

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Национальный исследовательский университет
Новосибирский государственный университет
Механико-математический факультет**

УТВЕРЖДАЮ

«_____» _____ 201__ г.

Рабочая программа дисциплины
Дополнительные главы линейной алгебры

Направление подготовки
«Математика и компьютерные науки»,
«Математика»,
«Механика и математическое моделирование»,
«Прикладная математика и информатика»

Квалификация (степень) выпускника
Магистр

Форма обучения
Очная

Новосибирск 2010

Аннотация рабочей программы

Дисциплина «Дополнительные главы линейной алгебры» является частью математического цикла ООП по направлениям подготовки «Математика и компьютерные науки», «Математика», «Механика и математическое моделирование» и «Прикладная математика и информатика». Курс входит в базовую часть профессионального цикла соответствующих образовательных программ. Программа курса составлена в соответствии с требованиями ФГОС 3 поколения.

Дисциплина реализуется на Механико-математическом факультете Национального исследовательского университета Новосибирский государственный университет кафедрой Дифференциальных уравнений ММФ НИУ НГУ.

Содержание дисциплины составляет комплекс вопросов, связанных с корректной постановкой задач современной вычислительной линейной алгебры, анализ алгоритмов для их решения, а также серия примеров практического использования аппарата линейной алгебры в таких областях, как методы математической физики, теория устойчивости, теория управления и др.

Дисциплина нацелена на формирование общекультурных компетенций ОК-1, ОК-5, ОК-6, профессиональных компетенций ПК-1, ПК-2, ПК-3, ПК-7, ПК-9 выпускника.

Преподавание дисциплины предусматривает следующие формы организации учебного процесса: лекции, самостоятельная работа студента, консультации.

Программой дисциплины предусмотрены следующие виды контроля: проверка самостоятельно решенных задач, экзамен в конце семестра.

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единицы, 108 академических часов, из них 36 часов аудиторной нагрузки (лекционные занятия).

1. Цели освоения дисциплины

Цель освоения дисциплины «Дополнительные главы линейной алгебры», состоит в том, чтобы студенты приобрели целостный взгляд на роль линейной алгебры в современной науке.

- Для этого, во-первых, проводится анализ классических формулировок задач с точки зрения требований к точности результата и возможностей современной вычислительной техники.
- Во-вторых, с той же точки зрения рассматриваются алгоритмы линейной алгебры, причем особое внимание уделяется концепции гарантированной оценки точности результата. Согласно этой концепции имеет смысл пользоваться теми алгоритмами, результат выполнения которых являются аналогом «теоремы»(указываются границы интервала, в котором находится точное значение). Использование таких алгоритмов особенно важно для пользователей, которые не являются специалистами в вычислительной линейной алгебре.
- В-третьих, изучается целый ряд новейших подходов к некоторым задачам линейной алгебры, разработанных в последние годы.
- В-четвертых, на основе примеров из прикладных областей устанавливаются связи современной линейной алгебры с другими дисциплинами.
- В-пятых, во время самостоятельной работы студенты на практике осваивают изученные теоретические утверждения, учатся пользоваться стандартными программами и правильно интерпретировать результат счета.

2. Место дисциплины в структуре ООП магистратуры

Дисциплина «Дополнительные главы линейной алгебры» является частью математического цикла ООП по направлениям подготовки «Математика и компьютерные науки», «Математика», «Механика и математическое моделирование», «Прикладная математика и информатика».

Дисциплина «Дополнительные главы линейной алгебры» опирается на следующие дисциплины:

- Линейная алгебра (системы линейных алгебраических уравнений, собственные значения и собственные векторы матриц);
- Теория функций комплексного переменного (интегрирование по контуру);
- Обыкновенные дифференциальные уравнения (устойчивость решения, разностные уравнения);
- Программирование, вычислительная практика (умение писать программы и пользоваться стандартными пакетами математического обеспечения).

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

Курс направлен на формирование

- общекультурных компетенций: ОК-1, ОК-5, ОК-6;
- профессиональных компетенций: ПК-1, ПК-2, ПК-3, ПК-7, ПК-9.

В результате освоения дисциплины учащийся должен:

- знать основные понятия и утверждения линейной алгебры;
- знать особенности современных постановок вычислительных задач линейной алгебры;
- владеть принципами построения корректных алгоритмов для численного решения задач линейной алгебры;
- владеть навыками решения задач линейной алгебры.
- уметь интерпретировать результат вычислений в зависимости от используемого математического и программного обеспечения.

4. Структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетные единицы, 108 часов.

№ п/п	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)			Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
				Лекция	Самост. работа	Аттестация	
1.	Введение. Особенности компьютерных вычислений. Обратная устойчивость. Гарантированная оценка точности. Упрощение вида матриц ортогональными преобразованиями.	3	1	2	2		
2.1.	Особенности спектра симметричных матриц. Теорема Вейля. Теорема Штурма, последовательности Штурма	3	2	2	2		
2.2	Вычисление собственных значений симметричных матриц. Примеры	3	3	2	2		Проверка 1-го задания

2.3.	Двусторонние последовательности Штурма и собственные векторы симметричных матриц.	3	4	2	2		
2.4.	Примеры: собственные функции оператора Лапласа, полиномы Лежандра и др. Вычисление собственных значений и векторов кососимметричных матриц, вычислений сингулярных чисел и векторов.	3	5	2	2		
3.1.	Системы линейных алгебраических уравнений. Число обусловленности. Чувствительность решения к погрешностям. Решения систем полного ранга.	3	6	2	2		
3.2.	Метод регуляризация плохо обусловленных систем.	3	7-8	4	4		
4.1	Особенности спектра несимметричных матриц. Вычислительные парадоксы. Эпсилон-спектр, примеры.	3	9	2	2		Проверка 2-го задания
4.2.	Приложение несимметричной спектральной задачи в теории устойчивости, уравнения Ляпунова. Матричные уравнения, теорема Шура, уравнение Сильвестра.	3	10	2	2		
4.3.	Теоремы Ляпунова и их обращения в непрерывном и дискретном случае, оценки роста решений дифференциальных и разностных уравнений.	3	11-12	4	4		
4.4.	Постановка задачи дихотомии матричного спектра. Численные критерии отсутствия спектра на кривой, их эквивалентность и непрерывность. Обобщенные уравнения Ляпунова.	3	13	2	2		
4.5.	Проекторы на инвариантные подпространства. Обобщения уравнений Ляпунова для матричного пучка. Дихотомия окружностью, функция Грина.	3	14	2	2		
4.6.	Дихотомия окружностью. Рекуррентные формулы для вычисления критерия дихотомии. Алгоритм	3	15	2	2		
4.7.	Линейная дихотомия, эллиптическая дихотомия.	3	16	2	2		
4.8.	Одномерные спектральные портреты и канонический вид матриц.	3	17	2	2		
4.9.	Разложение полинома на множители.	3	18	2	2		Проверка 3-го задания
		3				36	Экзамен
				36	36	36	

5. Образовательные технологии

Используется лекционная форма в сочетании с самостоятельной работой студентов. В качестве заданий для самостоятельной работы студенты получают задачи для численного решения с использованием любого удобного программного обеспечения. В ходе решения этих задач студенты на практике проверяют теоретическую информацию, полученную на лекциях.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

Для самостоятельной работы студенты три раза за семестр получают индивидуальные задачи, соответствующие темам лекций. Аналогичные примеры приведены в [1,2]. Для части задач результаты решений разбираются на последующих лекциях. Остальные задачи после проверки разбираются на специальных консультационных занятиях.

Примеры заданий для самостоятельного выполнения:

1. Изобразить эpsilon-спектр, радиальный спектральный портрет и соответствующую клеточно-диагональную форму матрицы для флаттера при $v=380$.
2. Изобразить эpsilon-спектр, радиальный спектральный портрет и соответствующую клеточно-диагональную форму матрицы для флаттера при $v=420$.
3. Изобразить эpsilon-спектр, линейный спектральный портрет и соответствующую клеточно-диагональную форму матрицы для флаттера при $v=430$.
4. Изобразить эpsilon-спектр, линейный спектральный портрет и соответствующую клеточно-диагональную форму матрицы для флаттера при $v=370$.
5. Изобразить эpsilon-спектр, эллиптический спектральный портрет с полуосями $a=\|A\|$, $b=t$, и соответствующую клеточно-диагональную форму матрицы для флаттера при $v=380$.
6. Изобразить эpsilon-спектр, эллиптический спектральный портрет с полуосями $a=t$, $b=\|A\|$, и соответствующую клеточно-диагональную форму матрицы для флаттера при $v=390$.

Примеры вопросов для устного экзамена

1. Машинное представление числа, свойства бинарных операций, метод обратного анализа погрешностей
2. Определитель и число обусловленности, теорема о непрерывной зависимости решения СЛАУ от коэффициентов
3. Отражения Хаусхолдера, упрощение матрицы ортогональными отражениями
4. Обобщенные решения переопределенных и недоопределенных систем
5. Регуляризация по Годунову плохообусловленной системы.
6. Лемма о нулях характеристических многочленов главных миноров симметрической матрицы
7. Последовательность Штурма, теорема Штурма
8. Алгоритм бисекций для вычисления спектра симметрических матриц
9. Алгоритм бисекций для вычисления сингулярных чисел
10. Алгоритм бисекций для вычисления собственных значений кососимметрических матриц
11. Двусторонние последовательности Штурма и собственные векторы симметрических матриц
12. Проекторы на инвариантные подпространства матрицы, свойства
13. Непрерывность матричной резольвенты на кривой
14. Теорема о непрерывности матричного критерия отсутствия матричного спектра на кривой
15. Дискретное уравнение Ляпунова. Теорема о существовании и единственности решения
16. Уравнение Ляпунова. Теорема о существовании и единственности решения

17. Обращение теоремы Ляпунова, оценки решений дифференциальных уравнений.
18. Обращение теоремы о дискретном уравнении Ляпунова. Оценка решения дискретных уравнений
19. Эквивалентные интегральные представления решения уравнения Ляпунова
20. Эквивалентные интегральные представления решения дискретного уравнения Ляпунова
21. Вычисление функции Грина, Метод удвоений и ортогональных исключений
22. Рекуррентные формулы вычисления матричного критерия круговой дихотомии
23. Алгоритм дихотомии единичной окружностью
24. Связь линейной и круговой дихотомии
25. Связь эллиптической и круговой дихотомии
26. Связь круговой дихотомии матричного спектра и разделение многочлена на множители
27. Одномерные спектральные портреты, приведение матрицы к клеточно-диагональному виду.

Примеры вопросов для письменного теста

1. Представление вещественного числа в машинной арифметике с плавающей запятой.
2. Лемма о погрешностях бинарных арифметических операций, основание для метода обратного анализа погрешностей.
3. Обратно-устойчивый алгоритм.
4. Оценить погрешность сложения двух векторов
5. Оценить погрешность умножения матрицы на число
6. Число обусловленности матрицы
7. Теорема о возмущении решения СЛАУ при возмущении матрицы системы и правой части.
8. Ортогональные отражения Хаусхольдера: определение и свойства
9. Метод регуляризации плохо обусловленных СЛАУ по Годунову, обоснование выбора параметра регуляризации
10. Теорема Вейля
11. Определение последовательности Штурма
12. Теорема Штурма
13. Алгоритм Штурма вычисления собственных значений симметрических матриц
14. Двусторонние последовательности Штурма и их связь с собственными векторами симметрических матриц
15. Сведение задачи вычисления сингулярных чисел к симметрической спектральной проблеме.
16. Определение ε -спектра
17. Формулировка задачи о дихотомии спектра
18. Критерии дихотомии
19. Проекторы на инвариантные подпространства матрицы, их свойства
20. Теорема Ляпунова
21. Теорема Ляпунова в дискретном случае
22. Обращение теоремы Ляпунова, оценка решений линейных систем ОДУ
23. Обращение теоремы Ляпунова в дискретном случае, оценка решений дискретных уравнений.

24. Теорема о непрерывности матричного критерия дихотомии
25. Рекуррентная формула для вычисления матричного критерия дихотомии единичной окружностью
26. Алгоритм дихотомии матричного спектра единичной окружностью
27. Одномерный спектральный портрет. Приведение матрицы к клеточно-диагональному виду.
28. Как определить размерность подпространства, на которое проектирует заданный проектор P ?
29. Эквивалентные представления решения уравнения Ляпунова
30. Эквивалентные представления решения дискретного уравнения Ляпунова

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Бибердорф Э.А., *Гарантированная точность в прикладных задачах линейной алгебры*, учебное пособие, НГУ, 2008.
2. Бибердорф Э.А., Попова Н.И., *Гарантированная точность современных алгоритмов линейной алгебры*, Изд. СО РАН, Новосибирск, 2006
3. Годунов С.К., *Современные аспекты линейной алгебры*, Научная книга, Новосибирск, 2002.
4. Деммель Дж., *Вычислительная линейная алгебра*, М.: Мир, 2001
5. Самарский А.А., Введение в численные методы. Учебное пособие для вузов. 3-е изд., стер.-СПб.: Издательство "Лань", 2005г.

б) дополнительная литература:

6. Годунов С.К., Антонов А.Г., Кирилюк О.П., Костин В.И., *Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах*, Новосибирск, Наука, 1992.
7. Годунов С.К., *Современные аспекты линейной алгебры*, Новосибирск, Научная книга, 1997.
8. Голуб Дж, Ван Лоун Ч., *Матричные вычисления*, М.: Мир, 1999.

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

- Ноутбук, медиа-проектор, экран.
- Программное обеспечение для демонстрации слайд-презентаций.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО с учетом рекомендаций **и ПрООП ВПО**

Автор: _____ Бибердорф Элина Арнольдовна
к.ф.-м.н., доцент ММФ НГУ
с.н.с. ИМ СО РАН

Рецензент (ы) _____

Программа одобрена на заседании _____

от _____ года, протокол № _____
(Наименование уполномоченного органа вуза (УМК, НМС, Ученый совет))

