

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**Механика деформируемого твердого тела.
(теория пластичности)**

материалы к лекциям для студентов 4-го курса ММФ (2-й поток)
лектор: профессор Ю.М. Волчков

НОВОСИБИРСК
2009

В предлагаемом варианте электронного пособия содержится часть материала, который излагался на лекциях в 7-м семестре для студентов 2-го потока четвертого курса ММФ.

Программа курса "Теория пластичности" (4-й курс, 7-й семестр, 2-й поток, 2009 г.)

1. Тензор деформаций. Инварианты тензора деформаций. Интенсивность деформаций сдвига. Уравнения совместности деформаций. Тензор скоростей деформаций. Инварианты тензора скоростей деформаций. Интенсивность скоростей деформаций сдвига ([1], гл. 1., или [2], §§ 7.2-7.3, или [3], гл. 1).

2. Тензор напряжений. Инварианты тензора напряжений. Девиатор напряжений. Интенсивность касательных напряжений. Диаграмма Мора. Уравнения равновесия. ([1], гл. 1., или [2], §§ 7.4-7.7, или [3], гл. 2).

3. Поверхность текучести. Условие постоянства максимального касательного напряжения (условие текучести Треска - Сен-Венана). Условие постоянства интенсивности касательных напряжений (условие текучести Мизеса) ([1], гл. 2, §§ 6-10).

4. Поверхность нагружения. Догружение, разгрузка ([1], гл. 2, § 11).

5. Теория пластического течения. Основные гипотезы. Уравнения Прандтля - Рейса. Уравнения Сен-Венана - Мизеса ([1], гл. 2, § 13).

6. Понятие о предельной нагрузке. Поверхность текучести и предельная нагрузка системы из трех стержней. ([2], §§ 5.6-5.8).

7. Жесткопластическое тело. Ассоциированный закон текучести. Принцип максимума и постулат Друкера в теории идеальной пластичности. Постановка задач теории идеальной пластичности ([2], гл. 15, §§ 15.1-15.4).

8. Теорема о единственности распределения напряжений в пластических областях. Кинематически возможное поле скоростей и статически допустимое напряженное состояние. Экстремальные свойства предельных состояний текучести ([2], §§ 15.4-15.5).

9. Задача о плоской деформации жесткопластического тела. Основная система уравнений (уравнения для напряжений и скоростей деформаций). Линии скольжения и их основные свойства. Простые напряженные состояния. Граничные условия для напряжений. Основные краевые задачи. Определение поля скоростей. Поля скоростей для простых напряженных состояний ([1], гл. 5, §§ 31, 32, 35, 36, 38, 39, или [2], §§ 15.1-15.10).

10. Задача о вдавливании плоского штампа. Решение Прандтля, решение

Хилла ([1], гл. 5, §§ 45, или [2], § 15.10).

11. Кручение призматических стержней. Гипотезы Сен-Венана. Основные уравнения задачи о кручении призматических стержней. Функция напряжений. Уравнения упругого и пластического течения. Вычисление предельного момента ([1], гл. 4, §§ 27, 28).

При чтении лекций использована следующая

Литература.

1. Л. М. Качанов. Основы теории пластичности. М. Изд-во "Наука". 1969.
2. Ю. Н. Работнов. Механика деформируемого твердого тела. М. Изд-во "Наука". 1988.
3. В. В. Новожилов. Теория упругости. Судпромгиз. 1958.
4. Дж. Мейз. Теория и задачи механики сплошных сред. М. Изд-во ЛКИ. 2007.

Глава 1

Основные уравнения теории упругости

1.1 Деформация среды

1.1.1 Лагранжев и эйлеров способы описания сплошной среды

Деформация (лат. *deformatio* искажение) — изменение формы и размеров материального тела или его части. Обычно в механике сплошной среды, когда говорят о деформации, имеется в виду деформация бесконечно малой окрестности материальной точки.

Движение частиц, принадлежащих некоторому объёму материального тела и имевших в начальный момент времени $t = 0$ координаты X_i , можно описать с помощью уравнений

$$x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t), \quad \text{или} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \quad (1.1)$$

где x_i — координаты тех же материальных частиц в момент времени t . Будем считать, что начальная и конечная конфигурации отнесены к одной и той же декартовой системе координат с базисом $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$. Предполагается, что соответствие (1.1) взаимно однозначно и непрерывно с непрерывными частными производными любого порядка, который нам потребуется.

Способ описания движения материальной среды (1.1) называется *лагранжевым*.

Разрешая уравнения (1.1) относительно X_i , получим

$$X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad \text{или} \quad \mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t). \quad (1.2)$$

Способ описания движения материальной среды (1.2), в котором независимыми

переменными являются координаты материальных точек в текущем состоянии, называется *эйлеровым*.

При лагранжевом способе описания движения среды мы следим за изменениями, которые происходят в материальных частицах, При эйлеровом способе описания движения среды мы следим за изменениями, которые происходят в фиксированных точках пространства. В эти точки в различные моменты времени приходят различные частицы.

Если (1.2) является непрерывным взаимно однозначным соответствием с непрерывными частными производными, то соответствия (1.1) и (1.2) представлены единственной парой взаимно обратных функций. Необходимым и достаточным условием существования обратной функции является отличие от нуля якобиана

$$J = \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_i} \right|. \quad (1.3)$$

1.1.2 Градиенты деформации. Градиенты перемещения

Тензор

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right) \quad (1.4)$$

называется материальным градиентом деформации.

Тензор

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) \quad (1.5)$$

называется пространственным градиентом деформации.

Для материального и пространственного тензоров справедливы следующие соотношения

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \frac{\partial X_j}{\partial x_k} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial X_k} = \delta_{ik} \quad (1.6)$$

Введём вектор перемещения (рис. 1.1)

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X},$$

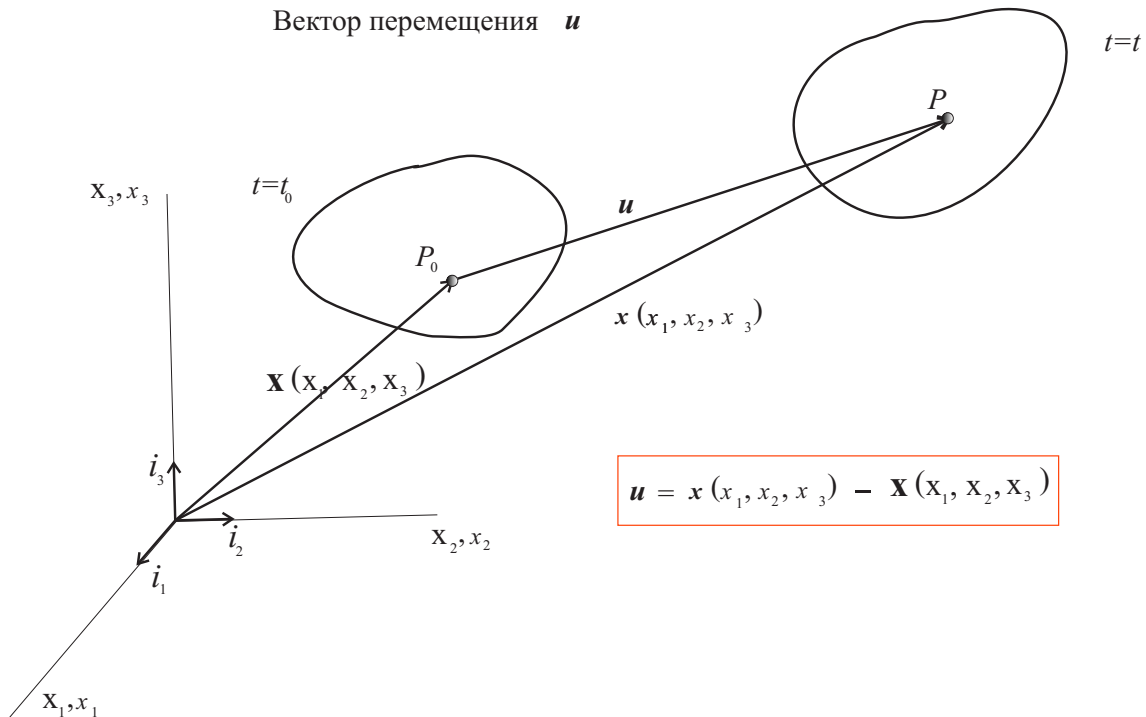


Рис. 1.1:

или в покомпонентной записи

$$u_i = x_i - X_i$$

Дифференцируя эти равенства по лагранжевым (материальным) и эйлеровым (пространственным) переменным, получим соответственно

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \delta_{ij} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j}$$

Тензор

$$\mathbf{J} = \mathbf{F} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right) \quad (1.7)$$

называется материальным градиентом перемещения.

Тензор

$$\mathbf{K} = \mathbf{I} - \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (1.8)$$

называется пространственным градиентом перемещения.

1.1.3 Тензоры конечных деформаций

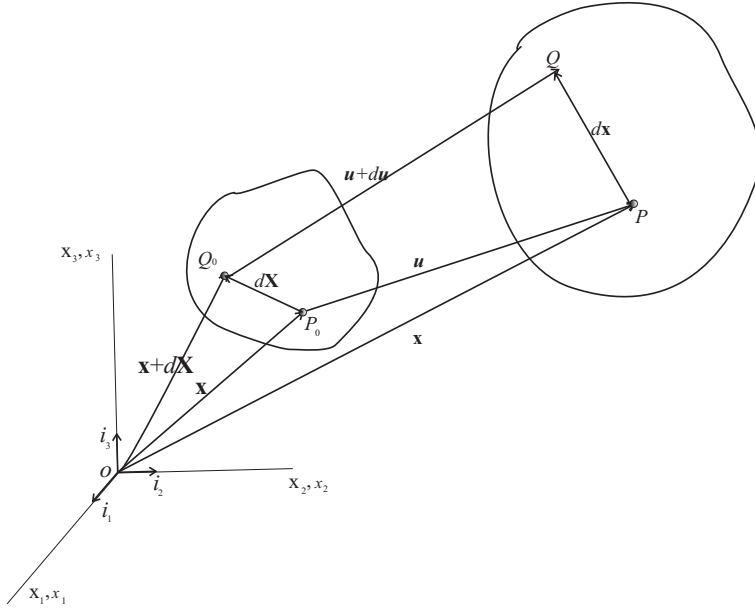


Рис. 1.2:

На рис. 1.2 начальная (недеформированная) и конечная (деформированная) конфигурации отнесены к совмещенным ортогональным декартовым осям координат $OX_1X_2X_3$ и $ox_1x_2x_3$. Соседние частицы, которые находились до деформации в точках P_0 и Q_0 перемещаются соответственно в точки P и Q деформированной конфигурации.

Квадрат бесконечно малого расстояния между точками P_0 и Q_0 есть

$$(dX)^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = dX_i dX_i = \delta_{ij} dX_i dX_j, \quad (1.9)$$

где

$$dX_i = \frac{\partial X_i}{\partial x_i} dx_i, \quad \text{или} \quad d\mathbf{X} = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{x}$$

Следовательно,

$$(dX)^2 = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} dx_i dx_j = C_{ij} dx_i dx_j, \quad \text{или} \quad (dX)^2 = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{C} \cdot d\mathbf{x} \quad (1.10)$$

Тензор второго ранга

$$C_{ij} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j}, \quad \text{или} \quad \mathbf{C} = \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{H} \quad (1.11)$$

называется *тензором деформаций Коши*.

В деформированной конфигурации квадрат бесконечно малого расстояния между точками P и Q равен

$$(dx)^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = dx_i dx_i = \delta_{ij} dx_i dx_j, \quad (1.12)$$

где

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_i} dX_i, \quad \text{или} \quad d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$$

Следовательно,

$$(dx)^2 = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} dX_i dX_j = G_{ij} dx_i dx_j, \quad \text{или} \quad (dx)^2 = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{G} \cdot d\mathbf{X} \quad (1.13)$$

Тензор второго ранга

$$G_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j}, \quad \text{или} \quad \mathbf{G} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad (1.14)$$

называется *тензором деформаций Грина*.

Рассмотрим разность между квадратами длин элементарных отрезков в конечном и начальном состояниях

$$(dx)^2 - (dX)^2.$$

Эту разность можно записать, используя ранее полученные выражения для $(dx)^2$ и $(dX)^2$, в следующем виде

$$(dx)^2 - (dX)^2 = \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right) dX_i dX_j = 2L_{ij} dX_i dX_j, \quad (1.15)$$

Тензор второго ранга

$$L_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right) \quad \text{или} \quad \mathbf{L}_G = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I})$$

называется *лагранжевым тензором конечных деформаций (или тензором конечных деформаций Грина)*.

Ту же самую разность можно записать в другом виде

$$(dx)^2 - (dX)^2 = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j = 2E_{ij} dx_i dx_j, \quad (1.16)$$

Тензор второго ранга

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \right) \quad \text{или} \quad \mathbf{E}_A = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{H})$$

называется *эйлеровым тензором конечных деформаций* (или *тензором конечных деформаций Альманси*).

Лагранжев и эйлеров тензоры конечных деформаций можно выразить через градиенты перемещений, используя формулы

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \delta_{ij} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j}$$

. В результате получим следующие представления для этих тензоров:

$$L_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \quad (1.17)$$

и

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (1.18)$$

1.1.4 Тензоры бесконечно малых деформаций

Если все компоненты градиента перемещений $\partial u_i / \partial X_j$ малы по сравнению с единицей ($\partial u_i / \partial X_j \ll 1$), то в (1.17) можно пренебречь произведениями. В результате получим *лагранжев тензор бесконечно малых деформаций*

$$l_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right). \quad (1.19)$$

Аналогично, если все компоненты градиента перемещений $\partial u_i / \partial x_j$ малы по сравнению с единицей ($\partial u_i / \partial x_j \ll 1$), то в (1.18) можно пренебречь произведениями. В результате получим *эйлеров тензор бесконечно малых деформаций*

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.20)$$

Если не только градиент перемещения мал, но малы сами перемещения, то можно пренебречь различием между лагранжевскими и эйлеровскими координатами.

Таким образом, если и перемещения, и их градиенты достаточно малы, то

$$l_{ij} = \varepsilon_{ij}. \quad (1.21)$$

1.1.5 Относительное перемещение. Тензор линейного поворота. Вектор поворота

Вектор $d\mathbf{u}$ называется вектором относительного перемещения частицы, расположенной первоначально в точке Q_0 , относительно частицы, расположенной в точке P_0 (рис. 1.2).

Очевидно, что

$$du_i = \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right)_{P_0} dX_j \quad (1.22)$$

Вектор с компонентами du_i/dX называется вектором относительного перемещения, отнесённым к единице длины рассматриваемого отрезка (dX — модуль бесконечно малого вектора $d\mathbf{X}$). Пусть ν_i — компоненты единичного направляющего вектора отрезка $d\mathbf{X}$ ($dx_i = \nu_i dX$). Тогда

$$\frac{du_i}{dX} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \frac{\partial X_j}{\partial X} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \nu_j. \quad (1.23)$$

Разложим материальный градиент перемещения на симметричную и антисимметричную части. Тогда вектор можно записать в виде

$$du_i = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \right] dX_j \quad (1.24)$$

Первое слагаемое в квадратных скобках — лагранжев тензор линейной деформации l_{ij} . Второе слагаемое в квадратных скобках называется *лагранжевым тензором линейного поворота*:

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right). \quad (1.25)$$

Если тензор деформации тождественно равен нулю в окрестности точки, то деформация окрестности этой точки будет бесконечно малым поворотом абсолютно твердого тела. Этот бесконечно малый поворот можно представить лагранжевым вектором линейного поворота:

$$du_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} W_{kj} \quad \text{или} \quad \mathbf{w} = \frac{1}{2} \nabla_X \times \mathbf{u}. \quad (1.26)$$

В этом случае относительное перемещение записывается в следующем виде:

$$du_i = \varepsilon_{ijk} w_j dX_k \quad \text{или} \quad d\mathbf{u} = \mathbf{w} \times d\mathbf{X}. \quad (1.27)$$

Все рассуждения, проведённые при лагранжевом описании вектора $d\mathbf{u}$, можно повторить для случая эйлерова описания этого вектора. Аналогами формул (1.22) – (1.27) будут следующие.

$$du_i = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_{P_0} dx_j; \quad (1.28)$$

$$\frac{du_i}{dx} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \mu_j; \quad (1.29)$$

$$du_i = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] dx_j \quad (1.30)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.31)$$

$$du_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \omega_{kj} \quad \text{или} \quad \mathbf{w} = \frac{1}{2} \nabla_x \times \mathbf{u}. \quad (1.32)$$

$$du_i = \varepsilon_{ijk} \omega_j dx_k \quad \text{или} \quad d\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{x}. \quad (1.33)$$

1.1.6 Геометрический смысл компонент тензоров линейных деформаций

В случае малых деформаций в равенстве (1.15) лагранжев тензор конечных деформаций можно заменить лагранжевым тензором линейных деформаций l_{ij} :

$$(dx)^2 - (dX)^2 = (dx - dX)(dx + dX) = 2l_{ij}dX_i dX_j$$

При малых деформациях $dx \simeq dX$. Поэтому последнее равенство можно переписать в следующем виде:

$$\frac{dx - dX}{dX} = l_{ij} \frac{dX_i}{dX} \frac{dX_j}{dX} = l_{ij} \nu_i \nu_j \quad (1.34)$$

Напомним, что ν_i — направляющие косинусы отрезка $d\mathbf{X}$. Левая часть равенства (1.34) — относительное удлинение (коэффициент относительного удлинения) линейного элемента, первоначально имевшего направляющие косинусы dX_i/dX . В частности, из (1.34) следует, что диагональные элементы тензора бесконечно малых деформаций l_{ii} представляют собой относительные удлинения линейных элементов, расположенных до деформации вдоль осей x_i .

Напомним геометрический смысл недиагональных элементов тензора бесконечно малых деформаций. Рассмотрим два линейных элемента, расположенных до деформации вдоль осей X_1 и X_2 соответственно. Угол между ними равен $\pi/2$. В результате деформации эти элементы повернутся, угол между ними в деформированном состоянии обозначим через θ_{12} . С точностью до величин много меньших единицы $\cos \theta_{12} = 2l_{12}$. Обозначим через $\gamma_{12} = \pi/2 - \theta_{12}$. В случае малых деформаций

$$\gamma_{12} \simeq \sin(\pi/2 - \theta_{12}) = \cos \theta_{12} = 2l_{12}. \quad (1.35)$$

Аналогичный смысл имеют величины l_{23} и l_{31} .

Следовательно, недиагональные члены тензора бесконечно малых деформаций представляют собой половину изменения углов между двумя первоначально ортогональными линейными элементами, расположенными вдоль координатных осей.

Для деформаций, для которых справедливо предположение $l_{ij} = \varepsilon_{ij}$ различия между эйлеровым и лагранжевым подходами нет.

В случае конечных деформаций такого наглядного геометрического смысла компоненты тензора конечных деформаций не имеют. Можно показать, что в случае конечных деформаций имеют место следующие соотношения. Относительное удлинение $L_{(i)}$ волокон, направленных до деформации вдоль координатных осей X_i вычисляется по формуле:

$$L_{(i)} = \sqrt{1 + 2L_{ii}} - 1. \quad (1.36)$$

Изменения углов γ_{ij} между двумя первоначально ортогональными линейными элементами, расположенными вдоль координатных осей, связаны с компонентами тензора конечных деформаций соотношениями:

$$\sin \gamma_{ij} = \frac{2L_{ij}}{\sqrt{1 + 2L_{ii}}\sqrt{1 + 2L_{jj}}} \quad (1.37)$$

1.1.7 Преобразование компонент тензоров деформаций при повороте системы координат

Введённые выше тензоры L_{ij} , E_{ij} , l_{ij} , ε_{ij} являются декартовыми тензорами второго ранга.

Если оси X'_i получены из осей X_i поворотом с ортогональной матрицей $[b_{ij}]$, то компоненты лагранжевых тензоров в соответствующих системах координат связаны соотношениями:

$$L'_{ij} = b_{ip}b_{jq}L_{pq}, \quad l'_{ij} = b_{ip}b_{jq}l_{pq}.$$

Если оси x'_i получены из осей x_i поворотом с ортогональной матрицей $[a_{ij}]$, то компоненты эйлеровых тензоров в соответствующих системах координат связаны соотношениями:

$$E'_{ij} = a_{ip}a_{jq}E_{pq}, \quad \varepsilon'_{ij} = a_{ip}a_{jq}\varepsilon_{pq}.$$

1.1.8 Главные деформации. Инварианты тензоров деформаций.

Лагранжев и эйлеров тензоры бесконечно малых деформаций являются симметричными декартовыми тензорами второго ранга. Их главные направления и главные значения находятся стандартными методами. Эти тензоры имеют три главных направления, три главных значения и три независимых инварианта.

Так, главные значения лагранжева тензора бесконечно малых деформаций определяются как корни кубического уравнения

$$|l_{ij} - \delta_{ij}l| = 0, \quad \text{или} \quad l^3 - I_{\mathbf{L}}l^2 + II_{\mathbf{L}}l - III_{\mathbf{L}} = 0.$$

Это уравнение имеет три вещественных корня $l_{(1)}$, $l_{(2)}$, $l_{(3)}$. Направляющие косинусы n_i главных направлений определяются из решения системы

$$(l_{ij} - \delta_{ij}l_{(k)})n_i = 0.$$

Коэффициенты характеристического уравнения являются соответственно первым, вторым и третьим инвариантами лагранжева тензора бесконечно малых деформаций:

$$I_{\mathbf{L}} = l_{ii} = \text{tr}\mathbf{L}, \quad II_{\mathbf{L}} = \frac{1}{2}(l_{ii}l_{jj} - l_{ij}l_{ij}), \quad III_{\mathbf{L}} = |l_{ij}| = \det\mathbf{L}.$$

Первый инвариант является суммой главных деформаций

$$I_{\mathbf{L}} = l_{(1)} + l_{(2)} + l_{(3)}.$$

Его физический смысл заключается в следующем. Рассмотрим элементарный прямоугольный параллелепипед, ребра которого параллельны главным направлениям деформации. Изменение этого объема (на единицу первоначального

объема) в результате деформации вычисляется по формуле

$$D_0 = \frac{\Delta V_0}{V_0} = \frac{dX_1(1 + l_{(1)})dX_2(1 + l_{(2)})dX_3(1 + l_{(3)}) - dX_1dX_2dX_3}{dX_1dX_2dX_3}$$

При малых деформациях с точностью до величин малых по сравнению с единицей получаем

$$D_0 = l_{(1)} + l_{(2)} + l_{(3)} = \mathbf{I}_L.$$

Величина D_0 называется коэффициентом объемного (кубического) расширения.

Для эйлерова тензора деформаций инварианты выражаются через главные деформации следующим образом:

$$\mathbf{I}_E = \varepsilon_{(1)} + \varepsilon_{(2)} + \varepsilon_{(3)},$$

$$\mathbf{II}_E = \varepsilon_{(1)}\varepsilon_{(2)} + \varepsilon_{(2)}\varepsilon_{(3)} + \varepsilon_{(3)}\varepsilon_{(1)},$$

$$\mathbf{III}_E = \varepsilon_{(1)}\varepsilon_{(2)}\varepsilon_{(3)}.$$

Коэффициент объемного расширения при эйлеровом описании вычисляется по формуле:

$$D = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{(1)} + \varepsilon_{(2)} + \varepsilon_{(3)}.$$

1.1.9 Шаровой тензор и девиатор деформаций.

Как лагранжевы так эйлеровы тензоры деформаций можно разложить на шаровой тензор и девиатор:

$$l_{ij} = d_{ij} + \delta_{ij}l_{kk}/3, \quad \varepsilon_{ij} = e_{ij} + \delta_{ij}\varepsilon_{kk}/3.$$

Первые инварианты d_{ii} и e_{ii} девиаторов деформаций тождественно равны нулю. Поэтому девиаторы описывают деформацию сдвига, для которой объемное расширение равно нулю.

1.1.10 Уравнения совместности деформаций.

Компоненты тензора деформаций ε_{ij} выражаются через три компоненты вектора перемещений:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.38)$$

Уравнения (1.38) можно рассматривать как систему шести уравнений в частных производных для определения трех компонент вектора перемещения u_i . Это переопределенная система и в общем случае не имеет решения при произвольном выборе компонент тензора деформаций ε_{ij} . Для того, чтобы существовали однозначные и непрерывные компоненты вектора перемещения, компоненты деформаций ε_{ij} должны удовлетворять условиям разрешимости системы уравнений (1.38). Для тензора бесконечно малых деформаций независимых условий совместности шесть:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1}\end{aligned}$$

(1.39)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2}\end{aligned}$$

1.2 Напряжения

1.2.1 Общие свойства поля напряжений

Рассмотрим покоящуюся среду, находящуюся в равновесии под действием каких-либо распределенных сил, приложенных к ней. Эти силы могут быть приложены к поверхности тела, заполненного средой, или к его внутренности. Мы предположим, что эти последние (они называются массовыми или объемными силами) описываются векторной плотностью распределения $F(x_1, x_2, x_3)$ так, что полная сила, действующая на элементарный внутренний объем $dx_1 dx_2 dx_3$ равна $F(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3$.

Поверхностная сила описывается поверхностной векторной плотностью $P(x_1, x_2, x_3)$, определенной только в точках поверхности, а полная сила, действующая на элемент поверхности ds , равна $P ds$. Компоненты векторных плотностей F и P будем предполагать кусочно гладкими функциями точек объема или поверхности соответственно. Тем самым исключаются из рассмотрения случаи, когда приложенные силы сосредоточены в точках или когда объемные силы сосредоточены на внутренних поверхностях. В дальнейшем удобно представить плотность F в виде $\rho \mathbf{F}$, где $\rho = \rho(x_1, x_2, x_3)$ — плотность среды. *Плотность* — это масса, заключенная в единице объема. Точнее было бы сказать, что *плотность* — это отношение массы бесконечно малого элемента к его объему. Итак \mathbf{F} — это массовая плотность силы, т.е. сила, действующая на единицу массы. Компоненты вектора \mathbf{F} массовой плотности силы будем обозначать через F_i :

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

Сделаем в напряженной среде, находящейся в равновесии, надрез вдоль какой либо плоскости $n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = \text{const}$. Чтобы этот надрез не нарушил в среде равновесия, к обеим его берегам нужно приложить поверхностные распределенные силы. Сейчас мы **постулируем**, что в каждой точке разреза плотность силы, приложенной к одному берегу должна быть равна по величине и противоположна по направлению плотности силы, действующей на другой берег разреза. В дальнейшем это предположение будет обосновано при некоторых предположениях.

Рассмотрим объем, занимаемый средой и рассекаемый разрезом на две части,

которые назовем условно “нижней” и “верхней”. “Верхним” объемом назовем тот объем, в сторону которого направлен вектор нормали $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, задающий направление разреза, а “нижним” берегом разреза — берег, примыкающий к “нижнему” объему (рис. 1.3).

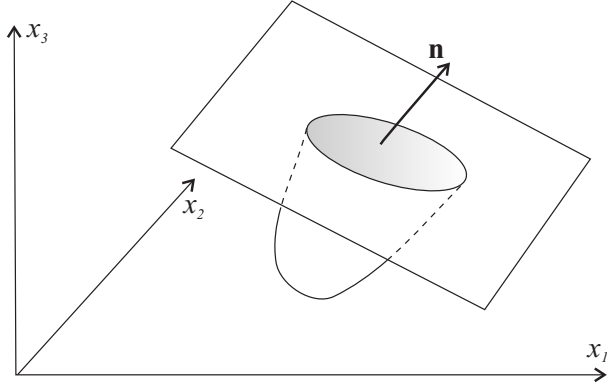


Рис. 1.3:

Плотность поверхностной силы (сила на единицу площади), приложенной к “нижнему” берегу, называется *вектором напряжения* и обозначается Σ . Ясно, что напряжение, вообще говоря зависит как от точки приложения (x_1, x_2, x_3) , так и от направления, задаваемого единичным вектором нормали с компонентами (n_1, n_2, n_3) . Заметим, что $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$. Итак, $\Sigma = \Sigma(x_1, x_2, x_3; n_1, n_2, n_3)$. То, что на противоположных берегах надреза напряжения противоположно направлены, записывается равенством

$$\Sigma(x_1, x_2, x_3; n_1, n_2, n_3) = -\Sigma(x_1, x_2, x_3; -n_1, -n_2, -n_3).$$

Компоненты вектора Σ обозначаются $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, т.е.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_i = \sigma_i(x_1, x_2, x_3; n_1, n_2, n_3).$$

Специальные обозначения используются для обозначения компонент вектора напряжения на площадках, перпендикулярных координатным осям. На площадках, нормаль к которым направлена вдоль положительного направления оси x_1 ($n_1 = 1, n_2 = 0, n_3 = 0$), компоненты вектора напряжения обозначаются через $\sigma_{11}, \sigma_{21}, \sigma_{31}$:

$$\begin{aligned} \sigma_1(x_1, x_2, x_3; 1, 0, 0) &= \sigma_{11}(x_1, x_2, x_3), \\ \sigma_2(x_1, x_2, x_3; 1, 0, 0) &= \sigma_{21}(x_1, x_2, x_3), \\ \sigma_3(x_1, x_2, x_3; 1, 0, 0) &= \sigma_{31}(x_1, x_2, x_3), \end{aligned}$$

Аналогично, через $\sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{32}$ обозначаются компоненты вектора напряжения на площадках с нормалью, направленной вдоль оси x_2 :

$$\begin{aligned}\sigma_1(x_1, x_2, x_3; 0, 1, 0) &= \sigma_{12}(x_1, x_2, x_3), \\ \sigma_2(x_1, x_2, x_3; 0, 1, 0) &= \sigma_{22}(x_1, x_2, x_3), \\ \sigma_3(x_1, x_2, x_3; 0, 1, 0) &= \sigma_{32}(x_1, x_2, x_3),\end{aligned}$$

а через $\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}$ — составляющие вектора напряжения на площадках с нормалью вдоль оси x_3 :

$$\begin{aligned}\sigma_1(x_1, x_2, x_3; 0, 0, 1) &= \sigma_{13}(x_1, x_2, x_3), \\ \sigma_2(x_1, x_2, x_3; 0, 0, 1) &= \sigma_{23}(x_1, x_2, x_3), \\ \sigma_3(x_1, x_2, x_3; 0, 0, 1) &= \sigma_{33}(x_1, x_2, x_3).\end{aligned}$$

Совокупность компонент векторов напряжений на площадках, перпендикулярных координатным осям, обычно записывается в виде квадратной матрицы

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \|\sigma_{ij}\|,$$

которая называется *тензором напряжений*. При ортогональных преобразованиях декартовых координат эта таблица, описывающая напряженное состояние в некоторой точке (x_1, x_2, x_3) , преобразуется так, как должен преобразовываться ортогональный тензор.

Первый столбец матрицы $\|\sigma_{ij}\|$ состоит из компонент вектора напряжений на площадке с нормалью вдоль оси x_1 , второй и третий — соответственно из компонент вектора напряжений на площадках с нормальями, параллельными координатным осям x_2 и x_3 .

Задание тензора напряжений полностью задает напряженное состояние, позволяя вычислить напряжение на любой площадке.

Чтобы обосновать это утверждение, надо воспользоваться тем, что рассматриваемая среда находится в равновесии под действием приложенных к ней массовых и поверхностных сил. Выделим из среды произвольный¹ объем V , ограниченный поверхностью S , напишем условие равновесия среды заключенной в выделенном объеме:

$$\int_S \int \Sigma(x_1, x_2, x_3; n_1, n_2, n_3) dS + \int_V \int \int \rho \mathbf{F} dx_1 dx_2 dx_3 = 0.$$

Это условие состоит в равенстве нулю суммы всех сил, приложенных к объему. Через n_1, n_2, n_3 обозначены компоненты единичной нормали к поверхности S в точке x_1, x_2, x_3 . Покомпонентно условие равновесия записывается в виде трех равенств

$$\int \int_S \sigma_i(x_1, x_2, x_3; n_1, n_2, n_3) dS + \int \int \int_V \rho F_i dx_1 dx_2 dx_3 = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Лемма. Если непрерывные кусочно гладкие функции $\sigma(x_1, x_2, x_3; n_1, n_2, n_3)$ и $f(x_1, x_2, x_3)$ таковы, что для любого внутреннего объема V , ограниченного поверхностью S , имеет место равенство

$$\int \int_S \sigma(x_1, x_2, x_3; n_1, n_2, n_3) dS + \int \int \int_V f dx_1 dx_2 dx_3 = 0,$$

то зависимость $\sigma(x_1, x_2, x_3; n_1, n_2, n_3)$ от n_1, n_2, n_3 описывается формулой

$$\begin{aligned} \sigma(x_1, x_2, x_3; n_1, n_2, n_3) = & n_1 \sigma(x_1, x_2, x_3; 1, 0, 0) + \\ & + n_2 \sigma(x_1, x_2, x_3; 0, 1, 0) + n_3 \sigma(x_1, x_2, x_3; 0, 0, 1). \end{aligned}$$

В формулировке леммы можно отказаться от требования непрерывности σ по последним трем аргументам n_1, n_2, n_3 , но мы не будем этого делать, чтобы не усложнять доказательство. Из этой леммы, очевидно, вытекает, что $\sigma_i = \sigma_{i1}n_1 + \sigma_{i2}n_2 + \sigma_{i3}n_3$ или в векторной форме

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

В частности, отсюда следует равенство

$$\Sigma(x_1, x_2, x_3; n_1, n_2, n_3) = -\Sigma(x_1, x_2, x_3; -n_1, -n_2, -n_3).$$

которое мы постулировали в начале пункта.

Доказательство Леммы.

До сих пор мы предполагали, что среда находится в равновесии под действием приложенных сил. На самом деле все наши выводы относительно свойств поля напряжений справедливы и для движущейся среды, находящейся под действием гладко распределенных массовых и поверхностных сил, если в рассматриваемом объеме скорости и ускорения частиц ограничены и описываются

кусочно гладкими непрерывными функциями координат и времени. Чтобы убедиться в этом, повторим кратко еще раз проводившиеся рассмотрения, но уже с учетом новых обстоятельств.

Начнем с того, что в напряженной движущейся среде в некоторый момент времени t сделаем вдоль какой-либо плоскости $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = \text{const}$ ($n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$) надрез. Предположим, что сделав надрез, мы прикладываем к его берегам такие дополнительные усилия, чтобы движение, благодаря этим усилиям, в среде с надрезом было бы точно таким же, каким оно было в его отсутствие. Это дополнительное усилие, приложенное к нижнему берегу надреза на площадке с нормалью (n_1, n_2, n_3) и площадью dS , проходящей через точку (x_1, x_2, x_3) обозначим через $dS\mathbf{\Sigma}(x_1, x_2, x_3; n_1, n_2, n_3)$, а вектор плотности (на единицу площади) этой силы $\mathbf{\Sigma}$ с компонентами $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ будем называть *напряжением* на этой площадке.

При повороте площадки, проходящей через некоторую фиксированную точку, вектор $\mathbf{\Sigma}$ преобразуется точно так же, как и в покоящейся среде, находящейся в равновесии. Чтобы обосновать это утверждение, мы должны воспользоваться законом сохранения количества движения (импульса). Рассмотрим некоторую гладкую поверхность S , ограничивающую объем V . Выделим массу среды, заполняющую в некоторый момент времени t этот объем V . Пусть плотность среды обозначается как $\rho = \rho(x_1, x_2, x_3; t)$, компоненты вектора скорости как $u_i(x_1, x_2, x_3; t)$. Тогда импульс (количество движения) выделенной массы вычислится как вектор с компонентами

$$p_i = \int \int \int_{V(t)} \rho(x_1, x_2, x_3; t) u_i(x_1, x_2, x_3; t) dx_1 dx_2 dx_3.$$

Выделив этот объем в некоторый момент времени, мы должны во все последующие моменты времени считать его изменяющимся, так как образован движущейся средой, границы которой в начальный момент времени совпадали с границей выделенного в этот момент объема.

Производная $\frac{dp_i(t)}{dt}$ от компонент количества движения во времени может быть вычислена через ускорения

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_i}{\partial x_3}$$

частиц среды, составляющих объем $V(t)$:

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \int \int \int_{V(t)} \rho \frac{du_i}{dt} dx_1 dx_2 dx_3.$$

Масса вещества в выделенном объеме

$$m = \int \int \int_{V(t)} \rho(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3$$

не зависит от времени.

Производная по времени от импульса является вектором $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ с компонентами $\frac{dp_i(t)}{dt}$, который должен равняться сумме сил, приложенных к массе вещества, заключенной в выделенном движущемся объеме:

$$\begin{aligned} & \int \int_{S(t)} \boldsymbol{\Sigma}(x_1, x_2, x_3; n_1, n_2, n_3; t) dS + \\ & + \int \int \int_{V(t)} \rho(x_1, x_2, x_3, t) \mathbf{F}(x_1, x_2, x_3, t) dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \end{aligned}$$

Двойной интеграл берется по поверхности, ограничивающей выделенный объем (n_1, n_2, n_3 — компоненты нормали к поверхности). Покомпонентная запись этого равенства

$$\begin{aligned} & \int \int_{S(t)} \sigma_i(x_1, x_2, x_3; n_1, n_2, n_3; t) dS + \\ & + \int \int \int_{V(t)} \rho(x_1, x_2, x_3, t) \left[F_i(x_1, x_2, x_3, t) - \frac{du_i}{dt} \right] dx_1 dx_2 dx_3 = 0 \end{aligned}$$

отличается от условия равновесия в стационарном случае лишь тем, что F_i теперь надо заменить на $F_i - \frac{du_i}{dt}$. Точно так же, как и в стационарном случае, используя ту же самую лемму, мы доказываем, что напряжения на любой площадке с единичным вектором нормали (n_1, n_2, n_3) определяются по напряжениям на площадках, параллельных координатным плоскостям по формуле

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}.$$

Эта матричная запись говорит о том, что для того, чтобы получить вектор напряжения на площадке с нормалью достаточно применить матрицу тензора

напряжений к этому единичному вектору нормали. Тензор напряжений полностью определяет напряженное состояние в точке, как в покоящейся, так и в движущейся среде. Здесь, однако, надо еще раз подчеркнуть, что в наших рассуждениях мы существенно пользовались ограниченностью ускорений.

Зададимся теперь вопросом о том,

однозначно ли определяется тензор напряжений из закона сохранения количества движения при заданном распределении массовых и поверхностных сил в случае, если закон движения среды, определяемый полем ускорений, известен.

Начнем с интегральной покомпонентной записи уже известного нам равенства, связывающего напряжения с ускорениями и массовыми силами:

$$\int_{S(t)} (\sigma_{i1}n_1 + \sigma_{i2}n_2 + \sigma_{i3}n_3)dS + \int_{V(t)} \int \int \rho \left[F_i - \frac{du_i}{dt} \right] dx_1 dx_2 dx_3 = 0.$$

В этой записи учтена зависимость напряжений от направления нормали к площадке dS . Так как объем вместе с ограничивающей его поверхностью, может быть для любого момента времени выбран произвольно (после этого для других он уже определяется законом движения), то можно считать, что при любом фиксированном равенство имеет место для любой области интегрирования. При достаточной гладкости всех участвующих функций, как известно из анализа, устанавливается эквивалентность этого равенства дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} = \rho \left(F_i - \frac{du_i}{dt} \right), \quad i = 1, 2, 3.$$

Вопрос о том, однозначно ли определяется тензор напряжений, теперь может быть сформулирован как вопрос о том, единственно ли решение системы из трех выписанных дифференциальных уравнений при заданных правых частях $(\rho (F_i - \frac{du_i}{dt}))$ и заданных граничных значениях $\sigma_{i1}n_1 + \sigma_{i2}n_2 + \sigma_{i3}n_3$ поверхностных сил (n_1, n_2, n_3 — компоненты единичного вектора нормали к граничной поверхности). Покажем, что единственности нет. Для этого достаточно построить ненулевое решение однородной системы

$$\frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

внутри некоторой области, удовлетворяющее на границе условиям

$$\begin{aligned}\sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 &= 0, \\ \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3 &= 0, \\ \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3 &= 0.\end{aligned}$$

В качестве области возьмем куб $-1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1, -1 \leq x_3 \leq 1$, для которого граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_{11} = \sigma_{21} = \sigma_{31} &= 0 \quad \text{при } x_1 = \pm 1 \\ \sigma_{12} = \sigma_{22} = \sigma_{32} &= 0 \quad \text{при } x_2 = \pm 1 \\ \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} &= 0 \quad \text{при } x_3 = \pm 1\end{aligned}$$

Пример ненулевого решения, удовлетворяющего однородным дифференциальным уравнениям и краевым условиям, дается формулами

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \cos \pi x_1 \cos \pi x_2 + \cos \pi x_2, \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} &= \sin \pi x_1 \sin \pi x_2, \\ \sigma_{22} &= \cos \pi x_1 \cos \pi x_2 + \cos \pi x_1, \\ \sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_{23} = \sigma_{32} &= 0.\end{aligned}$$

Таким образом, для определения поля напряжений должны быть привлечены дополнительные соображения и постулаты.

Очень важное свойство таблицы $\|\sigma_{ij}\|$, характеризующей напряженное состояние в некоторой точке, может быть получено из рассмотрения закона сохранения момента количества движения.

Моментом количества движения, заключенным в некотором объеме сплошной среды, называют интеграл по объему

$$\int \int \int_{V(t)} \mathbf{x} \times (\rho \mathbf{u}) dx_1 dx_2 dx_3$$

от векторного произведения радиуса вектора \mathbf{x} (с компонентами x_1, x_2, x_3) на вектор плотности импульса $\rho \mathbf{u}$ (его компоненты $\rho u_1, \rho u_2, \rho u_3$). В этом определении момент вычисляется относительно начала координат. Если мы хотим вычислить момент количества движения относительно какой-либо другой точки \mathbf{x}_0 , то мы должны использовать интеграл

$$\int \int \int_{V(t)} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times (\rho \mathbf{u}) dx_1 dx_2 dx_3,$$

определяющий вектор с компонентами

$$\begin{aligned} & \int_{V(t)} \int \int [(x_2 - x_{20})u_3 - (x_3 - x_{30})u_2] \rho dx_1 dx_2 dx_3, \\ & \int_{V(t)} \int \int [(x_3 - x_{30})u_1 - (x_1 - x_{10})u_3] \rho dx_1 dx_2 dx_3, \\ & \int_{V(t)} \int \int [(x_1 - x_{10})u_2 - (x_2 - x_{20})u_1] \rho dx_1 dx_2 dx_3. \end{aligned}$$

В качестве \mathbf{x}_0 часто выбирается центр тяжести рассматриваемой массы вещества.

Изменение с течением времени момента количества движения в некотором движущемся объеме, образованным некоторыми фиксированными частицами рассматриваемой среды, происходит за счет момента приложенных к этой массе внешних сил.

Таким образом, в дальнейшем мы исключаем из рассмотрения источники моментов.

В классической среде для любой фиксированной точки $\mathbf{x}_0(x_{10}, x_{10}, x_{10})$ и для любого движущегося объема $V(t)$, образованного во все моменты времени t на рассматриваемом интервале времени одними и теми же частицами, уравнение момента количества движения имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \int \int (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times (\rho \mathbf{u}) dx_1 dx_2 dx_3 = \\ & = \int_{S(t)} \int (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \Sigma dS + \int_{V(t)} \int \int (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times (\rho \mathbf{F}) dx_1 dx_2 dx_3. \end{aligned}$$

Двойной интеграл в правой части — это момент напряжений $\Sigma = \Sigma(x_1, x_2, x_3)$, действующих на поверхность $S(t)$, ограничивающую рассматриваемый объем $V(t)$, а тройной интеграл — момент массовых сил, действующих в этом объеме.

Рассматривая уравнение момента количества движения для последовательности объемов $V_1(t), V_2(t), \dots, V_N(t), \dots$, определенных каждый как объем, занимаемый веществом, которое при некотором $t = t^*$ заполняло объем $V_N(t^*)$ с ребром h_N ($h_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$), можно показать, что тензор напряжений симметричен, т.е. имеют место равенства

$$\sigma_{32} - \sigma_{23} = \sigma_{13} - \sigma_{31} = \sigma_{21} - \sigma_{12} = 0$$

при всех x и t .

1.2.2 Напряженное состояние в точке

Изучим напряженное состояние в точке. Как известно из линейной алгебры, любая симметричная матрица представима в виде

$$\|\sigma_{ij}\| = U \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix} U^*,$$

где матрица U ортогональна. Перейдем к новой системе координат с помощью ортогональной матрицы W

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

и установим, что тензор напряжений в этой системе координат запишется так:

$$\|\sigma'_{ij}\| = W\|\sigma_{ij}\|W^* = WU \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix} U^*W^*.$$

Из этой записи очевидно, что положив $W = U^*$, мы придем к системе координат, в которой тензор напряжений оказывается следующего простого вида:

$$\|\sigma'_{ij}\| = U^*U \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix} U^*U = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix}.$$

Описанная процедура называется *приведением тензора напряжений к главным осям*.

Напряжения на трех площадках, перпендикулярных главным осям, представляют векторы, направленные по этим осям. Величины этих напряжений, нормальных к площадкам s_1, s_2, s_3 , называются *главными напряжениями* и могут быть вычислены как характеристические корни матрицы

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - s & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - s & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - s \end{vmatrix} = 0.$$

Мы выбрали для главных напряжений обозначения s_1, s_2, s_3 , а не $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, которые часто используются для той же цели, чтобы оставить обозначения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ для компонент вектора напряжений на какой-либо площадке.

Занимаясь изучением напряженного состояния в некоторой точке, мы будем предполагать, что система координат выбрана так, что в этой точке тензор напряжений приведен к главным осям и, следовательно, имеет вид

$$\|\sigma_{ik}\| = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix}.$$

Вектор напряжения, действующий на площадке с единичной нормалью \mathbf{n} , имеющей компоненты n_1, n_2, n_3 ($n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$), определяется так:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 n_1 \\ s_2 n_2 \\ s_3 n_3 \end{bmatrix}.$$

Спроектируем этот вектор на нормаль к площадке и на саму эту площадку. Длины проекций представляют собой нормальное $\sigma_{\text{норм}}$ к площадке и касательное к ней $\sigma_{\text{кас}}$ напряжения. Очевидно, что

$$\sigma_{\text{норм}} = (\Sigma, \mathbf{n}) = s_1 n_1^2 + s_2 n_2^2 + s_3 n_3^2,$$

$$\sigma_{\text{норм}}^2 + \sigma_{\text{кас}}^2 = (\Sigma, \Sigma) = s_1^2 n_1^2 + s_2^2 n_2^2 + s_3^2 n_3^2.$$

Поставим такую задачу. Пусть нам известны главные напряжения, а также нормальная и касательная составляющие напряжения на некоторой площадке. Можно ли определить направление такой площадки?

Координаты единичного вектора нормали к такой площадке должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1, \\ s_1 n_1^2 + s_2 n_2^2 + s_3 n_3^2 &= \sigma_{\text{норм}}, \\ s_1^2 n_1^2 + s_2^2 n_2^2 + s_3^2 n_3^2 &= \sigma_{\text{норм}}^2 + \sigma_{\text{кас}}^2. \end{aligned}$$

Это линейная система алгебраических уравнений относительно с определителем Вандермонда

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1^2 & s_2^2 & s_3^2 \end{vmatrix},$$

отличным от нуля, если среди главных напряжений нет равных. Решая эту систему, найдем

$$n_1^2 = \frac{\left(\sigma_{\text{норм}} - \frac{s_2 + s_3}{2}\right)^2 + \sigma_{\text{кас}}^2 - \left(\frac{s_2 - s_3}{2}\right)^2}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)},$$

$$n_2^2 = \frac{\left(\sigma_{\text{норм}} - \frac{s_3 + s_1}{2}\right)^2 + \sigma_{\text{кас}}^2 - \left(\frac{s_3 - s_1}{2}\right)^2}{(s_2 - s_3)(s_2 - s_1)},$$

$$n_3^2 = \frac{\left(\sigma_{\text{норм}} - \frac{s_1 + s_2}{2}\right)^2 + \sigma_{\text{кас}}^2 - \left(\frac{s_1 - s_2}{2}\right)^2}{(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)},$$

Пусть оси выбраны так, что для главных напряжений выполняются неравенства $s_3 > s_2 > s_1$. Тогда для неотрицательности правых частей в выражениях для n_1^2, n_2^2, n_3^2 необходимо и достаточно выполнения неравенств

$$\left(\sigma_{\text{норм}} - \frac{s_2 + s_3}{2}\right)^2 + \sigma_{\text{кас}}^2 \geq \left(\frac{s_2 - s_3}{2}\right)^2$$

$$\left(\sigma_{\text{норм}} - \frac{s_3 + s_1}{2}\right)^2 + \sigma_{\text{кас}}^2 \geq \left(\frac{s_3 - s_1}{2}\right)^2$$

$$\left(\sigma_{\text{норм}} - \frac{s_1 + s_2}{2}\right)^2 + \sigma_{\text{кас}}^2 \geq \left(\frac{s_1 - s_2}{2}\right)^2$$

Изобразим допускаемую этими неравенствами область значений на плоскости $(\sigma_{\text{норм}}, \sigma_{\text{кас}})$.

На рис.1.4 эта область заштрихована между полуокружностями, построенными на отрезках $[s_1, s_2], [s_2, s_3], [s_1, s_3]$, оси $\sigma_{\text{норм}}$, как на диаметрах. Диаграмма, показанная на рис. называется “диаграммой Мора”. Из диаграммы Мора видно, что наибольшее касательное напряжение равно $(s_3 - s_1)/2$, при этом нормальное напряжение обязано быть равным $(s_3 + s_1)/2$. Определи, на какой площадке такое наибольшее касательное напряжение достигается. Для этого при заданных значениях $\sigma_{\text{кас}} = (s_3 - s_1)/2$ и $\sigma_{\text{норм}} = (s_3 + s_1)/2$ вычислим по нашим формулам n_1^2, n_2^2, n_3^2 . В результате получим: $n_1^2 = 1/2, n_2^2 = 0, n_3^2 = 1/2$. Таким образом, наибольшее касательное напряжение достигается на площадках

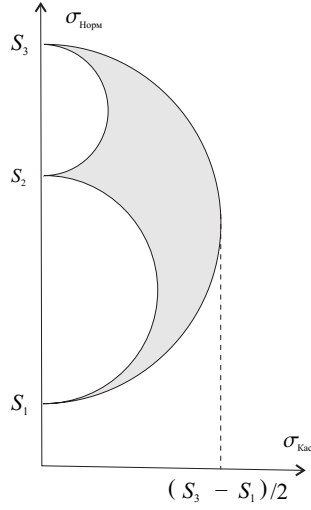


Рис. 1.4:

с нормальными $\mathbf{n}(n_1, n_2, n_3)$: $n_1 = \pm 1/\sqrt{2}$, $n_2 = 0$, $n_3 = \pm(\mp)1/\sqrt{2}$, т.е. на плоскостях, делящих пополам угол между плоскостями с наибольшим и наименьшим нормальными напряжениями s_1, s_3 . Матрицу, характеризующую напряженное состояние, обычно раскладывают в сумму двух матриц (матрицу, кратной единичной, и матрицу с нулевым следом, называемую *девиатором* тензора напряжений):

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{bmatrix},$$

где

$$(\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3.$$

Если

$$\|\sigma_{ik}\| = U \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix} U^* \quad (UU^* = I),$$

то

$$\begin{aligned} & \|\sigma_{ik} - \delta_{ik}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3\| = \\ & = U \begin{bmatrix} s_1 - \frac{s_1 + s_2 + s_3}{3} & 0 & 0 \\ 0 & s_2 - \frac{s_1 + s_2 + s_3}{3} & 0 \\ 0 & 0 & s_3 - \frac{s_1 + s_2 + s_3}{3} \end{bmatrix} U^*. \end{aligned}$$

При одновременном увеличении или уменьшении всех диагональных элементов матрицы $\|\sigma_{ik}\|$ на одно и то же число описываемые ею касательные напряжения на площадках не меняются. Это очевидно из диаграммы Мора. Говорят, что совокупность касательных напряжений характеризуется девиатором тензора напряжений. След тензора напряжений, поделенный на 3, называется *средним напряжением*.

Рассмотрим вектор напряжения, действующий на площадку, перпендикулярную некоторому вектору \mathbf{x} :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \\ \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \\ \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \end{pmatrix}$$

с компонентами $\sigma_i = \sigma_{ij}/\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, и вычислим его проекцию на некоторый другой вектор \mathbf{y} , которая определяется формулой

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}(\Sigma, \mathbf{y}) &= \frac{\sigma_i y_i}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}} = \frac{(\sigma_{ij} x_j) y_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}} = \\ &= \frac{\sigma_{ij} y_i x_j}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}} \end{aligned}$$

Благодаря симметрии $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ это выражение симметрично относительно векторов \mathbf{y} , \mathbf{x} .

Закон взаимности. *Проекция на вектор \mathbf{y} напряжения на площадке, перпендикулярной вектору \mathbf{x} , равна проекции на вектор \mathbf{x} напряжения на площадке, перпендикулярной вектору \mathbf{y} .*

Наряду с билинейной формой $\sigma_{ij} y_i x_j$, характеризующей напряженное состояние, рассматривают квадратичную форму $\sigma_{ij} x_i x_j$, которая однозначно определяется билинейной, в свою очередь, билинейную также определяет:

$$\sigma_{ij} y_i x_j = \sigma_{ij} x_i y_j = \frac{1}{2} [\sigma_{ij} (x_i + y_i)(x_j + y_j) - \sigma_{ij} x_i x_j - \sigma_{ij} y_i y_j].$$

Приведенная интерпретация билинейной формы показывает, что эта форма инвариантна при ортогональных преобразованиях систем координат. Следовательно инвариантна и квадратичная форма $\sigma_{ij} x_i x_j$. Выделение девиатора

эквивалентно следующему разложению этой формы:

$$\sigma_{ij}x_i x_j = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \left(\sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} \right) x_i x_j.$$

Это разложение так же инвариантно относительно выбора ортогональной системы координат.

Интересно отметить, что “девиаторный полином”

$$P = \left(\sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} \right) x_i x_j$$

гармонический, т.е. удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial x_3^2} = 0.$$

Пусть полином второй степени $Q(x_1, x_2, x_3) = \sigma_{ij}x_i x_j$ построен с помощью коэффициентов σ_{ij} — компонент тензора напряжений. Оператор Лапласа от Q будет постоянным:

$$\Delta Q = \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x_3^2} = 2(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}).$$

Девиатору тензора напряжений отвечает квадратичная форма P , которая вычисляется через Q по формуле

$$P = Q - \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{6} \Delta Q = Q - \frac{1}{6}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x_3^2} \right),$$

из которой нетрудно вывести инвариантность относительно вращений оператора, переводящего Q в P .

Каждому повороту ортогональной системы координат отвечает некоторое вполне определенное линейное преобразование компонент σ_{ij} . Говорят, что тензор σ_{ij} преобразуется по некоторому представлению группы вращений.

Девиатор $\sigma_{ij} - \delta_{ij}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$ преобразуется по некоторому представлению этой группы, так же как и величина $\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$. Эта последняя величина преобразуется самым простым способом — остается без изменений. Тем самым тензор σ_{ij} на два независимых представления — одномерное, по которому преобразуется след $\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ и пятимерное, по которому преобразуется девиатор.

Оказывается, что это пятимерное представление уже не может быть разложено на представления меньших размерностей.

Иногда для величины возможных касательных напряжений применяют не матрицу девиатора, а ее ортогональные инварианты, т.е. величины, не меняющиеся при вращении. В качестве таких инвариантов могут быть выбраны собственные значения $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ матрицы девиатора, т.е. корни уравнения

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma - \varkappa & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma - \varkappa & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma - \varkappa \end{vmatrix} = 0, \quad \sigma = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}$$

либо симметрические функции от этих корней. Все симметрические функции выражаются через основные функции $\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3$, $\varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_1\varkappa_3 + \varkappa_2\varkappa_3$, $\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3$.

Так как $\varkappa_i = s_i - (s_1 + s_2 + s_3)/3$, то имеем $\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 = 0$, и независимых инвариантов девиатора оказывается только два: $\varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_1\varkappa_3 + \varkappa_2\varkappa_3$, и $\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3$.

Как правило, в качестве меры интенсивности касательных напряжений принимают либо величину

$$\sqrt{\frac{2}{3}(\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + \varkappa_3^2)} = \sqrt{\frac{(s_2^2 - s_3^2)^2 + (s_3^2 - s_1^2)^2 + (s_1^2 - s_2^2)^2}{6}},$$

либо величину максимального касательного напряжения

$$\max |(s_i - s_j)| = \max |(\varkappa_i - \varkappa_j)|.$$

1.2.3 Напряженное состояние точке (дополнение)

Совокупность компонент векторов напряжений на площадках, перпендикулярных координатным осям, обычно записывается в виде квадратной матрицы

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \|\sigma_{ij}\|,$$

которая называется *тензором напряжений*.

Перепишем этот тензор в других обозначениях:

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix},$$

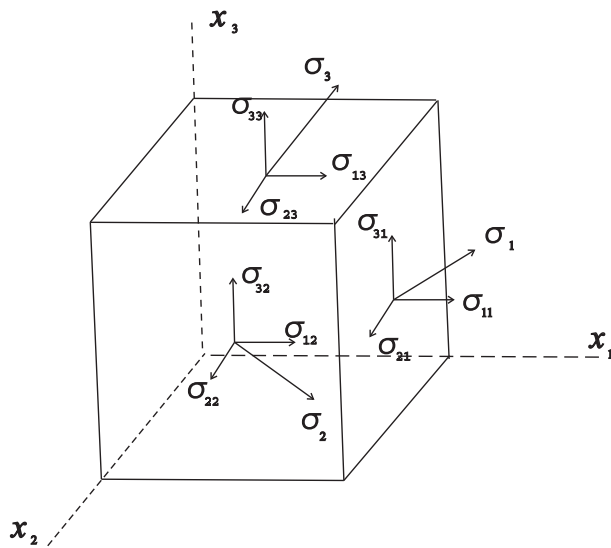


Рис. 1.5:

Физический смысл компонент тензора напряжений показан на рис. 1.5.

Вектор напряжения $\mathbf{p}(p_x, p_y, p_z)$ на площадке с нормалью $\mathbf{n}(n_x, n_y, n_z)$ (рис. 1.6) вычисляется по формулам

$$p_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z$$

$$p_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z$$

$$p_z = \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z$$

Нормальная составляющая

$$\sigma_n = \sigma_x n_x^2 + \sigma_y n_y^2 + \sigma_z n_z^2 + 2\tau_{xy} n_x n_y + 2\tau_{yz} n_y n_z + 2\tau_{zx} n_x n_z$$

Касательная составляющая

$$\tau_n = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \sigma_n^2}$$

В каждой точке среды существуют три главных направления и три взаимно перпендикулярные площадки, на которых касательные напряжения равны нулю. Нормальные напряжения на этих площадках называются главными напряжениями. Пронумеруем главные оси так, чтобы выполнялись неравенства

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

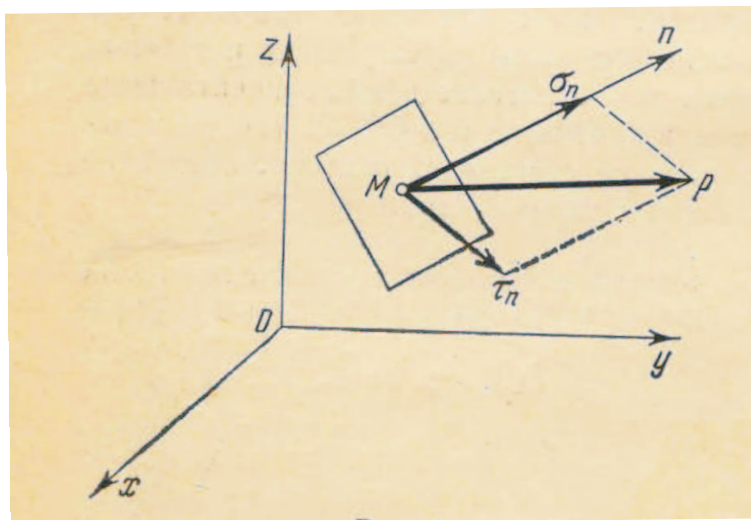
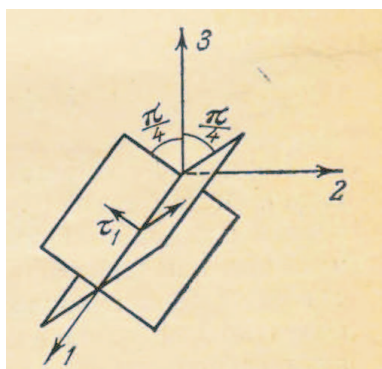


Рис. 1.6:

Тензор напряжений, отнесенный к главным осям имеет вид

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

На площадках, делящих пополам углы между главными плоскостями и про-



ходящих соответственно через главные оси 1, 2, 3, касательные напряжения по абсолютной величине равны

$$\frac{1}{2} |\sigma_2 - \sigma_3|, \quad \frac{1}{2} |\sigma_3 - \sigma_1|, \quad \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2|$$

Касательные напряжения в этих сечениях достигают экстремальных значений

и называются главными. Введем для них обозначения

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2},$$

Наибольшее касательное напряжение τ_{\max} при принятой нумерации главных осей равно

$$\tau_{\max} = -\tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

Нормальные напряжения, на которых действуют главные касательные напряжения соответственно равны

$$\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, \quad \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}, \quad \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2},$$

Главные напряжения являются корнями кубического уравнения

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \lambda & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

или

$$-\lambda^3 + I_1(T_\sigma)\lambda^2 + I_2(T_\sigma)\lambda + I_3(T_\sigma) = 0,$$

где

$$\begin{aligned} I_1(T_\sigma) &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2(T_\sigma) &= -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \\ I_3(T_\sigma) &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned}$$

Величина

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

называется средним давлением в точке.

Девиатор напряжений

Представим тензор напряжений в виде суммы

$$T_\sigma = \sigma T_1 + D_\sigma,$$

где

$$\sigma T_1 = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}$$

— шаровой тензор,

$$D_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix}$$

— девиатор напряжений

Нормальные составляющие девиаторы будем обозначать через

$$s_x = \sigma_x - \sigma, \quad s_y = \sigma_y - \sigma, \quad s_z = \sigma_z - \sigma$$

Главные направления девиатора и тензора напряжений совпадают, а главные значения s_i отличаются от σ_i на величину среднего давления σ и являются корнями кубического уравнения

$$-\lambda^3 + I_1(D_\sigma)\lambda^2 + I_2(D_\sigma)\lambda + I_3(D_\sigma) = 0,$$

где

$$I_1(D_\sigma) = 0$$

$$I_2(D_\sigma) = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

$$I_3(D_\sigma) = s_1 s_2 s_3.$$

Неотрицательная величина

$$T = \sqrt{I_2(D_\sigma)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

называется *интенсивностью касательных напряжений*.

Интенсивность касательных напряжений обращается в нуль только в том случае, когда напряженное состояние в точке является состоянием "гидростатического" давления.

Для чистого сдвига

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau$$

и, следовательно,

$$T = \tau.$$

В случае простого растяжения (сжатия) в направлении оси x

$$\sigma_x = \sigma_1, \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

и, следовательно,

$$T = \frac{|\sigma_1|}{\sqrt{3}}.$$

Так как в данном случае кубическое уравнение имеет вещественные корни, то его решение находится в тригонометрической форме. Главные компоненты девиатора можно выразить через инварианты

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}}T \cos\left(\omega_\sigma - \frac{\pi}{3}\right), \\ s_2 &= \frac{2}{\sqrt{3}}T \cos\left(\omega_\sigma + \frac{\pi}{3}\right), \\ s_3 &= -\frac{2}{\sqrt{3}}T \cos \omega_\sigma. \end{aligned}$$

Для главных касательных напряжений получим следующие выражения

$$\begin{aligned} \tau_1 &= -T \sin\left(\omega_\sigma - \frac{\pi}{3}\right), \\ \tau_2 &= -T \sin\left(\omega_\sigma + \frac{\pi}{3}\right), \\ \tau_3 &= -T \sin \omega_\sigma. \end{aligned}$$

Используя неравенства

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3,$$

можно показать, что величина ω_σ изменяется в пределах

$$0 \leq \omega_\sigma \leq \frac{\pi}{3}.$$

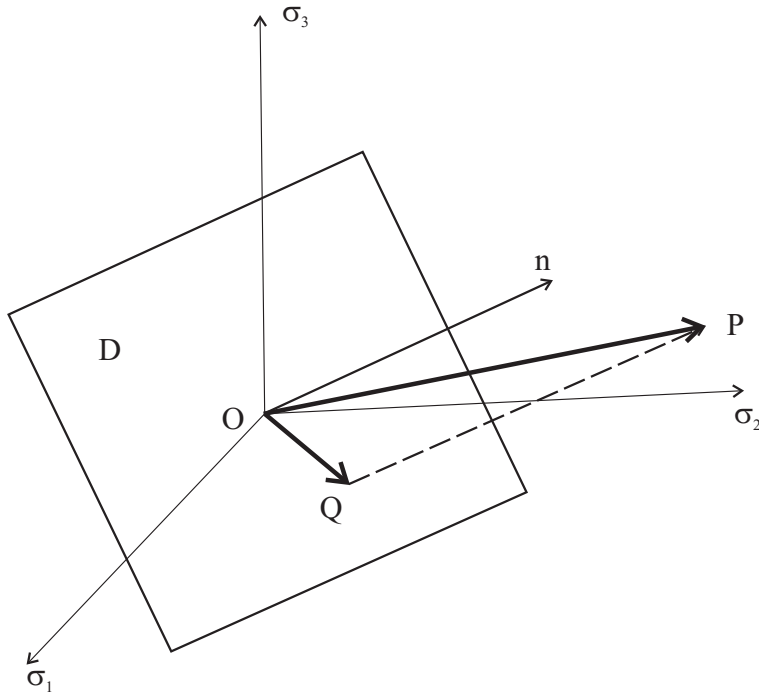
Учитывая это неравенство и поскольку $\tau_{\max} = -\tau_2$, получим

$$1 \leq \frac{T}{\tau_{\max}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

С наибольшей погрешностью (около 7%) имеем

$$T \approx 1,08\tau_{\max}$$

Геометрическая интерпретация напряженного состояния в точке



Главные напряжения вычисляются через среднее напряжение σ , интенсивность касательных напряжений T , и величину ω_σ .

Напряженное состояние в точке в пространстве главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ представляется вектором **OP** с компонентами $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Плоскость

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

проходит через начало координат и равно наклонена к осям. Следовательно единичный вектор нормали к этой плоскости есть

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3)$$

Прямая линия

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3,$$

проходящая через начало координат и перпендикулярная к плоскости $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ называется гидростатической осью.

Вектор **OP** представляется в виде

$$\mathbf{OP} = \sigma_1 \mathbf{i}_1 + \sigma_2 \mathbf{i}_2 + \sigma_3 \mathbf{i}_3$$

Проекция вектора \mathbf{OP} на нормаль пропорциональна среднему давлению

$$(\mathbf{OP} \cdot \mathbf{n}) = \sqrt{3}\sigma.$$

Введем вектор

$$\mathbf{OQ} = s_1\mathbf{i}_1 + s_2\mathbf{i}_2 + s_3\mathbf{i}_3,$$

изображающий девиатор D_σ .

Очевидно, что

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OQ} + \sqrt{3}\sigma\mathbf{n}$$

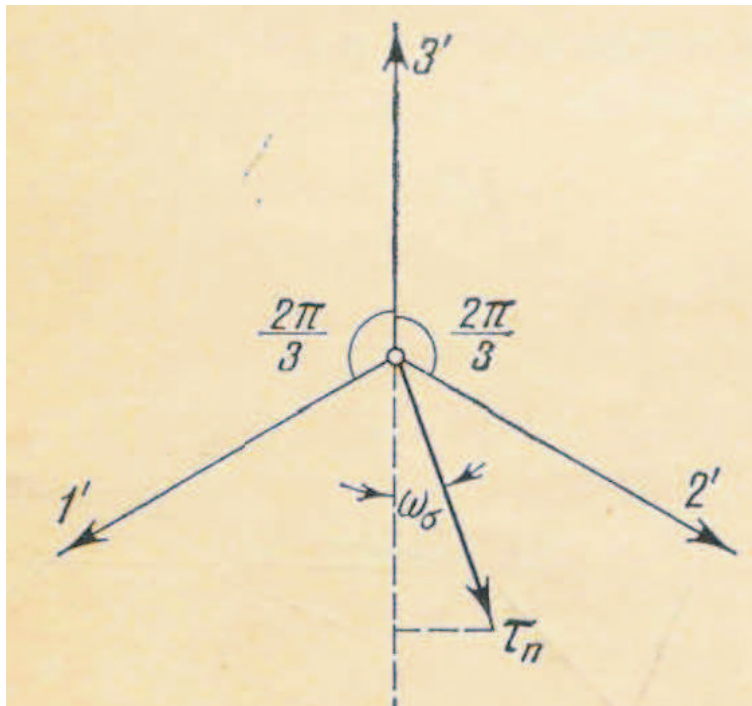
и

$$(\mathbf{OQ} \cdot \mathbf{n}) = 0.$$

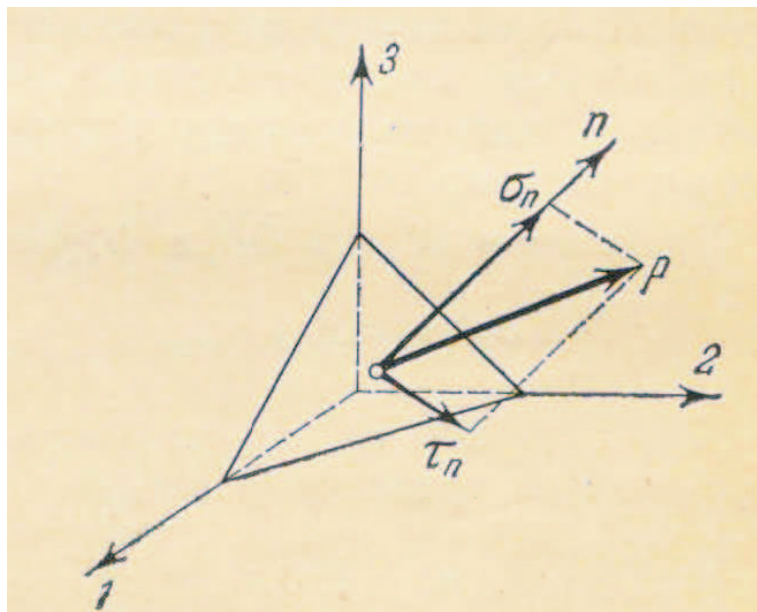
Следовательно, вектор \mathbf{OQ} лежит в плоскости $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$, которая называется *девиаторной плоскостью*.

Длина вектора \mathbf{OQ} пропорциональна интенсивности касательных напряжений

$$|\mathbf{OQ}| = \sqrt{2}T.$$



Угол ω_σ определяет положение вектора \mathbf{OQ} на девиаторной плоскости. А именно, угол между вектором \mathbf{OQ} и отрицательной осью $3'$ равен ω_σ .



Рассмотрим площадку, проходящую через данную точку и равно наклоненную к главным осям (октаэдрическую площадку).

Проекции вектора напряжений p , действующего на октаэдрической площадке в соответствии с формулами Коши будут

$$\frac{\sigma_1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{\sigma_2}{\sqrt{3}}, \quad \frac{\sigma_3}{\sqrt{3}},$$

Нормальное напряжение на этой площадке равно среднему давлению

$$\sigma_n = \sigma,$$

а касательное напряжение τ_n пропорционально T

$$\tau_n = \sqrt{\frac{2}{3}}T.$$

1.3 Основные законы механики сплошной среды

1.3.1 Закон сохранения массы. Уравнение неразрывности

Суммарная масса некоторой части сплошной среды, занимающей в момент времени t объём пространства V , выражается интегралом

$$m = \int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV,$$

где $\rho(\mathbf{x}, t)$ — непрерывная функция координат, называемая плотностью.

Закон сохранения массы: *масса выделенной части среды остаётся постоянной*: $dm/dt = 0$.

$$\frac{dm}{dt} = \int_V \left[\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right] dV = 0.$$

Поскольку последнее равенство верно для любого произвольного объёма V , подынтегральное выражение должно обращаться в нуль:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0.$$

Это уравнение называется уравнением *неразрывности*.

Для несжимаемой среды ($d\rho/dt = 0$) получаем:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0.$$

1.3.2 Теорема об изменении количества движения. Уравнения движения. Уравнения равновесия.

Рассмотрим в момент времени t движущийся объём сплошной среды V , ограниченный поверхностью S . На него действуют массовые силы с плотностью b_i . На поверхности S действует вектор напряжений с компонентами $t_i^{(n)}$. В объёме V определено поле скоростей $v_i = du_i/dt$. Общее it количество движения системы масс, заполняющих объём V определяется интегралом

$$P_i = \int_V \rho v_i dV.$$

Теорема об изменении количества движения утверждает, что *скорость изменения со временем количества движения некоторой части сплошной среды равна результирующей сил, Действующих на рассматриваемую область*. Это утверждение записывается в векторной форме следующим образом:

$$\int_S \mathbf{t}^{(n)} dS + \int_V \rho \mathbf{b} dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV$$

Последнее равенство можно записать в покомпонентной форме:

$$\int_S t_i^{(n)} dS + \int_V \rho b_i dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV$$

Используя формулу Коши $t_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j$, формулу Гаусса-Остроградского и расписывая полную производную по времени, получим интегральную форму теоремы об изменении количества движения:

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + \rho b_i - \rho \dot{v}_i) dV = 0.$$

Поскольку объем V произволен, то подынтегральное выражение должно обращаться в нуль в каждой точке рассматриваемого объема:

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i.$$

Эти три уравнения называются *дифференциальными уравнениями движения*.

Если ускорения равны нулю, то получаем *дифференциальные уравнения равновесия*:

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = 0.$$

1.3.3 Теорема об изменении момента количества движения.

Теорема об изменении момента количества движения утверждает, что скорость изменения во времени момента количества движения произвольно выбранной части сплошной среды относительно любой точки равна главному моменту (относительно той же точки) массовых и поверхностных сил, действующих на рассматриваемую область сплошной среды:

$$\int_S (\mathbf{x} \times \mathbf{t}^{(n)}) dS + \int_V (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{b}) dV = \frac{d}{dt} \int_V (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{v}) dV.$$

Следствием этого закона для "безмоментной" среды является симметрия тензора напряжения:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}.$$

1.3.4 Сохранение энергии. Первый закон термодинамики. Уравнение энергии.

Задать состояние термодинамической системы это значит полностью охарактеризовать систему. Это описание в общем случае определяется несколькими термодинамическими и кинематическими величинами, которые называются *параметрами состояния*. Если параметры состояния изменяются со временем, то происходит *термодинамический процесс*. Параметры состояния, используемые для характеристики данной системы не все независимы: между ними существуют функциональные связи, которые выражаются так называемыми *уравнениями состояния*. Любой параметр состояния, который можно представить однозначной функцией других параметров состояния, называется *функцией состояния*.

Если изучаются только механические величины, то закон сохранения механической энергии можно получить непосредственно из уравнений движения. Умножим каждое из уравнений движения на v_i , сложим получившиеся уравнения и проинтегрируем по объему V :

$$\int_V \rho v_i \dot{v}_i dV = \int_V v_i \sigma_{ij,j} dV + \int_V \rho v_i b_i dV \quad (1.40)$$

Интеграл

$$\int_V \rho v_i \dot{v}_i dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho \frac{v_i v_i}{2} dV = \frac{d}{dt} \int_V \frac{\rho v^2}{2} dV = \frac{dK}{dt} \quad (1.41)$$

— скорость изменения со временем кинетической энергии K объема V сплошной среды.

Используя равенство $v_i \sigma_{ij,j} = (v_i \sigma_{ji})_{,j} - v_{i,j} \sigma_{ji}$ и теорему Гаусса-Остроградского, равенство (1.40) можно записать в виде:

$$\frac{dK}{dt} + \int_V \dot{\varepsilon}_{ij} \sigma_{ji} dV = \int_S v_i t_i^{(n)} dS + \int_V \rho v_i b_i dV, \quad (1.42)$$

где

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.43)$$

В левой части равенства (1.42) стоит полная мощность механической энергии в объеме V сплошной среды, в правой — мощность поверхностных и массовых сил, приложенных к этому объему.

Равенство (1.42) можно записать в следующем виде:

$$\frac{dK}{dt} + \frac{\delta P}{dt} = \frac{\delta W}{dt},$$

где $\delta P/dt$ и $\delta W/dt$ — мощность внутренних и внешних сил соответственно. Символ δ означает что соответствующее приращение в общем случае не является полным дифференциалом какой либо функции.

Если кроме механической энергии следует учитывать и другие виды энергии, то закон сохранения энергии должен использоваться в самой общей форме:

скорость изменения со временем кинетической и внутренней энергии равна сумме механической работы внешних сил, совершаемой в единицу времени, и притока прочих видов энергии (тепловой, химической, электромагнитной и др.) за единицу времени.

Запишем закон сохранения энергии в случае, когда учитывается только механическая и тепловая энергии (тепломеханический континуум).

Скорость изменения внутренней энергии представляется интегралом

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho u dV = \int_V \rho \dot{u} dV. \quad (1.44)$$

Величина u называется удельной внутренней энергией.

Пусть c_i — компоненты вектора потока тепла; z — мощность внутренних тепловых источников на единицу массы. Тогда скорость притока тепла к объему сплошной среды V , ограниченному поверхностью S , будет

$$\frac{\delta Q}{dt} = - \int_S c_i n_i dS + \int_V \rho z dV \quad (1.45)$$

Закон изменения энергии термомеханического континуума записывается в следующем виде:

$$\frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = \frac{\delta W}{dt} + \frac{\delta Q}{dt}, \quad (1.46)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \frac{v_i v_i}{2} dV + \int_V \rho \dot{u}_i dV = \\ = \int_S t_i^{(\hat{n})} v_i dS + \int_V \rho v_i b_i dV + \int_V \rho z dV - \int_S c_i n_i dS \end{aligned} \quad (1.47)$$

Преобразуя интегралы по поверхности в интегралы по объёму и используя произвольность объёма V , получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} + u \right) = \frac{1}{\rho} (\sigma_{ji} v_i)_{,j} + b_i v_i - \frac{1}{\rho} c_{i,i} + z \quad (1.48)$$

Учитывая, что напряжения σ_{ji} удовлетворяют уравнения движения, равенство (1.48) можно записать в следующем виде:

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{\rho} c_{i,i} + z \quad (1.49)$$

Равенство (1.49) утверждает: *скорость изменения внутренней энергии равна сумме мощности напряжений плюс приток тепла к элементу среды*

1.3.5 Определяющие уравнения. Термомеханический и механический континуум

Для термомеханической сплошной среды основными уравнениями будут следующие.

уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \mathbf{0}; \quad (1.50)$$

уравнения движения:

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i, \quad \text{или} \quad \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\Sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}}; \quad (1.51)$$

уравнение энергии:

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} D_{ij} - \frac{1}{\rho} c_{i,i} + z, \quad \text{или} \quad \frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} - \rho \nabla \cdot \mathbf{c} + z. \quad (1.52)$$

Уравнения (1.50) - (1.52) представляют собой пять независимых уравнений. Неизвестными являются четырнадцать функций:

плотность ρ ,

три компоненты вектора скорости v_i ,

шесть компонент тензора напряжений σ_{ij} ,

три компоненты вектора потока тепла c_i ,

плотность внутренней энергии u .

Для этих функций должно быть выполнено в соответствии со вторым законом термодинамики неравенство Клаузиуса – Дюгема:

$$\frac{ds}{dt} - e - \frac{1}{\rho} \left(\frac{c_i}{T} \right)_i \geq 0. \quad (1.53)$$

В неравенстве Клаузиуса – Дюгема добавляются еще две неизвестные функции: *плотность энтропии* s и *абсолютная температура* T .

Итак, нужно сформулировать одиннадцать дополнительных уравнений.

Шесть из них называются *определяющими уравнениями* и характеризуют физические свойства конкретной среды.

Закон теплопроводности дает еще три соотношения.

Два соотношения являются термодинамическими уравнениями состояния (например, калорическое уравнение состояния и уравнение для энтропии).

Если пренебречь взаимодействием механических и термодинамических процессов, то получим так называемую теорию *несвязанной* механики деформируемой среды.

В этом случае механические процессы описываются *уравнением неразрывности*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \mathbf{0}; \quad (1.54)$$

и *уравнениями движения*

$$\sigma_{j i, j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i, \quad \text{или} \quad \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\Sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}}; \quad (1.55)$$

Это система четырех уравнений относительно десяти неизвестных. В несвязанной теории шесть определяющих соотношений — это соотношения, связывающие компоненты тензоров напряжений и деформаций и их скорости.

В несвязанной теории поле температур считается известным, или определяется из решения задачи теплопроводности независимо от механической задачи. При изотермических процессах температура предполагается постоянной и задача является чисто механической.

1.3.6 Упругое тело.

Упругим называется тело, для которого напряжение в каждой точке есть однозначная функция деформации:

$$\sigma_{ij} = \varphi_{ij}(\varepsilon_{ij}) \quad (1.56)$$

Чтобы установить конкретный вид функций φ_{ij} требуются дальнейшие предположения о свойствах материала.

Рассмотрим такой класс упругих материалов, для которых работа, произведенная над элементарным объемом в замкнутом цикле по деформациям или напряжениям, равна нулю. Такие материалы называются "гиперупругими".

Изменение внутренней энергии равно

$$dU = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}.$$

Условие равенства нулю работы на произвольном замкнутом цикле записывается в следующем виде:

$$\oint dU = 0. \quad (1.57)$$

Выполнение равенства (1.57) означает, что подынтегральное выражение есть полный дифференциал. Следовательно,

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}. \quad (1.58)$$

Мы предполагаем, что соотношения (1.58) однозначно разрешимы относительно ε_{ij} . Введем функцию

$$\Phi(\sigma_{ij}) = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - U(\varepsilon_{ij}). \quad (1.59)$$

Легко проверить, что

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (1.60)$$

Функция $\Phi(\sigma_{ij})$ называется "дополнительной работой".

Требование однозначной разрешимости уравнений (1.58) относительно деформаций эквивалентно условию выпуклости поверхности $U(\varepsilon_{ij}) = \text{const}$ в пространстве деформаций или поверхности $\Phi(\sigma_{ij}) = \text{const}$ в пространстве напряжений.

Закон Гука.

При малых деформациях, как следует из экспериментальных данных, зависимость между напряжениями и деформациями линейная:

$$\sigma_{ij} = \Pi_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (1.61)$$

и

$$\varepsilon_{kl} = \Pi_{ijkl}\sigma_{kl}. \quad (1.62)$$

Тензор четвертого ранга Π_{ijkl} называется тензором модулей упругости, а тензор Π_{ijkl} — тензором упругих податливостей.

Вследствие соотношений (1.58) и (1.60), симметрии тензоров напряжения и деформации из 81 компонент тензора четвертого ранга в трехмерном пространстве различными остаются лишь 21 компонента. Соответствующие потенциалы имеют вид:

$$U = \frac{1}{2}E_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}, \quad \Phi = \frac{1}{2}\Pi_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} \quad (1.63)$$

Закон Гука для изотропного материала.

Материал, свойства которого в точке не зависят от направления, называется изотропным. Потенциал напряжений и упругая энергия изотропного тела не должны меняться при повороте осей координат. Поэтому потенциал напряжений должен выражаться через инварианты тензора деформаций. Единственная однородная квадратичная форма, составленная из этих инвариантов, зависит от двух констант и представляется следующим образом:

$$U = \frac{1}{2}(\lambda E_I^2 + 2\mu E_{II}). \quad (1.64)$$

Константы λ и μ называются упругими постоянными Ламе. Если в (1.64) подставить выражения для E_I и E_{II} , то получим

$$U = \frac{1}{2}(\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\mu\delta_{ik}\delta_{jl})\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}. \quad (1.65)$$

Таким образом для изотропного материала

$$E_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu \delta_{ik} \delta_{jl}. \quad (1.66)$$

Если обозначить $E_I = 3\varepsilon = 3(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = \theta$, то из (1.61) и (1.66) получим:

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}. \quad (1.67)$$

Соотношения (1.67) можно разрешить относительно деформаций:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \left(\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{1 + \nu} \sigma \delta_{ij} \right), \quad (1.68)$$

где

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} = 2(1 + \nu)\mu. \quad (1.69)$$

Упругая постоянная E называется модулем упругости, упругая постоянная ν — коэффициентом Пуассона. Подставляя выражение для σ в (1.69), получим:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})], \dots \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} = \frac{1}{\mu} \sigma_{12}, \dots \quad (1.70)$$

Свертывая (1.67) по индексам i и j , получим

$$3\sigma = (3\lambda + 2\mu)\theta. \quad (1.71)$$

Если ввести обозначение

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{E}{3(1 - 2\nu)},$$

то соотношение (1.71) запишется в виде:

$$\sigma = 3K\theta. \quad (1.72)$$

Величина K называется объемным модулем упругости.

Закон Гука можно записать в иной форме, если представить тензоры напряжения и деформации в виде суммы шарового тензора и девиатора:

$$\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} = 2\mu(\varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}), \quad \text{или} \quad \bar{\sigma}_{ij} = 2\mu \bar{\varepsilon}_{ij}. \quad (1.73)$$

Для положительной определенности квадратичной формы упругой энергии необходимо и достаточно выполнение условий $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Отсюда следует, что положительны модуль упругости E , объемный модуль упругости K и модуль сдвига $\mu = G$. Из этих условий следует ограничение на множество возможных значений коэффициента Пуассона:

$$-1 \leq \nu \leq 1/2.$$

1.4 Постановка краевых задач в линейной теории упругости.

Полная система уравнений теории упругости включает следующие уравнения.

Уравнения равновесия:

$$\sigma_{ij,j} + \rho F_i = 0; \quad (1.74)$$

соотношения закона упругости: в общем случае:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial e_{ij}}; \quad (1.75)$$

для линейно-упругого тела:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} e_{kl}; \quad (1.76)$$

выражения компонент тензора деформаций через компоненты вектора перемещения:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.77)$$

Уравнения (1.74) - (1.77) должны выполняться в каждой точке области V , ограниченной поверхностью S . На границе области S должны быть поставлены краевые условия. Пусть поверхность тела S состоит из двух частей: $S = S_T + S_u$. Будем считать, что заданы следующие *краевые условия*:

$$u_i = u_i^*, \quad x_i \in S_u \quad (1.78)$$

$$\sigma_{ij} n_j = T_i^*, \quad x_i \in S_T \quad (1.79)$$

Краевые условия могут быть поставлены и в более общей форме.

Задача теории упругости состоит в решении уравнений (1.74) - (1.77) с граничными условиями (1.78) - (1.79). В такой формулировке — это смешанная краевая задача. Если , то краевая задача называется первой краевой задачей, если — второй краевой задачей.

Несложно доказать, что *если решение смешанной краевой задачи существует, то оно единственно.*

1.4.1 Уравнения теории упругости в перемещениях. Уравнения Ламе

Уравнения (1.74) - (1.77) можно свести к системе трех уравнений относительно трех компонент вектора перемещений:

$$(\lambda + \mu)\theta_{,i} + \mu\Delta u_i + \rho F_i = 0 \quad (1.80)$$

$$\Delta\theta = 0 \quad (1.81)$$

$$\Delta\Delta u_i = 0 \quad (1.82)$$

1.4.2 Уравнения теории упругости в напряжениях

Уравнения (1.74) - (1.77) можно свести к системе шести уравнений относительно шести независимых компонент тензора напряжений:

$$\Delta\sigma_{ij} + \frac{3}{1+\nu}\sigma_{,ij} = -\frac{\rho\nu}{1-\nu}\operatorname{div}\bar{F}\delta_{ij} - \rho(F_{i,j} + F_{j,i}) \quad (1.83)$$

или в случае отсутствия массовых сил

$$\Delta\sigma_{ij} + \frac{3}{1+\nu}\sigma_{,ij} = 0 \quad (1.84)$$

$$\Delta\Delta\sigma = 0 \quad (1.85)$$

$$\Delta\Delta\sigma_{ij} = 0 \quad (1.86)$$

Глава 2

Пластичность

2.1 Диаграммы $\sigma \sim \varepsilon$ одноосного растяжения

Определяющие соотношения (зависимость между напряжениями и деформациями) строятся на основе экспериментальных данных и свойствах материала. На рис. 2.1 приведены диаграммы растяжения мягкой стали и меди при комнатной температуре. Как видно, характер этих кривых совершенно различный. На диаграмме растяжения стали точка A соответствует так называемому пределу пропорциональности и лежит несколько ниже точки B — предела упругости, после которого появляются остаточные деформации и удлинения быстро увеличиваются. После точки B имеется "площадка текучести" BC . За точкой C напряжения вновь возрастают. Участок CD соответствует состоянию упрочнения материала.

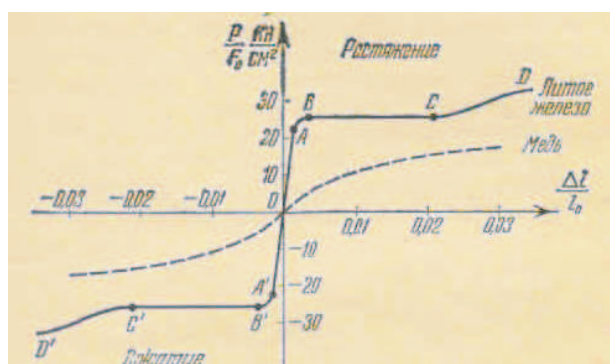


Рис. 2.1:

Если нагрузку уменьшать, то кривая разгрузки ABC , близка к прямой линии (рис. 2.2)

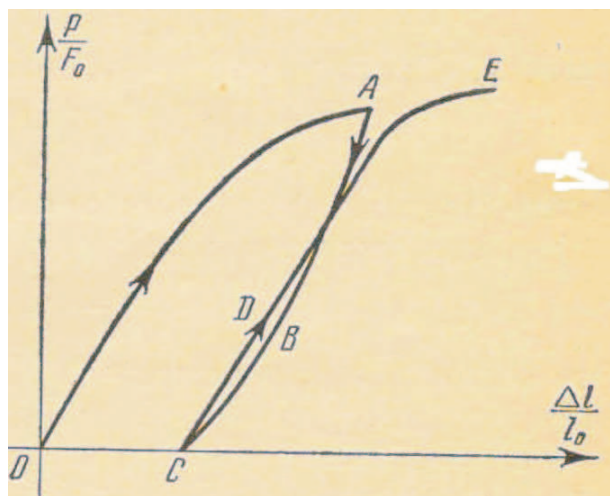


Рис. 2.2:

2.2 Условие текучести. Поверхность и кривая текучести

Приведенные выше кривые $\sigma \sim \varepsilon$ относились к одноосному напряженному состоянию. Для построения трехмерных моделей теории пластичности нужно знать поведение материала при сложном напряженном состоянии. В частности необходимо знать, при каких условиях материал из упругого состояния переходит в состояние текучести, сопровождаемое появлением остаточных деформаций.

Условие, при котором наступает состояние текучести называется условием текучести (или пластичности).

Для изотропного материала это условие должно быть симметричной функцией главных напряжений:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \text{const} = K$$

Поскольку основными симметричными функциями компонент тензора напряжений являются его инварианты, последнее условие может быть представлено в виде:

$$f(\sigma, I_2(T_\sigma), I_3(T_\sigma)) = K,$$

где $I_2(T_\sigma)$ и $I_3(T_\sigma)$ — инварианты тензора напряжений.

Из экспериментальных данных следует, что влияние среднего давления на процесс формоизменения пренебрежимо мало. Если считать, что состояние текучести не зависит от среднего давления, то условие текучести записывается в

виде:

$$f(\sigma, I_2(D_\sigma), I_3(D_\sigma)) = K, \quad \text{или} \quad f(I_2(D_\sigma), I_3(D_\sigma)) = 0, \quad (2.1)$$

где $I_2(D_\sigma)$ и $I_3(D_\sigma)$ — инварианты девиатора напряжений.

Для изотропного материала, свойства которого одинаковы при растяжении и сжатии, кривая текучести обладает следующими свойствами (рис. 2.3):

- 1) Кривая текучести не проходит через начало координат.
- 2) Кривая текучести симметрична относительно осей $1', 2', 3'$
- 3) Кривая текучести симметрична относительно прямых, перпендикулярных к осям $1', 2', 3'$
- 4) Кривая текучести должна быть выпуклой

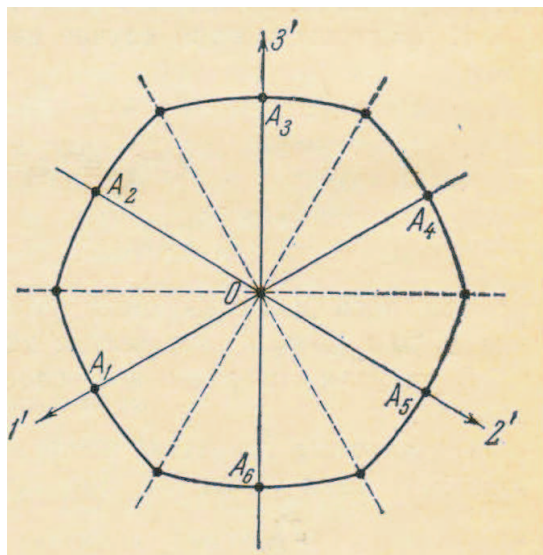


Рис. 2.3:

2.2.1 Условие текучести Треска — Сен-Венана

Французский исследователь Треска проводил опыты по истечению материала через отверстия. Основываясь на результатах экспериментов, он высказал следующее предположение:

в состоянии текучести во всех точках среды максимальное касательное напряжение имеет одно и то же значение для данного материала.

Математически это условие записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} 2|\tau_1| &= |\sigma_2 - \sigma_3| \leq \sigma_s, \\ 2|\tau_2| &= |\sigma_3 - \sigma_1| \leq \sigma_s, \\ 2|\tau_3| &= |\sigma_1 - \sigma_2| \leq \sigma_s, \end{aligned} \quad (2.2)$$

В упругом состоянии все условия (2.2.1) выполнены со знаком строго неравенства. Условия (2.2.1) в пространстве главных напряжений определяют правильную шестигранную призму с осью $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, перпендикулярной к девиаторной плоскости. Следом призмы на девиаторной плоскости является правильный шестиугольник (рис. 2.4).

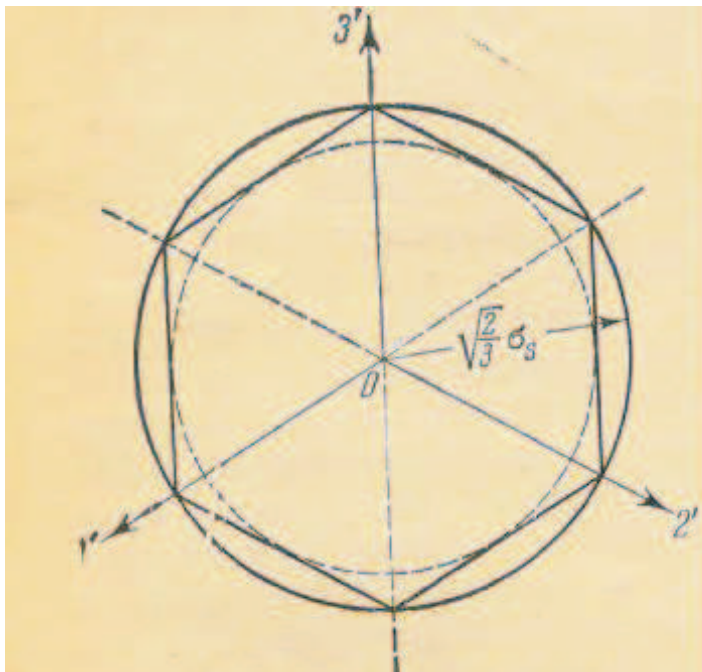


Рис. 2.4:

Из (2.2.1) вытекает следующее соотношение между пределом текучести σ_s на растяжение и пределом текучести τ_s на сжатие

$$\sigma_s = 2\tau_s.$$

2.2.2 Условие текучести Мизеса

Условие текучести Треска — Сен-Венана является кусочно гладким. Это вызывает математические трудности при решении конкретных задач. Мизес при

записи условия текучести заменил шестигранную призму описанным круговым цилиндром:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_s^2 \quad (2.3)$$

или

$$T = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \quad (2.4)$$

В случае чистого сдвига $T = \tau$ и, следовательно,

$$\tau_s = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}. \quad (2.5)$$

Левая часть уравнения (2.3) соответствует с точностью до постоянного множителя энергии упругого изменения формы.

2.3 Модель жесткопластического тела.

2.3.1 Основные положения модели идеального жёсткопластического тела

Простейшая модель идеального жёсткопластического тела строится при следующих предположениях:

- идеальный характер пластического деформирования (отсутствует упрочнение)
- начальный материал изотропный и в процессе деформирования остаётся изотропным
- свойства материала одинаковые при растяжении и сжатии
- пластическое деформирование не зависит от всестороннего давления
- отсутствуют упругие деформации
- материал однородный

Принимается принцип максимума скорости диссипации механической энергии:

скорость диссипации механической энергии в единице объёма во время пластического деформирования имеет максимальное значение для действительного напряжённого состояния среди всех напряжённых состояний, допускаемых условием пластичности:

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \geq \sigma_{ij}^*\varepsilon_{ij},$$

где напряжения σ_{ij}^* удовлетворяют неравенству

$$f(\sigma_{ij}^*) \leq 0.$$

Мы предполагаем, что пластическое состояние в точке достигается тогда, когда компоненты тензора напряжений удовлетворяют условию

$$F(\sigma_{ij}) = 0.$$

Это уравнение в шестимерном пространстве напряжений σ_{ij} определяет поверхность, которая называется *поверхностью текучести*.

Напряженные состояния σ_{ij}^* , для которых выполняется неравенство

$$F(\sigma_{ij}^*) \leq 0$$

будем называть *допустимыми*.

Для изотропного тела условие перехода в пластическое состояние должно определяться только главными напряжениями независимо от ориентации главных осей. Поэтому условие пластичности для изотропного тела можно записать в виде

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0.$$

Из принципа максимума следует ассоциированный закон текучести

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial F(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}$$

Определим мощность диссипации энергии внутренних напряжений на скоростях пластических деформаций

$$D = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}$$

Поверхность текучести предполагается не вогнутой. Из этого предположения следует, что задание компонент тензора скоростей деформаций единственным образом определяет напряженное состояние. И, следовательно, в этом

случае мощность диссипации может быть выражена через скорости деформаций

$$\sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} = D(\dot{\epsilon}_{ij})$$

Взяв полный дифференциал от обеих частей этого равенства, получим

$$\dot{\epsilon}_{ij}d\sigma_{ij} + \sigma_{ij}d\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\partial D}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}}d\dot{\epsilon}_{ij}$$

Вследствие ассоциированного закона текучести имеем

$$\dot{\epsilon}_{ij}d\sigma_{ij} = \lambda \frac{\partial F(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}d\sigma_{ij} = \lambda dF = 0,$$

поскольку принимается модель идеальной пластичности.

И в силу произвольности $d\dot{\epsilon}_{ij}$ получаем соотношения

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial D}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}}.$$

Таким образом,

$$D = \sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\partial D}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}}\dot{\epsilon}_{ij}$$

Следовательно, $D(\dot{\epsilon}_{ij})$ — однородная функция своих аргументов первой степени, $\frac{\partial D}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}}$ — однородная функция своих аргументов нулевой степени.

Таким образом, величины $\frac{\partial D}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}}$ зависят только от пяти независимых аргументов, т.е. формулы

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial D}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}}.$$

выражают шесть величин σ_{ij} через пять независимых аргументов.

Уравнение

$$D(\dot{\epsilon}_{ij}) = \text{const}$$

определяет поверхность постоянной диссипации в пространстве скоростей деформаций $\dot{\epsilon}_{ij}$.

Можно нормировать эти поверхности, например, следующим образом:

$$D(\dot{\epsilon}_{ij}) = 1.$$

Теперь можно сформулировать следующий принцип максимума:

Пусть σ_{ij} — заданное напряженное состояние, $\dot{\varepsilon}_{ij}$ — соответствующее нормированное истинное поле скоростей деформации, $\dot{\varepsilon}_{ij}^*$ — произвольное поле скоростей такое, что $D(\dot{\varepsilon}_{ij}^*) = 1$.

Тогда

$$(\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^*)\sigma_{ij} \geq 0.$$

Доказательство.

Перепишем последнее неравенство в следующем виде:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}\sigma_{ij} \geq \dot{\varepsilon}_{ij}^*\sigma_{ij}, \quad \text{или} \quad 1 \geq \dot{\varepsilon}_{ij}^*\sigma_{ij}.$$

Остается показать, что правая часть не больше единицы.

Пусть σ_{ij}^* — пластическое напряженное состояние, соответствующее полю скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^*$.

Тогда из принципа максимума следует

$$(\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij})\dot{\varepsilon}_{ij}^* \geq 0,$$

или

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^*\sigma_{ij} \leq \dot{\varepsilon}_{ij}^*\sigma_{ij}^*$$

Но $\dot{\varepsilon}_{ij}^*\sigma_{ij}^* = D(\dot{\varepsilon}_{ij}^*) = 1$, следовательно,

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^*\sigma_{ij} \leq 1.$$

2.4 Экстремальные свойства предельных состояний текучести

В идеально пластическом теле напряжения не могут превосходить предела текучести. Поэтому внешние силы, действующие на тело из идеально пластического материала, не могут возрастать неограниченно.

Система нагрузок, при которой в теле из идеально пластического материала впервые возникает пластическое течение, называется *предельной системой нагрузок*.

2.4.1 Теорема о нижней оценке несущей способности

Определение. Распределение напряжений σ_{ij}^* называется *статически допустимым*, если

- оно удовлетворяет всюду в теле уравнениям равновесия: $\sigma_{ij,j}^* = 0$,
- удовлетворяет граничным условиям на части поверхности S_T : $\sigma_{ij}^* n_j = \hat{T}_i$
- и всюду в теле выполняется неравенство $f(\sigma_{ij}^*) \leq 0$.

Теорема 1 (о нижней оценке несущей способности). Пусть $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, v_i$ — истинное решение задачи о предельном состоянии тела, на которое на части поверхности S_T действуют поверхностные нагрузки \hat{T}_i ; σ_{ij}^* — статически допустимое напряженное состояние, которому на части поверхности S_v соответствуют поверхностные силы T_i^* . Тогда выполняется неравенство

$$\int_{S_v} T_i v_i dS \geq \int_{S_v} T_i^* v_i dS.$$

Доказательство. Составим уравнения равновесия в форме Лагранжа как для истинного, так и для статически допустимого полей напряжений. За виртуальное (возможное) поле скоростей примем истинное поле скоростей:

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV &= \int_{S_v} T_i v_i dS + \int_{S_T} \hat{T}_i v_i dS, \\ \int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} dV &= \int_{S_v} T_i^* v_i dS + \int_{S_T} \hat{T}_i v_i dS, \end{aligned}$$

В этих равенствах $T_i = \sigma_{ij} n_j$, $T_i^* = \sigma_{ij}^* n_j$.

Вычитая из второго равенства первое, получим

$$\int_{S_v} T_i v_i dS - \int_{S_v} T_i^* v_i dS = \int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \varepsilon_{ij} dV.$$

Но в силу принципа максимума диссипации механической энергии

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \varepsilon_{ij} \geq 0 \text{ всюду в объёме } V.$$

Следовательно,

$$\int_{S_v} T_i v_i dS \geq \int_{S_v} T_i^* v_i dS.$$

ч.т.д. Доказанное неравенство можно использовать для получения нижней оценки предельной (несущей) нагрузки.

Пусть внешняя нагрузка сводится к одной обобщенной силе, т.е. $\int_{S_v} T_i v_i dS = Q\dot{q}$. В этом случае $\int_{S_v} T_i^* v_i dS = Q^*\dot{q}$ и, следовательно,

$$Q \geq Q^*.$$

Пусть на части поверхности S_T нагрузки заданы в виде μT_i^0 , где μ — неопределённый множитель и статически допустимое напряженное состояние удовлетворяет на части поверхности S_T условиям $\sigma_{ij} n_j = \mu^* T_i$. Тогда множитель μ можно принять за обобщённую силу. В

этом случае обобщённая скорость будет равна $\int_{S_T} T_i^0 v_i dS$. И неравенство принимает вид

$$\mu \geq \mu^*.$$

Коэффициентом запаса, соответствующим некоторой системе нагрузок T_i , не превышающих предельного значения, назовем число μ , если нагрузки μT_i являются предельными. Число μ^* назовём статически допустимым множителем.

Тогда доказанное выше неравенство можно эквивалентно следующему утверждению.

Коэффициент запаса является наибольшим допустимым множителем $\mu^ \leq \mu$. Или*

Статически допустимый множитель является нижней оценкой коэффициента запаса.

2.4.2 Теорема о верхней оценке несущей способности

Теорема 2 (о верхней оценке несущей способности). Пусть $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, v_i$ — истинное решение задачи о предельном состоянии тела, на которое на части поверхности S_T действуют поверхностные нагрузки \hat{T}_i ;

Пусть $v_i^*, \varepsilon_{ij}^*$ — произвольное кинематически допустимое поле скоростей и скоростей деформации, т.е. $v_i^* = v_i$ на части поверхности S_V . По скоростям деформаций ε_{ij}^* однозначно определяются напряжения σ_{ij}^* (если поверхность текучести выпуклая).

Тогда выполняется неравенство

$$\int_S T_i v_i^* dS \leq \int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* dV.$$

Доказательство. Составим уравнения равновесия в форме Лагранжа, приняв за поле возможных перемещений v_i^*

$$\int_S T_i v_i^* dS = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* dV.$$

Прибавим и вычтем в правой части этого равенства мощность пластического формоизменения, соответствующего кинематически допустимому полю скоростей, т.е. $\int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* dV$.

В результате получим

$$\int_S T_i v_i^* dS = \int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* - \int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \varepsilon_{ij}^* dV.$$

В силу принципа максимума второе слагаемое в правой части неотрицательное и, следовательно, имеет место требуемое неравенство

$$\int_S T_i v_i^* dS \leq \int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* dV.$$

В частности, если внешняя нагрузка сводится к одной обобщённой силе, то из последнего неравенства следует неравенство

$$Q \leq \frac{1}{\dot{q}} \int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* dV.$$

2.5 Плоская задача теории идеальной пластичности

Пусть x_1, x_2, x_3 — декартова система координат.

Под "плоской" будем понимать задачу, в которой выполняются следующие условия:

- неизвестными являются три компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$, три компоненты тензора деформаций $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$ и две компоненты вектора скорости v_1, v_2 как функции двух независимых переменных x_1, x_2
- остальные компоненты тензора напряжений, тензора деформаций и вектора перемещений не обязательно равны нулю, но могут быть определены после решения "плоской" задачи.
- условие пластичности может быть выражено в виде соотношения между главными напряжениями σ_1 и σ_2 в плоскости x_1 и x_2 . Напряжение σ_3 предполагается либо вообще не входящим в условие пластичности, либо исключенным из этого условия.

Итак, пусть σ_1 и σ_2 — главные напряжения в плоскости x_1 и x_2 .

Вместо σ_1 и σ_2 введем величины

$$p = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2), \quad \tau = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2). \quad (2.6)$$

Тогда условие пластичности может быть записано в виде:

$$\tau = \tau(p). \quad (2.7)$$

Обозначим через ψ угол между первым главным направлением и осью x_1 . Выразим компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ через p, τ, ψ :

$$\sigma_{11} = p + \tau(p) \cos 2\psi, \quad \sigma_{22} = p - \tau(p) \cos 2\psi, \quad \sigma_{12} = \tau(p) \sin 2\psi, \quad (2.8)$$

Подставим эти выражения в уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0 \quad (2.9)$$

В результате получим систему двух квазилинейных уравнений в частных производных относительно величин p и τ :

$$(1 + \tau' \cos 2\psi)p_{,1} - 2\tau(\sin 2\psi)\psi_{,1} + \tau' p_{,2} \sin 2\psi + 2\tau(\cos 2\psi)\psi_{,2} = 0, \quad (2.10)$$

$$(1 - \tau' \cos 2\psi)p_{,2} + 2\tau(\sin 2\psi)\psi_{,2} + \tau' p_{,1} \sin 2\psi + 2\tau(\cos 2\psi)\psi_{,1} = 0, \quad (2.11)$$

где $\tau' = \frac{d\tau}{dp}$.

2.5.1 Характеристики поля напряжений

Для интегрирования квазилинейной системы (2.10), (2.11) используем метод характеристик. Добавим к уравнениям (2.10), (2.11) тождества

$$p_{,1}dx_1 + p_{,2}dx_2 = 0, \quad \psi_{,1}dx_1 + \psi_{,2}dx_2 = 0 \quad (2.12)$$

Определитель матрицы системы (2.10), (2.11), (2.12) относительно производных $p_{,1}, \psi_{,1}, p_{,2}, \psi_{,2}$ равен:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + \tau' \cos 2\psi & -2\tau \sin 2\psi & \tau' \sin 2\psi & 2\tau \cos 2\psi \\ \tau' \sin 2\psi & 2\tau \cos 2\psi & 1 - \tau' \cos 2\psi & 2\tau \sin 2\psi \\ dx_1 & 0 & dx_2 & 0 \\ 0 & dx_1 & 0 & dx_2 \end{vmatrix}$$

Определитель расширенной матрицы равен:

$$D = \begin{vmatrix} 1 + \tau' \cos 2\psi & -2\tau \sin 2\psi & \tau' \sin 2\psi & 2\tau \cos 2\psi & 0 \\ \tau' \sin 2\psi & 2\tau \cos 2\psi & 1 - \tau' \cos 2\psi & 2\tau \sin 2\psi & 0 \\ dx_1 & 0 & dx_2 & 0 & dp \\ 0 & dx_1 & 0 & dx_2 & d\psi \end{vmatrix}$$

Характеристическое направление (dx_1, dx_2) определяется из уравнения

$$\Delta = dx_1^2(\cos 2\psi + \tau') + 2dx_1dx_2 \sin 2\psi + (\cos 2\psi - \tau')dx_2^2 = 0$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\sin 2\psi \pm \sqrt{1 - \tau'^2}}{\cos 2\psi + \tau'} \quad (2.13)$$

Если $|\tau'| < 1$ — система гиперболическая
 Если $|\tau'| = 1$ — система параболическая
 Если $|\tau'| > 1$ — система эллиптическая

Рассмотрим случай $|\tau'| < 1$. В этом случае система является гиперболической и имеется два семейства вещественных характеристик.

Будем называть семейство характеристик

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\sin 2\psi - \sqrt{1 - \tau'^2}}{\cos 2\psi + \tau'} \quad (2.14)$$

ξ — характеристиками,
а семейство характеристик

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\sin 2\psi + \sqrt{1 - \tau'^2}}{\cos 2\psi + \tau'}$$

η — характеристиками.

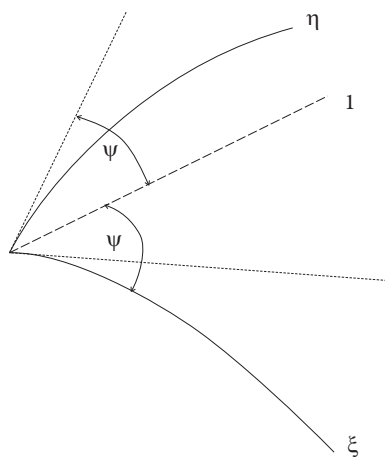


Рис. 2.5:

Если ось x_1 направить по касательной к характеристике ξ , то угол $\varphi = 0$ и, следовательно, на ξ — характеристике выполняется соотношение

$$\sin 2\psi = +\sqrt{1 - \tau'^2}.$$

Аналогично на η — характеристике выполняется соотношение

$$\sin 2\psi = +\sqrt{1 + \tau'^2}.$$

Следовательно,

$$\cos 2\psi = \tau'. \quad (2.15)$$

Знак минус в (2.15), так как в противном случае знаменатель в (2.14) обращается в нуль. Поэтому в каждой точке характеристики составляют углы с первым главным направлением (рис. 2.5).

Из (2.15) следует, что

$$\operatorname{tg}\psi = \sqrt{\frac{1 - \tau'}{1 + \tau'}}. \quad (2.16)$$

На характеристиках должны выполняться условия (ранг матрицы системы равняется рангу расширенной матрицы)

$$\begin{aligned} & \text{rang} \begin{pmatrix} 1 + \tau' \cos 2\psi & -2\tau \sin 2\psi & \tau' \sin 2\psi & 2\tau \cos 2\psi \\ \tau' \sin 2\psi & 2\tau \cos 2\psi & 1 - \tau' \cos 2\psi & 2\tau \sin 2\psi \\ dx_1 & 0 & dx_2 & 0 \\ 0 & dx_1 & 0 & dx_2 \end{pmatrix} = \\ & = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 + \tau' \cos 2\psi & -2\tau \sin 2\psi & \tau' \sin 2\psi & 2\tau \cos 2\psi & 0 \\ \tau' \sin 2\psi & 2\tau \cos 2\psi & 1 - \tau' \cos 2\psi & 2\tau \sin 2\psi & 0 \\ dx_1 & 0 & dx_2 & 0 & dp \\ 0 & dx_1 & 0 & dx_2 & d\psi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Эти условия приводят к следующим соотношениям на характеристиках:

$$\frac{1}{2\tau} \sqrt{1 - \tau'^2} dp - d\psi = 0 \quad \text{на } \xi\text{- характеристике}$$

и

$$\frac{1}{2\tau} \sqrt{1 - \tau'^2} dp + d\psi = 0 \quad \text{на } \eta\text{- характеристике.}$$

Обозначим

$$G(p) = \frac{1}{2} \int \sqrt{1 - \tau'^2} \frac{dp}{\tau}. \quad (2.17)$$

Тогда соотношения на характеристиках записываются в следующем виде:

$$G(p) - \psi = \text{const} \quad \text{на } \xi\text{- характеристике} \quad (2.18)$$

и

$$G(p) + \psi = \text{const} \quad \text{на } \eta\text{- характеристике} \quad (2.19)$$

2.5.2 Уравнения для определения поля скоростей.

Условие пластичности записываем в виде

$$F(\sigma_1, \sigma_2) = \tau - \tau(p) = 0 \quad \left(\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right).$$

Из ассоциированного закона пластичности следует

$$\dot{\varepsilon}_1 = \lambda(1 - \tau'), \quad \dot{\varepsilon}_2 = -\lambda(1 + \tau'), \quad \dot{\varepsilon}_{12} = 0. \quad (2.20)$$

Исключая λ , получим

$$(1 + \tau')\dot{\varepsilon}_1 + (1 - \tau')\dot{\varepsilon}_2 = 0.$$

Учитывая, что $\dot{\varepsilon}_1 = \partial v_1 / \partial x_1$ и $\dot{\varepsilon}_2 = \partial v_2 / \partial x_2$, получаем уравнение в частных производных относительно компонент вектора скорости

$$(1 + \tau')v_{1,1} + (1 - \tau')v_{2,2} = 0.$$

Добавим к этому уравнению условие $\dot{\varepsilon}_{12} = 0$:

$$\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 = 0,$$

или

$$v_{1,2} + v_{2,1} = 0.$$

Таким образом, имеем систему двух дифференциальных уравнений для двух компонент вектора скорости

$$(1 + \tau')v_{1,1} + (1 - \tau')v_{2,2} = 0, \quad v_{1,2} + v_{2,1} = 0. \quad (2.21)$$

Можно показать, что характеристики системы (2.21) совпадают с характеристиками поля напряжений. На характеристиках для поля скоростей имеют место следующие соотношения

$$\frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} - v_{n\xi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0 \quad \text{на } \xi\text{-характеристике} \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} - v_{n\eta} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0 \quad \text{на } \eta\text{-характеристике} \quad (2.23)$$

В (2.21), (2.22) v_ξ , v_η — составляющие вектора скорости на касательные направления к характеристикам; $v_{n\xi}$, $v_{n\eta}$ — составляющие вектора скорости на нормальные направления к характеристикам.

2.5.3 Условия пластичности Мизеса и Треска — Сен-Венана в случае плоской деформации.

Условие пластичности Мизеса в главных напряжениях записывается в следующем виде:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_T^2. \quad (2.24)$$

Вследствие ассоциированного закона пластичности имеем

$$\dot{\varepsilon}_3 = \lambda(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2) = 0.$$

Следовательно,

$$\sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$$

Подставляя это выражение в (2.24), получим

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T.$$

Рассмотрим условие пластичности Треска:

пластичность наступает тогда, когда максимальное касательное напряжение достигает критического значения.

В случае плоской деформации равенство нулю компоненты тензора скорости деформации $\dot{\varepsilon}_3$ означает, что напряжение не входит в условие пластичности. Тогда, если σ_1 наибольшее главное напряжение, а σ_2 — наименьшее, условие пластичности Треска запишется в виде:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_T.$$

Таким образом, в случае плоской деформации условие пластичности Мизеса и условие пластичности Треска — Сен-Венана сводятся к равенству

$$\tau = k \tag{2.25}$$

и различаются только значением константы k .

2.5.4 Плоская деформация жесткопластичекого идеального тела при условиях пластичности Треска-Сен Венана и Мизеса.

В случае плоской деформации ($\dot{\varepsilon}_3 = 0$) условие пластичности Мизеса и условие пластичности Треска — Сен-Венана сводятся к равенству

$$\tau(p) = k,$$

где

$$p = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2), \quad \tau = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

и различаются только значением константы k .

Следовательно, $\tau' = d\tau/dp = 0$.

Полагая в ранее полученном равенстве

$$\operatorname{tg}\psi = \sqrt{\frac{1 - \tau'}{1 + \tau'}}.$$

$\tau' = d\tau/dp = 0$, получаем $\operatorname{tg}\psi = 1$. Следовательно, угол между касательными к характеристикам и 1-м главным направлением равен $\pi/4$. Но на площадках, равнонаклоненных к главным осям, достигают максимального значения касательные напряжения.

Следовательно, характеристики — это *траектории главных касательных напряжений* или *линии скольжения*.

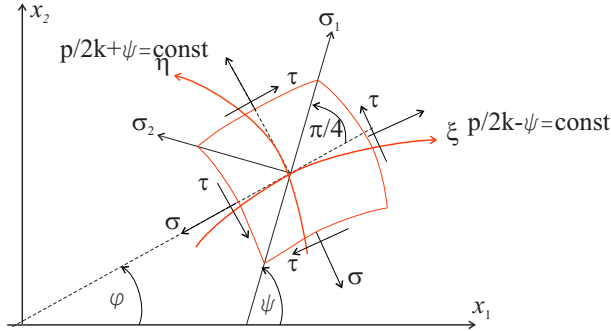


Рис. 2.6:

Соотношения на характеристиках :

$$G(p) - \psi = \text{const} \quad \text{на} \quad \xi\text{— характеристике}$$

и

$$G(p) + \psi = \text{const} \quad \text{на} \quad \eta\text{— характеристике},$$

где

$$G(p) = \frac{1}{2} \int \sqrt{1 - \tau'^2} \frac{dp}{\tau}.$$

принимают в этом случае следующий вид:

$$\frac{p}{2k} - \psi = \text{const} \quad \text{на} \quad \xi\text{— характеристике}$$

$$\frac{p}{2k} + \psi = \text{const} \quad \text{на} \quad \eta\text{— характеристике}$$

Из соотношений на характеристиках следует естественный выбор координатных параметров на характеристических линиях:

$$\frac{p}{2k} + \psi = \xi, \quad \frac{p}{2k} - \psi = \eta$$

Такой выбор возможен только в том случае, если существует взаимно однозначное соответствие между координатами x_1, x_2 и параметрами ξ, η .

Используя соотношения вдоль характеристик, можно получить ряд полезных свойств характеристических линий, которые используются при построении полей напряжений. Приведем некоторые из них.

Свойство 1. Вдоль линии скольжения давление p изменяется пропорционально углу между касательной к линии скольжения и осью x_1 .

Свойство 2. (Первая теорема Генки) Если переходить от одной линии скольжения η к другой вдоль любой линии скольжения семейства ξ , то угол φ и давление p будут изменяться на одну и ту же величину.

Свойство 3. Если известно значение p в какой либо точке заданной сетки линий скольжения, то оно может быть вычислено в любой точке.

Свойство 4. Если некоторый отрезок линии скольжения — прямой, то вдоль него постоянны величины p и ψ , и компоненты напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$. и, следовательно,

если в некоторой области прямолинейны оба семейства линий скольжения, то в этой области напряжения распределены равномерно (не зависят от координат).

Свойство 5. Если некоторый отрезок линии скольжения семейства ξ (или η) — прямой, то все соответствующие отрезки линий ξ (или η) — прямые.

Свойство 6. Прямые отрезки, отсекаемые линиями скольжения другого семейства, имеют одинаковую длину.

Итак, пусть в качестве координатных параметров характеристических линий выбраны параметры

$$\frac{p}{2k} + \psi = \xi, \quad \frac{p}{2k} - \psi = \eta.$$

Поскольку угол наклона ψ характеристик к линиям главных напряжений отличается от угла φ на постоянную величину $\pi/4$, то в соотношения на характеристиках угол ψ можно заменить на угол φ .

Дифференциальные уравнения характеристик в плоскости x_1, x_2 имеют вид:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{tg}\varphi \quad \text{на линии } \xi, \quad \frac{dx_2}{dx_1} = -\operatorname{ctg}\varphi \quad \text{на линии } \eta$$

Следовательно,

$$\frac{\partial x_2}{\partial \xi} - \operatorname{tg}\varphi \frac{\partial x_1}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial x_2}{\partial \eta} + \operatorname{ctg}\varphi \frac{\partial x_1}{\partial \eta} = 0 \quad (2.26)$$

Ведем новые переменные

$$x_1 = \bar{x}_1 \cos \varphi - \bar{x}_2 \sin \varphi, \quad x_2 = \bar{x}_1 \sin \varphi + \bar{x}_2 \cos \varphi$$

В этих переменных дифференциальные уравнения (2.26) запишутся в виде

$$\frac{\partial \bar{x}_2}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \bar{x}_1 = 0, \quad \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial \eta} - \frac{1}{2} \bar{x}_2 = 0 \quad (2.27)$$

Исключая из этих уравнений \bar{x}_1 или \bar{x}_2 , получим, что величины \bar{x}_1 и \bar{x}_2 удовлетворяют телеграфному уравнению:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{4} f = 0. \quad (2.28)$$

Как было отмечено выше дифференциальная система уравнений для определения поля скоростей имеет те же самые семейства характеристик, что и для поля напряжений. Соотношения на характеристиках для компонент вектора скорости имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} - v_{n\xi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} &= 0 \quad \text{на } \xi\text{-характеристике} \\ \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} - v_{n\eta} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} &= 0 \quad \text{на } \eta\text{-характеристике} \end{aligned}$$

Для ортогональной сетки характеристик выполняются равенства $v_{n\xi} = v_\eta$, $v_{n\eta} = -v_\xi$.

Поэтому соотношения на характеристиках для компонент вектора скорости принимают вид:

$$\frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} - \frac{1}{2} v_\eta = 0, \quad \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} + \frac{1}{2} v_\xi = 0$$

Исключая из этих уравнений v_ξ или v_η , получим телеграфное уравнение:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{4} f = 0$$

2.5.5 Численное решение задачи Коши для поля напряжений.

Пусть на участке дуги AB границе области, занятой телом и находящемся в условиях плоской деформации, заданы усилия (рис. 2.7).

В формулах

$$\sigma_{11} = p + \tau(p) \cos 2\psi, \quad \sigma_{22} = p - \tau(p) \cos 2\psi, \quad \sigma_{12} = \tau(p) \sin 2\psi$$

положим $\psi = \varphi + \pi/4$.

В результате получим

$$\sigma_{11} = p - \tau \sin 2\varphi, \quad \sigma_{22} = p + \tau \sin 2\varphi, \quad \sigma_{12} = \tau \cos 2\varphi$$

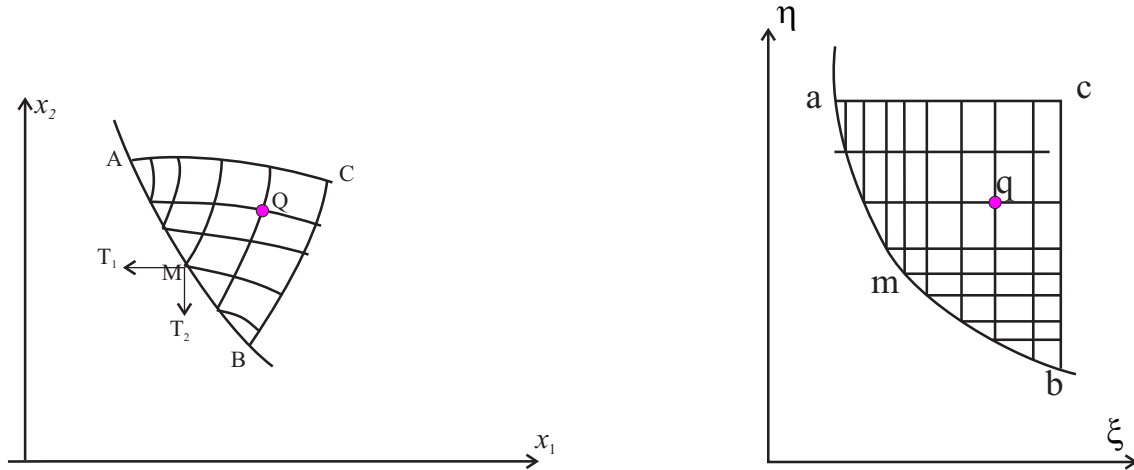


Рис. 2.7:

Поскольку на дуге AB контура в каждой точке выполнены условия $\sigma_{\alpha\beta} = T_\alpha$, а $\sigma_{\alpha\beta}$ выражаются через две величины p и φ , то каждой точке контура M можно сопоставить точку m в плоскости характеристик ξ, η , а отрезку кривой AB в плоскости x_1, x_2 будет соответствовать отрезок ab в плоскости характеристик. Для каждой точки m кривой ab в плоскости характеристик можно вычислить величины \bar{x}_1, \bar{x}_2 . Затем в плоскости характеристик интегрируется линейная система уравнений относительно величин \bar{x}_1, \bar{x}_2 . Решение определяется в характеристическом треугольнике abc .

$$(\bar{x}_2)_{m,n} = (\bar{x}_2)_{m-1,n} - \frac{1}{2}(\bar{x}_1)_{m-1,n}\Delta\xi,$$

$$(\bar{x}_1)_{m,n} = (\bar{x}_1)_{m,n-1} + \frac{1}{2}(\bar{x}_2)_{m,n-1}\Delta\eta$$

Таким образом для каждого узла в плоскости ξ, η вычисляются величины \bar{x}_1, \bar{x}_2 . А, следовательно, координаты соответствующих точек в плоскости x_1, x_2 . Тем самым мы определяем криволинейные характеристики в плоскости x_1, x_2 . По координатам ξ, η вычисляются величины p и φ , а, следовательно, компоненты тензора напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$ в каждой точке Q .

2.5.6 Простые решения. Задача Прандтля.

Пусть на участок прямолинейной границы действуют равномерно распределенные нормальные усилия σ и касательные усилия τ . Нормаль \mathbf{n} к границе образует угол α с осью x_1 . Поскольку

$$\sigma_n = p - k \sin 2(\varphi - \alpha), \quad \tau_n = k \cos 2(\varphi - \alpha), \quad (2.29)$$

то p и φ — постоянные величины. Отсюда следует, что и величины ξ и η так же постоянные. Отрезок AB отображается на плоскости ξ, η в одну точку (ξ_0, η_0) . Угол наклона характеристик φ постоянен, поэтому пластическое поле представляет собой треугольник; внутри этого треугольника величина p постоянна и имеет то же значение, что и на границе.

2.5.7 Задача Прандтля о вдавливании гладкого штампа в полупространство.

Решение Прандтля

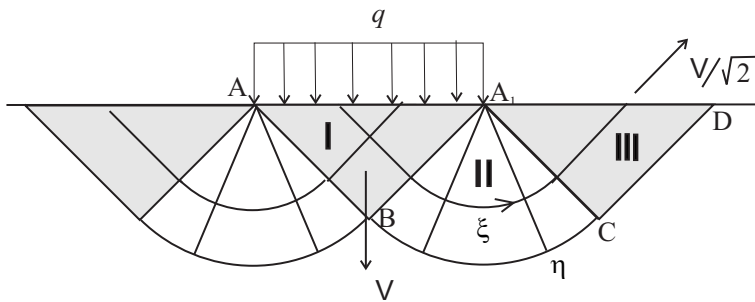


Рис. 2.8:

Пусть в прямолинейную границу полупространства вдавливается гладкий штамп. Под штампом возникает распределенное давление q . Треугольная область под штампом соответствует точке в плоскости характеристик. В этой области возникает постоянное напряженное состояние. При этом $\sigma_{22} = -q$. Характеристики подходят к поверхности под углом $\pi/4$. Пусть ξ — характеристика — линия, проведенная из точки по штампом под углом $-\pi/4$.

Тогда

$$\sigma_{22} = -q = p - k.$$

Следовательно,

$$p = k - q$$

в области I.

Пристроим к области I центрированное поле характеристик (область II), соединяющее область I с областью III. Характеристика семейства ξ выходит из области I под углом $-\pi/4$, превращается в дугу окружности, ортогональной к прямолинейным характеристикам семейства η и продолжается в области III как отрезок прямой, пересекающей границу под углом $\pi/4$. В области III $\sigma_{22} = 0$, и, следовательно, $0 = p + k$, или

$$p = -k.$$

Но вдоль ξ - характеристики величина η постоянна

$$\frac{k - q}{2k} + \frac{\pi}{4} = \frac{-k}{2k} - \frac{\pi}{4}.$$

Из последнего равенства следует выражение для предельной нагрузки:

$$q = (2 + \pi)k.$$

Поле скоростей в решении Прандтля следующее. Центральный треугольник движется вниз как жесткое целое. На линии AB тангенциальная составляющая скорости претерпевает разрыв, но нормальная к AB составляющая, равная $V/\sqrt{2}$, сохраняется неизменной вдоль каждой из дуг окружностей, представляющих собой ξ - характеристики в области II. В результате весь треугольник ACD движется как жесткое целое в направлении, указанном стрелкой, скользя по границе жесткой зоны CD .

Конфигурация пластических зон и кинематика течения в задачах жестко-пластического анализа единственным образом не определяются. На рис. 2.9 приведена схема течения, предложенная Хиллом.

Решение Хилла

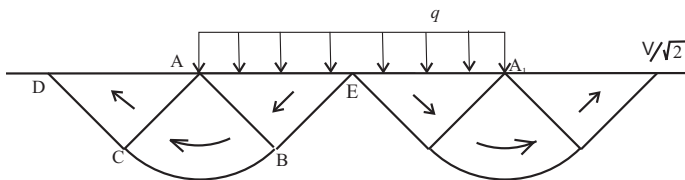


Рис. 2.9:

2.6 Теория течения

2.6.1 Поверхность нагружения (течения) с учетом упрочнения

На диаграммах $\sigma \sim \varepsilon$ одноосного растяжения имеется участок, соответствующий состоянию упрочнения (участок CD на рис. 2.1). Поэтому поверхность нагружения не является фиксированной (как в случае идеальной пластичности), а как-то расширяется и смещается по мере развития упрочнения.

Простейший вариант учета упрочнения — равномерное (изотропное) расширение поверхности текучести:

$$f[I_2(D_\sigma), I_3(D_\sigma)] = F(q), \quad (2.30)$$

где F — возрастающая функция некоторого параметра q , который характеризует предыдущую историю пластического деформирования.

В случае рассмотренных ранее условий текучести Мизеса и Треска $F(q) = \text{const} = K$.

Разгрузка При разгрузке деформация элемента происходит за счет накопленной упругой потенциальной энергии при нагружении. Из экспериментальных данных следует, что компоненты упругой деформации не зависят от пластического деформирования. Поэтому можно считать, что компоненты полной деформации ε_{ij} складываются (при условии ее малости) из упругих ε_{ij}^e и пластических ε_{ij}^p :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad (2.31)$$

Составляющие упругой деформации связаны с компонентами напряжения обобщенным законом Гука:

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma \delta_{ij} \right) \quad (2.32)$$

2.6.2 Вариант изотропного упрочнения

Самая простая формулировка условия изотропного упрочнения содержит лишь квадратичный инвариант девиатора напряжений:

$$T = f(q) \quad (2.33)$$

Выбор функции $f(q)$ может быть различным и базируется на экспериментальных данных.

Гипотеза единой кривой Если в качестве меры упрочнения взять

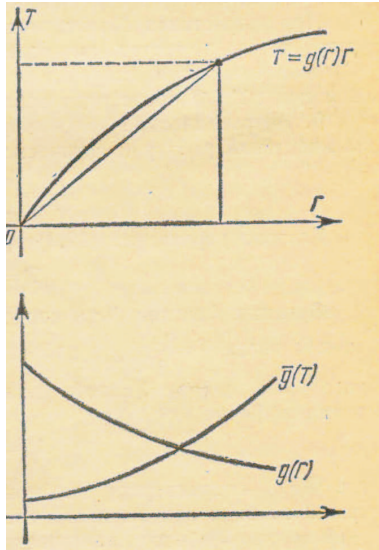


Рис. 2.10:

величину достигнутой интенсивности деформации сдвига Γ , то получим соотношение вида:

$$T = g(\Gamma)\Gamma \quad (2.34)$$

где $g(\Gamma)$ — некоторая положительная функция.

Если положить $g(\Gamma) = \tau_s/\Gamma$, то получим условие текучести Мизеса $T = \tau_s$.

Функция $g(\Gamma) = G$ соответствует упругому деформированию среды.

$$\frac{dT}{d\Gamma} - \frac{T}{\Gamma} = g'(\Gamma)\Gamma < 0.$$

Следовательно, $g'(\Gamma)$ и $g(\Gamma)$ — убывающая функция Γ .

Имеет место также неравенство $0 < g(\Gamma) < G$.

Существует обратная функция

$$\Gamma = \bar{g}(T)T, \quad (g(\Gamma)\bar{g}(T) = 1)$$

для которой выполнены неравенства

$$\bar{g}(T) \geq \frac{1}{G}, \quad \bar{g}'(T) > 0.$$

При нагружении $dT > 0$.

При $dT < 0$ тело разгружается.

Случай $dT = 0$ соответствует нейтральному нагружению, сопровождающемуся только упругими деформациями.

Энергетическое условие упрочнения

За меру упрочнения q можно взять работу напряжений на пластических деформациях.

$$A_p = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p$$

$$T = f(A_p)$$

или

$$A_p = \Phi(T), \quad \Phi(T) > 0, \quad \Phi'(T) > 0$$

При нагружении $dT > 0$.

При $dT < 0$ тело разгружается.

Случай $dT = 0$ соответствует нейтральному нагружению, сопровождающемуся только упругими деформациями.

2.6.3 Теория пластического течения

Исходные положения теории течения следующие.

- 1) Материал изотропный.
- 2) Относительное изменение объёма мало и является упругой деформацией, пропорциональной среднему давлению

$$\varepsilon = 3k\sigma, \quad \text{или} \quad d\varepsilon = 3kd\sigma.$$

- 3) Полные приращения компонент тензора деформаций есть сумма *упругих* приращений компонент тензора деформаций и *пластических* приращений компонент тензора деформаций

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p,$$

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} \left(d\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{1+\nu} \delta_{ij} d\sigma \right)$$

4) Девиатор напряжения и девиатор приращений пластической деформации пропорциональны

$$D_{d\varepsilon}^p = d\lambda D_\sigma,$$

где $d\lambda$ — скалярный множитель.

Так как $d\varepsilon^p = 0$, то условие 4) записывается в виде

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda s_{ij}$$

Вычислим приращение работы напряжений на приращениях пластических деформаций

$$dA_p = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \sigma_{ij} s_{ij} = 2d\lambda T^2.$$

Приращение работы напряжений на приращениях полных деформаций равно:

$$dA = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} (d\varepsilon^e + d\varepsilon^p) = dA_e + dA_p,$$

где

$$dA_e = d\Pi, \quad \Pi = \frac{3}{2}k\sigma^2 + \frac{1}{2G}T^2.$$

Состояние текучести.

Уравнения Прандтля — Рейса. В качестве дополнительного соотношения возьмем условие текучести Мизеса

$$T = \tau_s.$$

Тогда

$$d\lambda = \frac{dA_p}{2\tau_s^2} = \frac{\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p}{2\tau_s^2}$$

Теория пластичности Сен-Венана — Мизеса.

Уравнения теории пластичности Сен-Венана — Мизеса получаются из уравнений Прандтля — Рейса, если в них пренебречь упругими деформациями.

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda s_{ij}.$$

Эти соотношения можно записать в виде

$$\xi_{ij} = \lambda' s_{ij},$$

где

$$\lambda' = \frac{1}{2\tau_s^2} \frac{dA_p}{dt} = \frac{1}{2\tau_s^2} \sigma_{ij} \xi_{ij} = \frac{1}{2\tau_s^2} s_{ij} \xi_{ij}$$

или

$$\lambda' = \frac{H}{2\tau_s}.$$

Таким образом, соотношения Сен-Венана — Мизеса можно записать в следующем виде:

$$\frac{\xi_{ij}}{H} = \frac{s_{ij}}{2\tau_s}.$$

Состояние упрочнения.

Возьмем в качестве дополнительного соотношения условие изотропного упрочнения

$$dA_p = \Phi'(T)dt.$$

Для dA_p было получено выражение

$$dA_p = 2d\lambda T^2.$$

Если ввести обозначение

$$\frac{\Phi'(T)}{2T^2} = F(T),$$

то для величины $d\lambda$ получим выражение

$$d\lambda = F(T)dT.$$

Таким образом

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + F(T)dT s_{ij}.$$

Эти соотношения справедливы при $dT \geq 0$.