

**МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ 2011 г.
ДЛЯ ВУЗОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ.**

1. Пусть A — невырожденная матрица порядка $n > 1$ с положительными элементами. Докажите, что количество нулевых элементов матрицы A^{-1} не превосходит $n^2 - 2n$.
2. Квадрат $n \times n$ разбит на квадраты 1×1 . В некоторых из маленьких квадратов провели диагонали так, что никакие две не имеют общей точки. Определить максимально возможное число проведённых диагоналей.
3. Непрерывная функция $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенствам $xf(y) + yf(x) \leq 1$ для любых $x, y \in [0; 1]$. Доказать, что $\int_0^1 f(x) dx \leq \frac{\pi}{4}$.
4. Пусть x_n — наибольший корень уравнения $x^n = x^2 + x + 1$ при $n > 1$. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - 1)$.
5. Для каждого натурального n указать многочлен вида

$$x^n - x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-2} x^2 - n^2 a x + a,$$

все корни которого действительны и положительны. Найти все такие многочлены.