# УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

*Лектор: профессор Д. Л. Ткачев*

**5 – 6 семестры**

**Некоторые уравнения и системы математической физики.** Вывод уравнения малых поперечных колебаний струны. Понятие о начальных данных и краевых условиях. Вывод системы уравнений гидродинамики, уравнения теплопроводности, стационарный случай. ([4], л.1; [1], гл.1, § 2.)

**Системы дифференциальных уравнений и их характеристические поверхности.** Общий вид линейных и квазилинейных систем дифференциальных уравнений. Характеристический полином, характеристическое направление, уравнение конуса характеристических нормалей, определение характеристической поверхности системы. Системы уравнений первого порядка. Симметрические $t$–гиперболические системы. Система уравнений акустики. Одномерная система уравнений газодинамики. ([2], гл.1, § 6; гл. 2, § 9.)

**Классификация и приведение к каноническому виду линейных уравнений второго порядка.** Общий вид линейного уравнения второго порядка, уравнения конуса характеристических нормалей и характеристик. Тип уравнения в точке и области, канонический вид уравнения с постоянными коэффициентами. Линейные уравнения в случае двух независимых переменных. Приведение к каноническому виду. ([4], л. 3.)

**Задачи для волнового уравнения.** Формула общего решения одномерного уравнения, ее графическая интерпретация. Формула Даламбера. Принцип Дюамеля. Задача в квадранте с простейшим краевым условием. Использование формулы Даламбера для решения смешанной задачи. Задача Коши для трехмерного волнового уравнения при $t$=0.Вывод формулы Кирхгофа с использованием понятия сферического среднего. Принцип Гюйгенса. Вывод формулы Пуассона методом спуска Адамара. Принцип Дюамеля, запаздывающий потенциал. Сферические, цилиндрические и плоские волны. Теорема единственности решения смешанной задачи. ([4], л. 4, л. 14.)

**Интегралы энергии для решений волнового уравнения.** Конические характеристические поверхности многомерного волнового уравнения. Лемма об энергетической оценке. Единственность решения задачи Коши. Принцип конечной зависимости решений от начальных условий. Закон сохранения энергии. ([5], § 17; [2], гл. 2, § 18.)

**Понятие о корректных и некорректных задачах математической физики.** Примеры и определение корректных задач. Некорректность задачи

Коши для волнового уравнения с данными на плоскости $x = 0$. Пример Адамара для системы Коши – Римана. Теорема Коши – Ковалевской. ([4], л. 2, л. 22; [2], гл. 1, § 6.)

**Задача Коши для уравнения теплопроводности**. Постановка задачи Коши. Инвариантность множества решений уравнения теплопроводности относительно специальных преобразований плоскости. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности. Интеграл Пуассона. Принцип максимума. Единственность решения задачи Коши в классе ограниченных функций. Принцип Дюамеля. ([4], л. 8; [2], гл. 1, §§ 3–4; [3], гл. 1, § 1.)

**Метод Фурье для уравнений второго порядка.** Постановка смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка. Схема метода Фурье. Свободные колебания прямоугольной мембраны. Свободные колебания круглой мембраны. ([4], лл. 23, 27–28.)

**Решения уравнений Лапласа И Пуассона.** Гармонические функции, фундаментальное решение уравнения Лапласа. Формулы Грина. Лемма об интегральном представлении произвольной гладкой функции суммой потенциалов. Определение ньютоновского потенциала, потенциалов простого и двойного слоев. Простейшие свойства гармонических функций. Теорема о среднем. Принцип максимума. Постановки основных краевых задач для уравнения Лапласа. Единственность решения задачи Дирихле. ([4], лл. 9–13; [2], гл. 3, § 20.)

**Функция Грина задачи Дирихле.** Определение функции Грина задачи Дирихле, теорема об интегральном представлении гладкого решения через функцию Грина. Построение функции Грина для шара методом изображений. Внутренняя задача Дирихле для шара. Интеграл Пуассона. ([4], л. 21.)

**Свойства гармонических функций.** Лемма о гармоничности функции, удовлетворяющей теореме о среднем. Первая теорема Гарнака. Неравенства Гарнака. Вторая теорема Гарнака. Теорема Лиувилля. Внешняя задача Дирихле для шара. Лемма о поведении гармонической функции на бесконечности. Теоремы единственности решения внутренней и внешней задач Неймана. ([2], гл. 3,§ 20.)

**Уравнение Лапласа в ортогональных криволинейных координатах.** Преобразование оператора Лапласа при переходе к криволинейным координатам. Определение и свойства многомерных сферических координат. Уравнение Лапласа в сферических координатах. ([4], л.28.)

**Сферические функции в многомерном пространстве.** Решения задачи на собственные значения для угловой части оператора Лапласа. Ортогональность сферических гармоник разного порядка. След шарового многочлена на единичной сфере. Теорема о представлении Гаусса. Полнота в $L_2(S)$ последовательности сферических функций, соответствующих шаровым многочленам. Теорема о последовательности собственных чисел угловой части оператора Лапласа. Сферические гармоники в трехмерном пространстве. Базис в пространстве сферических гармоник данного порядка. Теорема об ограниченных решениях уравнения Лежандра. Присоединенные функции Лежандра. ([4], лл. 29–30; [6], гл. 2, § 10.)

**Уравнение Шредингера для движения частицы в центрально–симметричном и кулоновском полях.** Приложение сферических гармоник к трехмерному стационарному уравнению Шредингера с центрально – симметричным потенциалом. Разделение переменных в уравнении Шредингера в сферических координатах. Допустимые значения энергии, волновые функции. Полиномиальные множители в формуле для радиальной части. Полиномы Лагерра. ([6], гл. 2, § 5; гл. 5, § 26.)

**Оператор обобщенного дифференцирования.** Пространства $L_p(Q)$, $L_{loc}(Q)$, $C^\infty(Q)$, $C_0^\infty(Q)$. Регулярная обобщенная производная данного порядка от локально суммируемой функции. Лемма дю Буа – Реймонда. Функция, имеющая обобщенную производную, но не дифференцируемая в обычном смысле. Свойства оператора обобщенного дифференцирования. Слабая замкнутость оператора обобщенного дифференцирования. ([5], гл.1; [3], гл.3.)

**Операция усреднения.** Ядра усреднения. Средняя функция, ее свойства. Теорема о сходимости средних функций к исходной в равномерной норме. Теорема о невозрастании нормы в $L_p(Q)$ при усреднении. Сходимость средних к исходной функции по норме $L_p(Q)$. Лемма о перестановочности операторов обобщенного дифференцирования и взятия средней функции. ([5], гл. 1; [3], гл. 3.)

**Пространства Соболева.** Определение и свойства пространства Соболева $W_p^{(m)}(Q)$. Эквивалентные нормировки. Теорема о продолжимости через гладкую границу с сохранением класса. Теорема о плотности бесконечно–дифференцируемых функций в пространстве Соболева. След функции из пространства Соболева на гладкой границе области. ([5], гл. 1; [3], гл. 3.)

**Вариационный подход к решению задачи Дирихле.** Множество допустимых функций, заданных на границе области. Постановка обобщенной задачи Дирихле. Интеграл Дирихле, теорема о минимизирующей последовательности. Единственность решения вариационной задачи. Теорема о гармоничности решения вариационной задачи. Единственность решения обобщенной задачи Дирихле. Принцип Дирихле. Пример Адамара недопустимой функции. ([5], гл. 2; [2], гл. 3, § 21.)

**Понятие обобщенного решения задачи Коши.** Незамкнутость по равномерной норме множества гладких решений уравнения $u_t + u_x = 0$. Обобщенное решение как предел по равномерно–квадратичной норме последовательности гладких решений. Лемма о сходимости. Определение С.Л. Соболева обобщенного решения задачи Коши. Его корректность. Теорема существования и единственности обобщенного решения задачи Коши с начальными данными из $L_2(A,B)$. ([2], гл. 1, § 10.)

**Обобщенные функции.** Пространство распределений на финитных бесконечно дифференцируемых функциях. Пространство обобщенных функций медленного роста. Преобразование Фурье обобщенных функций. ([1], гл. 3, §§ 5–9.)

**Обобщенные решения задач математической физики.** Обобщенные решения дифференциальных уравнений. Фундаментальные решения дифференциальных операторов. ([1], гл. 3, § 11.)

## Литература


1. Владимиров В. С. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1971.
2. Годунов С. К. *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 1979.
3. Михайлов В. П. *Дифференциальные уравнения в частных производных*. М.: Наука, 1976.
4. Соболев С. Л. *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 1992.
5. Соболев С. Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*. М.: Наука, 1988.
6. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. *Специальные функции математической физики*. М.: Наука, 1984.


## Рекомендуемые темы семинарских занятий и упражнений к ним

### 5 семестр

1. Уравнения с частными производными первого порядка, задача Коши. Уравнение Гамильтона – Якоби. (2–3 занятия, [4], гл. 2, § 6.)

2. Классификация уравнений и систем, характеристические поверхности (1 занятие). Приведение к каноническому виду уравнений и систем. Общее решение. (3 занятия, [1], § 1; [2], гл. 1, § 2.)

3. Одномерное волновое уравнение, задача Коши, формула Даламбера, принцип Дюамеля, задачи в квадранте (1 занятие). Многомерное волновое уравнение, его характеристики, задача Коши, формулы Кирхгофа и Пуассона, принцип Дюамеля. (1 занятие, [2], гл. 4, § 12, п. 2; гл. 6, § 21.)

4. Задача Коши на плоскости для уравнений гиперболического типа. Метод Римана. (2 занятия, [2], гл. 4, § 12, п. 1.)

5. Смешанная задача для уравнений гиперболического и параболического типов. Решение методом Фурье. (3 занятия, [2], гл. 6, § 20.)

6. Уравнение теплопроводности, задача Коши, формула Пуассона, принцип Дюамеля. (1 занятие, [2], гл. 4, § 13; [1], § 7.)

7. Корректность задач математической физики. Пример Адамара. (1 занятие, [1], § 7, №№ 137–144.)

**6 семестр**

8. Краевые задачи для уравнения Лапласа. Метод разделения переменных (квадрат, круг, кольцо) (1 занятие). Уравнение Лапласа в ортогональных криволинейных координатах, коэффициенты Ламе. Уравнение Лапласа в сферических координатах, сферические гармоники. Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах. (2 занятия, [2], гл. 5, § 16.)

9. Функция Грина. Метод изображений. (1 занятие, [2], гл. 5, § 17; [1], § 6.)

10. Свойства гармонических функций (формула Пуассона, теорема о среднем, неравенство Гарнака). (1 занятие, [1], § 6.)

11. Смешанная задача для гиперболических систем с двумя переменными: постановка, приходящие и уходящие характеристики, соответствующие им римановы инварианты, интеграл энергии, диссипативные краевые условия, априорные оценки. (3 занятия) Области единственности для гиперболических систем. (1 занятие, [1], §§ 2–4.)

12. Функциональные пространства (классы $L_p(\Omega)$, $L_{loc}(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$, $C_0^\infty(\Omega)$). Регулярная обобщенная производная функции из $L_{loc}(\Omega)$. Пространство Соболева $W_p^{(m)}(\Omega)$ (1 занятие). Ядра усреднения, свойства оператора усреднения в $L_p(\Omega)$, решение одномерных линейных дифференциальных уравнений в классах $W_p^{(m)}[a,b]$ (1 занятие). Одномерные теоремы вложения, операторы продолжения в классах $W_p^{(m)}$. След функции из $W_p^{(m)}$ (1 занятие, [2], гл. 2, § 4, п. 3; [1], § 9).

13. Пространства обобщенных функций $D'$, $S'$, действия с обобщенными функциями (2 занятия). Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами (2 занятия, [2], гл. 3, § 6–9, § 11).

**Литература**

1. Годунов С. К., Золотарева Е. В. *Сборник задач по уравнениям математической физики* /Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 1987.
2. Владимиров В. С., Михайлов В. П. и др. *Сборник задач по уравнениям математической физики*. М.: Наука, 1974.
3. Бицадзе А. В., Калиниченко Д. Ф. *Сборник задач по уравнениям математической физики*. М.: Наука, 1985.
4. Белов В. В., Воробьев Е. М. *Сборник задач по дополнительным главам математической физики.* М.: Наука, 1978.