Задачи к курсу «Введение в выпуклый анализ».

Локуциевский Л.В.

НГУ, Новосибирск 2018 г.

1. Докажите, что выпуклая оболочка компактного множества в конечномерном пространстве компактна. Приведите контрпример в бесконечномерном пространстве.

2. Приведите пример двух непересекающихся выпуклых подмножеств векторного пространства, которые невозможно разделить линейным функционалом.

3. Приведите пример выпуклой функции на конечномерном пространстве, разрывной в каждой граничной точке эффективной области.

4. Выведите явную формулу для операции $\square$ над двумя выпуклыми функциями, для которой $(f_1 \square f_2)^* = f_1^* + f_2^*$.

5. Пусть A – выпуклое подмножество нормированного пространства. Докажите, что его внутренность $\operatorname{int} A$ и замыкание $\operatorname{cl} A$ тоже выпуклы, а если $\operatorname{int} A \neq \emptyset$, то $A \subset \operatorname{cl} \operatorname{int} A$.

6. Опишите все такие функции $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d*}$, что $\langle g(x) - g(y), x - y\rangle = 0$ при всех $x, y \in \mathbb{R}^d$.

7. Пусть h – гладкая вогнутая возрастающая функция, $h : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ (т.е. $h' > 0$, $h'' < 0$), и $a_i > 0$ – заданные числа, $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим задачу $\sum_{i=1}^n a_i h(x_i) \to \max$ при условиях, что $x_i \geqslant 0$ и $\sum_{i=1}^n x_i \leqslant 1$. Докажите, что если $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ – решение (существующее по соображениям компактности), то $\sum_{i=1}^n \hat{x}_i = 1$ и найдется такое число $\gamma > 0$, что для любого индекса i если $a_i < \gamma$, то $\hat{x}_i = 0$, а если $a_i \geqslant \gamma$, то $h'(x_i) = \frac{\gamma}{a_i} h'(0)$.

8. Докажите лемму Фаркаша: пусть $f_0, f_1, \dots, f_n$ – линейные (однородные) функции на $\mathbb{R}^d$, тогда если для любого $x \in \mathbb{R}^d$ из неравенств $f_i(x) \geqslant 0$ при $i \geqslant 1$ следует неравенство $f_0(x) \geqslant 0$, то найдутся такие неотрицательные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, что $f_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$.

9. Докажите, что начало координат является минимумом функции $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + |x| + \frac{3}{2}x + 3x^2 + y^4 + \frac{1}{2}y$

10. Рассмотрим семейство задач $f_0(x) \to \min_x$ при условии, что $f_i(x) \leqslant y_i$, $i = 1, \dots, m$, где $x \in \mathbb{R}^n$ и $y \in R^m$. Докажите, что если выполнено условие Слейтера, то отсутствует разрыв двойственности с сопряженным семейством задач.

11. Рассмотрим задачу $f(x) + g(Ax) \to \min_x$, где $x \in \mathbb{R}^n$, $A : \mathbb{R}^n \to R^m$ – линейное отображение, а f и g – функции на $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$, соответственно. Покажите, что эту задачу можно включить в такое семейство задач, что двойственной будет $f^*(-A^*q) + g^*(q) \min_q$, где $q \in \mathbb{R}^{m*}$.

12. Верно ли, что множество крайних точек выпуклого компактного подмножества $\mathbb{R}^d$ компактно?

13. Рассмотрим задачу отыскания наименее уклоняющегося от нуля полинома заданной степени с единичным старшим коэффициентом, например, на отрезке $[-1; 1]$:

$$\max_{t \in [-1;1]} |t^n + a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} + \ldots + a_n| \to \min_{a_i}.$$

Докажите, что решением является полином Чебышева $2^{1-n} \cos(n \arccos t)$.