

**МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ 2011 г.  
ДЛЯ ВУЗОВ НЕМАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ.**

1. Найти все многочлены  $P(x)$  с действительными коэффициентами, удовлетворяющие неравенству  $P'(x)P''(x) \geq P(x)P'''(x)$  для любого  $x \in \mathbb{R}$ .
2. На окружности по разные стороны диаметра  $AC$  выбрали две точки  $B$  и  $D$ . Длины сторон четырёхугольника  $ABCD$  оказались целочисленными. Мог ли в таком случае периметр четырёхугольника оказаться простым числом?
3. Пусть  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2009} + \frac{1}{2010} = \frac{m}{n}$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ . Доказать, что  $m$  делится на 2011.
4. Существует ли функция  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , удовлетворяющая тождеству  $f(f(x)) = 1 - x^3$ ?
5. Вычислить интеграл  $\int_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{1+e^x}$