|:|z| .

5. Даны уравнения 4x+5y=0, x-3y=0 медиан треугольника и его вершина (2,-5). Составить уравнения сторон треугольника.

Контрольная работа 2.

1) Через точку (2,-1) провести прямую, отрезок которой, заключенный между осями координат, делился бы в данной точке напополам. Система координат аффинная.

2) Даны две вершины треугольника ABC: A=(1,2), B=(3,4) и тангенсы внутренних углов при этих вершинах tg A=-1/2, tg B=1/3. Найти третью вершину треугольника, зная, что она лежит по ту же сторону от прямой AB, что и начало координат.

3) Даны три прямые: x=3+t, y=-1+2t, z=4t; x=-2+3t, y=-1, z=4-t; x-3y+z=0, x+y-z+4=0.
Написать уравнение прямой, пересекающей первые две из данных прямых и параллельной третьей прямой. Система координат аффинная.

Контрольная работа 3.

1) Найти векторное и скалярное произведения векторов (-a,b,-c), (c,b,a), а также длины этих векторов и угол между ними.

2) Найти расстояние между прямыми $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y+1}{-5} = -z$ и $3x - y + 7z = 0, x + y + z = 0$.

3) Написать уравнение прямой, проходящей через точку (1,10,1), перпендикулярную прямой

$$\frac{x+2}{2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-4}{4}.$$

4) Найти расстояние от точки (1,2,1) до прямой $\frac{x+2}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{-4}$.

5) Пересекаются или нет прямая $\frac{x+2}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{-4}$ и плоскость $x-y+13z+1=0$.

Контрольная работа 4.

1. Составить уравнение проекции прямой (x-2):3=(y-1):(-2)=z:1 из точки M=(1,2,1) на плоскость y-2z+4=0. Система координат аффинная.

2. Определить взаимное расположение трёх плоскостей 2x-4y+5z-21=0, x-3z+18=0, 6x+y+z-30=0.

3.Даны две плоскости (1): 2x+3y+4z+6=0, (2): 2x-y+z-6=0. Найти плоскость (3) так, чтобы (2) делила пополам двугранные углы между плоскостями (1) и (3).

4.Даны три некомпланарных вектора $a=(x_1,x_2,x_3)$, $b=(y_1,y_2,y_3)$, $n=(A,B,C)$. Найти площадь параллелограмма, являющегося ортогональной проекцией на плоскость, перпендекулярную к вектору n, параллелограмма, построенного на векторах a и b.

5. Найти аффинное преобразование, переводящее точку (1,1) в точку (3,1), а векторы (1,1) и (1,2) --- соответственно в векторы (10,1) и (-1,1).

Контрольная работа 5

1. Определить аффинное преобразование, при котором прямые x+2y+1=0, x-y+2=0 переходят в себя, а точка (1,1) --- в точку (2,1). Система координат аффинная.

2. Вершины острых углов прямоугольных треугольников перемещаются по двум параллельным прямым, а вершина прямого угла --- по прямой к ним перпендикулярной. Какую линию описывает при этом основание перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу прямоугольного треугольника?

3. Доказать тождество [[a, b], c]=-a(b,c)+b(a,c).

4. Ортонормировать систему векторов (1,1,1,1), (1,2,1,1), (1,1,3,1), (1,1,1,3).

Контрольная работа 6.

1. Определить тип линии, написать её каноническое уравнение и найти каноническую систему координат $2x^2+4xy+5y^2-6x-8y-1=0$.

2. Доказать, что отрезок касательной к гиперболе, заключённый между её асимптотами, делится точкой касания пополам.

3. Найти соотношения, связывающие угловые коэффициенты k_1, k_2 двух сопряжённых диаметров эллипса $x^2/a^2+y^2/b^2=1$.

4. Показать, что если кривая второго порядка касается одной из сторон описанного около неё параллелограмма в середине этой стороны, то остальных трёх сторон параллелограмма она касается также в их серединах; кривая в этом случае есть эллипс.

Контрольная работа 7.

1. Определить тип поверхности, написать её каноническое уравнение и найти каноническую систему координат $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z = 0$.

2. Пусть P --- поверхность второго порядка, заданная уравнением $x^2 + 3y^2 = 2z$ в некоторой прямоугольной системе координат. Из точки $M_0 = (0, 0, -3/2)$ проводятся всевозможные прямые, касающиеся поверхности P в точках M.
 а) Доказать, что все точки M лежат в одной плоскости.
 б) Найти объём конуса, образованного отрезками M_0M.

3. Найти координаты фокусов и уравнения директрис линии пересечения цилиндра $z^2 + y^2 = a^2$ и плоскости $y = x$.

4. Вершина конуса находится в точке (0,0,p), а сечение плоскостью z=0 задаётся уравнением $x^2 + 3y^2 = 5$. Найти уравнение конуса.

5. Доказать, что плоскость x-y=0 рассекает эллиптический параболоид $2y^2 + z^2 - 2x = 0$ по окружности и найти радиус этой окружности.

Аттестация студентов по дисциплине «Аналитическая геометрия» проводится на основании текущего и промежуточного контроля согласно модульно-рейтинговой системе.

Текущий контроль. В течение изучения дисциплины у студентов проверяется выполнение домашних заданий и контролируется посещение лекций и семинарских занятий. Выполнение домашних заданий является обязательным для всех студентов. Результаты промежуточного контроля служат основанием для выставления оценок в ведомость контрольной недели на факультете.

Промежуточный контроль. Для контроля усвоения дисциплины учебным планом предусмотрены: в первом семестре - две контрольные работы, зачет и экзамен; во втором семестре - две контрольные работы, зачет и экзамен. Для получения зачета необходимо иметь не более двух пропусков занятий, все выполненные домашние задания, положительные оценки за участие в обеих контрольных работах и коллоквиуме. Для допуска к экзамену необходимо иметь зачет.

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины
«Аналитическая геометрия»

1. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. М.: Наука, 1968 г.,

2. Берже М. Геометрия. М.: Мир, 1984 г.,

3. Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. СПб.: Лань, 2005 г.,

4. Кузьминов В. И. Аналитическая геометрия. // Методическое пособие. Новосибирск. Изд-во НГУ. 1995 г.

5. Кузьминов В. И. Проективная геометрия. // Методическое пособие. Новосибирск. Изд-во НГУ. 2005 г.

6. Мусхелишвили Н.И. Курс аналитической геометрии. СПб.: Изд-во Лань, 2002 г.,

7. Погорелов А.В. Аналитическая геометрия. Москва: ``Наука", 1968 г.,

8. Сторожук К. В. Аналитическая геометрия. // Методическое пособие. Новосибирск. Изд-во НГУ. 2004 г.

9. Шафаревич И.Р., Ремизов А.О. Линейная алгебра и геометрия. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009 г.,

Задачники

1. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. М.: Наука, 1987 г.,

2. Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. Ижевск: НИЦ ``Регулярная и хаотическая динамика", 2002 г.,

3. Грешнов А.В., Малюгин С.А., Потапов В.Н. «Сборник задач и упражнений по математическому анализу. 2-й семестр», 2012. Новосибирск: Новосиб. гос ун-т. 250 с. 2-е издание.

в) Программное обеспечение и Интернет-ресурсы:
http://mathworld.wolfram.com , раздел geometry,
http://math.nsc.ru/library ,
http://mathlab.snu.ac.kr/~top ,
http://www.mccme ,
http://www.mathnet.ru .

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

- Ноутбук, медиа-проектор, экран.
- Программное обеспечение для демонстрации слайд-презентаций.
- Доступ с персональных компьютеров и ноутбуков к вычислительным и информационным ресурсам и услугам локальной сети Института Математики им. С.Л. Соболева СО РАН.

Рецензент (ы) ____

Программа одобрена на заседании Методической комиссии ММФ

от ________________________________ года, протокол № ________.