Программа курса
Обыкновенные дифференциальные уравнения
3-й и 4-й семестры, 2012-2013 учебный год

Основной курс для студентов II курса, I потока
Составил доцент, к.ф.-м.н. Г. А. Чумаков

1 Организационно-методический раздел

1.1 Название курса: Обыкновенные дифференциальные уравнения

Курс обыкновенные дифференциальные уравнения с одной стороны является общематематической дисциплиной, а с другой стороны выступает как продолжение и дополнение к курсу математического анализа.

1.2 Цели и задачи курса

Дисциплина "Обыкновенные дифференциальные уравнения" является основной для дальнейшего изучения таких разделов математики, как уравнения математической физики, функциональный анализ, вычислительная математика. С другой стороны, хорошие знание по этому курсу необходимы студентам, изучающим теоретическую механику механику сплошных сред и т.д.

1.3 Требования к уровню освоения содержания курса

По окончании изучения указанной дисциплины студент должен без труда уметь находить решения простейших обыкновенных дифференциальных уравнений.

1.4 Формы контроля

Для контроля усвоения дисциплины предусмотрены зачет (после 3-го семестра) и экзамен (после 4-го семестра). В течение каждого семестра выполняются контрольные работы (не реже одного раза в месяц) и принимаются коллоквиумы (1-2 коллоквиума в семестр).

2 Содержание дисциплины

2.1 Новизна курса

Новизна курса состоит в целенаправленном использовании понятия матричной экспоненты при изложении материала курса.

2.2 Содержание отдельных разделов и тем (III семестр)

2.2.1 Однородные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Примеры систем линейных дифференциальных уравнений. Векторно-матричные обозначения. Согласованные нормы векторов и матриц. Аналитическое представление решения. Свойства матричной экспоненты.

Задача Коши для систем линейных уравнений. Существование и единственность решения задачи Коши. Непрерывная зависимость решения от начальных данных и элементов матрицы A. Фундаментальная матрица решений. Формула Лиувилля. Полиномиальное представление матричной экспоненты. Простейшая оценка матричной экспоненты. Матричная экспонента как полином от A с коэффициентами, зависящими от t. Оценка Гельфанда-Шилова для матричной экспоненты.

Фундаментальная система решений уравнения высокого порядка. Определитель Вронского (вронскиан). Формула Лиувилля. Задача Коши для уравнения высокого порядка. Матрица Грамма. Вычисление матричной экспоненты с помощью приведения матриц к жордановой форме.

2.2.2 Неоднородные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Общее решение неоднородной системы уравнений. Априорная оценка. Краевая задачи на бесконечном интервале. Существование и единственность матрицы Грина. Краевая задача на отрезке. Условие разрешимости краевой задачи. Матрицы Грина краевой задачи на отрезке. Представление решения с помощью матрицы Грина. Краевая задача на отрезке для уравнения второго порядка, функция Грина.

2.2.3 Устойчивость по Ляпунову решений дифференциальных уравнений

Устойчивость и асимптотическая устойчивость по Ляпунову. Устойчивость нулевого решения системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Пример Винограда для линейных систем с переменными коэффициентами.

Матричное уравнение Ляпунова. Матричное уравнение с матрицей T специального вида и его решение. Разрешимость матричного уравнения Ляпунова. Случай эрмитовой матрицы C. Квадратичная функция Ляпунова.

2.2.4 Нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения. Автономные системы

Формулировка локальной теоремы существования (без доказательства). Теорема существования решения в целом. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Функция Ляпунова. Двусторонняя оценка стремления к нулю решений линейных систем. Теоремы Ляпунова и Четаева о неустойчивости.

2.2.5 Фазовые портреты систем обыкновенных дифференциальных уравнений на плоскости

Системы двух линейных уравнений. Классы подобия действительных 2×2 матриц. Фазовые портреты канонических систем обыкновенных дифференциальных уравнений на плоскости. Параметрический портрет линейной системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений.

2.3 Содержание отдельных разделов и тем (IV семестр)

2.3.1 Существование и единственность решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

Случай одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения. Доказательство теоремы существования и единственности: Теорема Пикара. Предварительные замечания. Метрика. Критерий Коши. Интегральный оператор. Сходимость итераций. Непрерывная и дифференцируемая зависимость решений от параметра. Замечание о существовании периодического решения. Существование периодического решения для одного обыкновенного дифференциального уравнения с периодической правой частью.

Обсуждение утверждений локальной теоремы существования для нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Лемма Адамара. Существования периодических решений для нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Формулировка теоремы Брауэра о неподвижной точке. Точки входа (выхода) из области по отношению к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Топологический принцип Важевского.

2.3.2 Существование и единственность решения (продолжение)

Случай линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Существование и единственность решения задачи Коши для линейного неоднородного уравнения. Основные свойства решений. Формула Лиувилля. Метод вариации постоянных.

Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. Теория Флоке. Устойчивость решений линейных систем с периодическими коэффициентами.

2.3.3 Проблема бифуркации периодического решения для систем второго порядка

Переход от периодической краевой задачи к алгебраической. Условие периодичности. Теорема Андронова-Хопфа о рождении периодического решения из стационарной точки.

Пример линейной системы с малым параметром. Уравнение Ван дер Поля.

2.3.4 Уравнения с частными производными первого порядка

Первые интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Независимые первые интегралы.

Линейное однородное уравнение с частными производными первого порядка. Характеристики. Представление общего решения линейного однородного уравнения с частными производными. Задача Коши.

Квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка.

2.4 Программа практических занятий

1. Решение однородных систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами ([1], §14; [2], §1, 4).

2. Матричная экспонента ([1], §14; [2], §1).

3. Уравнения высокого порядка с постоянными коэффициентами ([1], §11; [2], §1).

4. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения. Метод вариации произвольных постоянных ([1], §11, 14; [2], §1).

5. Линейные уравнения с переменными коэффициентами ([1], §5, 12).

6. Краевые задачи для дифференциальных уравнений. Задача Штурма-Лиувилля ([1], §13; [2], §2).

7. Нелинейные дифференциальные уравнения. Некоторые приемы интегрирования ([1], §1, 2, 4, 6, 7, 10).

8. Зависимость решений от параметров ([1], §18).

9. Классификация особых точек автономных систем двух дифференциальных уравнений ([1], §16–17).

10. Устойчивость решений по Ляпунову ([1], §15; [2], §3).

11. Уравнение в частных производных первого порядка ([1], §19–20).

Список литературы

[1] А. Ф. Филиппов, *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* Москва, Наука, 1992.

[2] С. К. Годунов и др. *Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* Новосибирск, НГУ, 1986.

[3] С. К. Годунов, *Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными клэффициентами.* Том 1: *Краевые задачи.* Учебное пособие. Новосибирск, НГУ, 1994.

[4] Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравения.* Москва, Мир, 1970.

[5] Д. Эрроусмит, К. Плейс, *Обыкновенные дифференциальные уравения. Качественная теория с приложениями.* Москва, Мир, 1986.

[6] K. O. Friedrichs, *Advanced Ordinary Differential Equations.* Courant Institute of Math. Sciences, New York, 1961.

2.5 Примеры задач, позволяющих контролировать степень усвоения материала курса

1. Докажите, что для любой матрицы $A = (a_{ij})$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ имеет место неравенство

$$|a_{ij}| \leq \|A\|.$$

2. Докажите простейшую оценку для нормы матричной экспоненты

$$\|\mathbf{e}^A\| \leq e^{\|A\|}.$$

3. Докажите, что отображение $A \to \mathbf{e}^A$ есть непрерывное отображение пространства матриц во множество обратимых матриц.
Подсказка: сначала докажите оценку

$$\|\mathbf{e}^{A+B} - \mathbf{e}^A\| \leq \mathbf{e}^{\|A\|+\|B\|} - \mathbf{e}^{\|A\|}.$$

4. Докажите, что если A и B перестановочны, то

$$\mathbf{e}^{A+B} = \mathbf{e}^A \cdot \mathbf{e}^B.$$

5. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Покажите, что

$$\mathrm{e}^{t(A+B)} \neq \mathrm{e}^{tA} \cdot \mathrm{e}^{tA}.$$

6. Если имеется решение системы уравнений $\dot{y} = Ay$ вида

$$y(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t} u_1 + \mathrm{e}^{\lambda_2 t} u_2, \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2,$$

то функция $\mathrm{e}^{\lambda_i} u_i$ для $i = 1, 2$ также является решением этой системы.

Пусть имеется решение

$$y(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}(tu + v).$$

Что можно сказать о показателе λ и векторах u и v, если u и v непропорциональны ?

7. Рассмотрим неоднородное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = A\,x(t) + \varphi(t),$$

Пусть $\varphi(t)$ экспоненциально убывает при $t \to +\infty$:

$$\|\varphi(t)\| \leq K \cdot \mathrm{e}^{-\sigma_0 t} \qquad (\sigma > 0).$$

Тогда всегда найдется хотя бы одно решение $x(t)$, также экспоненциально стремящееся к нулю при $t \to +\infty$:

$$\|x(t)\| \leq M \cdot \mathrm{e}^{-\sigma t}$$

(в качестве σ можно взять любое $0 < \sigma < \sigma_0$). Никаких предположений о свойствах матрицы коэффициентов A, о расположении ее характеристических корней для справедливости сформулированного утверждения делать не надо.

8. Даны матричные уравнения

$$\frac{d}{dt}X = A(t)X, \quad X(0) = E, \qquad \frac{d}{dt}Y = -YA(t), \quad Y(0) = E.$$

Показать, что $Y(t) = X^{-1}(t)$.

9. Задача Коши

$$y' = y^{1/3}, \qquad y(0) = 0, \qquad t \geq 0,$$

имеет решение

$$y(t) = \left(\frac{2t}{3}\right)^{3/2}.$$

Докажите, что это решение не является единственным.

10. Убедитесь, что для системы двух уравнений

$$y_1' = -y_2 - y_1^3, \qquad y_2' = y_1 - y_2^3$$

решения задачи Коши с начальными данными $y_1(0) = y_1^0$, $y_2(0) = y_2^0$ (y_1^0 и y_2^0 – произвольные) стремятся к нулю при $t \to +\infty$.

11. Покажите, что решение задачи Коши $y' = y$, $y(0) = \mu$ ($t \geq 0$, $\mu \in [-1, 1]$) непрерывно зависит от μ при $\mu = \mu_0 = 0$.

12. Пусть дано уравнение

$$y'' + q(x)y = 0,$$

где $q(x)$ – непрерывная функция на отрезке $[a, b]$. Доказать, что осциллирующее решение не может иметь точку накопления нулей на $[a, b]$; другими словами, все нули решения этого уравнения являются изолированными точками.

13. Для системы нелинейных уравнений

$$y_1' = \sin(y_1 + y_2), \qquad y_2' = \cos(y_1 - y_2)$$

найти все положения равновесия и исследовать их устойчивость.

14. Найти решение следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad t \geq 0, \qquad x \in \mathbb{R}^1,$$
$$u(t,x)\big|_{t=0} = 10.$$

15. Найти решение следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad t \geq 0, \qquad x \in \mathbb{R}^1,$$
$$u(t,x)\big|_{t=0} = 10.$$

16. Найти решение следующей задачи Коши:

$$x\,\frac{\partial u}{\partial t} - (t+1)\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad t \geq 0, \qquad x \in \mathbb{R}^1,$$
$$u(t,x)\big|_{t=0} = x.$$

17. Показать, что бифуркация Андронова-Хопфа происходит в стационарной точке $(0, 0)$ при $\mu = 0$ в следующих системах:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x + y, \\ \dot{y} = -x + \mu y - x^2 y, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = \mu x + y - x^3, \\ \dot{y} = -x + \mu y + 2y^3, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = \mu x + y - x^2, \\ \dot{y} = -x + \mu y + 2x^2. \end{cases}$$