

# Уравнения математической физики

доцент А.Е.Мамонтов

## Часть I. Элементы общей теории УЧП.

1. **Введение.** Предмет теории уравнений в частных производных (УЧП) и уравнений математической физики (УМФ), цели курса. Мультииндексы. УЧП, редуцируемые к ОДУ, т.е. квазилинейные системы I порядка с общей главной частью и сводящиеся к ним (нелинейные УЧП I порядка). Роль характеристик, расширение на гиперболические по Петровскому системы I порядка на плоскости (римановы инварианты), пример одномерных уравнений акустики.
2. **Задача Коши и характеристические многообразия (ХМ) для УЧП.** Наводящие соображения: аналитические решения задачи Коши для ОДУ. Постановка задачи Коши для УЧП, пример: аналитическое решение задачи Коши для двумерного уравнения Лапласа. Понятие ХМ, теорема Коши–Ковалевской. Частные случаи нахождения ХМ: квазилинейная система I порядка на плоскости, соотношения на ХМ; квазилинейная система I порядка в 3-мерном пространстве, пример двумерных уравнений акустики; квазилинейное уравнение II порядка и выше, понятие символа дифференциального оператора. Поведение ХМ при сведении УЧП друг к другу (исключением или введением неизвестных).
3. **Элементы классификации УЧП. Свойства гиперболических уравнений на примере уравнения колебаний струны (УКС).** Линейное уравнение II порядка: канонический вид (КВ) в точке. Возможность приведения к КВ сразу в окрестности (области). То же на плоскости: классификация, КВ в окрестности точки. Три «канонических» уравнения II порядка на плоскости: Лапласа, теплопроводности и УКС. УКС: задача Коши при  $t=0$ , формула Даламбера, гладкость, области единственности и влияния, конечная скорость распространения возмущений, понятие начально-краевых задач в стакане, метод Дюамеля, интеграл энергии и единственность решения разных задач. «Классификация» более общих УЧП: основные идеи (характеристические свойства 3 типов УЧП); уравнения II порядка; квазилинейные системы I порядка; гиперболичность по Фридрихсю: вещественность ХМ, интеграл энергии.
4. **Понятие корректности.** Понятие краевой задачи, примеры, связь с задачей Коши. «Наивное» понятие корректности (без непрерывной зависимости), пример Адамара для уравнения Лапласа. Корректность по Адамару, пример задачи Коши для УКС. Примеры типа Адамара: задача Коши на наклонных прямых, начальная задача при  $t < 0$  для уравнения теплопроводности. Дополнительные соображения: отсутствие аналитических решений (пример Ковалевской) и пример неединственности в начальной задаче для уравнения теплопроводности.

## Часть II. Классические решения УМФ.

1. **Уравнение Лапласа: общие свойства; постановка краевых задач; задача Дирихле в круге и метод Фурье.** Понятие решения задачи Дирихле, принцип максимума. Задача Дирихле в круге: решение методом Фурье, сходимость ряда по Пуассону, эквивалентность формуле Пуассона. Многомерный аналог формулы Пуассона и его обоснование. Свойства гармонических функций: бесконечная гладкость, теоремы о среднем прямая и обратная (свойство средних как критерий гармоничности), усиленный принцип максимума, неравенство Гарнака, теорема Лиувилля, понятие фундаментального решения (ФР), интеграл Гаусса и теорема об устранимой особенности, преобразование Кельвина и асимптотика на бесконечности. Постановка внутренних и внешних задач Дирихле и Неймана, связь между ними, смысл условий на  $\Theta$ , смежные определения классов функций (правильная нормальная производная и т.д.) и областей (ляпуновская граница и т.д.). Формулы Грина и их обобщение на менее гладкие функции и границы. Единственность решений поставленных выше основных задач.

2. **Уравнение Лапласа: решение краевых задач методом потенциалов.** Интегральная формула Грина, уточненный интеграл Гаусса. Функция Грина как способ условного представления решений, получение как следствие формулы Пуассона. Потенциалы как слагаемые в интегральной формуле Грина, переход к случаю  $n=3$ . Дифференциальные свойства ляпуновских поверхностей (в локальных координатах). Основные свойства потенциалов простого и двойного слоя на ляпуновских поверхностях: представление через специальные углы и оценки углов, оценка абсолютной ограниченности потенциала двойного слоя, асимптотика на бесконечности, непрерывность и прямое значение на поверхности, формулы для скачков. Вспомогательные сведения из анализа: свойства фредгольмовых операторов в гильбертовом пространстве, следствия для интегральных операторов с ядром Гильберта–Шмидта и в частности для потенциалов, обобщения на полярные ядра в пространстве  $C$ . Существование решений поставленных выше основных задач. Переформулировка внутренней задачи Неймана для ее однозначной безусловной разрешимости. Отличия при других  $n$ . Непрерывная зависимость в задаче Неймана.
3. **Уравнение теплопроводности.** Постановка задач Коши–Дирихле и первой смешанной задачи, условия согласования, условия на рост. Принцип максимума, единственность для смешанной задачи и начальной задачи. Формальный вывод формулы Пуассона через преобразование Фурье, понятие ФР. Свойства интеграла Пуассона при произвольных ограниченных начальных данных. Существование решения начальной задачи с непрерывными данными. Свойства решений: бесконечная гладкость, бесконечная скорость распространения возмущений. Начальная задача с разрывными данными (единственность). Разрешимость первой смешанной задачи при  $n=1$ . Принцип Дюамеля для неоднородного уравнения.
4. **Волновое уравнение.** Постановка задачи Коши, переход к  $n=3$ , эвристический вывод формулы решения, изучение ее свойств и обоснование формулы Кирхгофа. Метод спуска и формула Пуассона, случай других  $n$ . Принцип Дюамеля для неоднородного уравнения. Интегралы энергии, энергетические неравенство и равенство, единственность решения задачи Коши. Наличие переднего (при всех  $n$ ) и заднего (при  $n=3$ ) фронтов, закон сохранения энергии. Задача Коши на других многообразиях и смешанные задачи. Проблема с гладкостью данных Коши, сферические волны, пример каустики, необходимость перехода к обобщенным решениям. Сферические волны как средство распространить эффекты при  $n=2,3$  на любые четные и нечетные  $n$  соответственно.

### Часть III. Обобщенные решения УМФ.

1. **Свойства интегрируемых функций и обобщенные производные (ОП).** Вспомогательные сведения из анализа: классы эквивалентных функций, непрерывные и компактные вложения пространств, пространства Лебега  $L_p$ . Операция усреднения и ее свойства: гладкость, формула дифференцирования, коммутация с классическим дифференцированием, аппроксимация в пространствах гладких функций, невозрастание нормы в  $L_p$ , аппроксимация в  $L_p$ . Лемма ДюБуа–Реймона, эквивалентное представление классических производных интегральными тождествами. Определение ОП через интегральное тождество и их элементарные свойства: единственность, связь с классическими производными, глобальность, локализация, суперпозиции (и их необратимость), линейность; примеры. Нетривиальные свойства ОП: слабая и сильная замкнутость оператора дифференцирования, коммутация с усреднениями внутри области, сходимость производных от усреднений внутри области, определение ОП через замыкание и его эквивалентность первому определению, дифференцирование произведения, описание функций с нулевыми ОП определенного порядка, поведение ОП при замене координат, связь с абсолютной непрерывностью.
2. **Изотропные пространства Соболева.** Определение пространств  $W_p^k$  и их тривиальные свойства: очевидные эквивалентные нормы, полнота, умножение на гладкие функции, локализация, сходимость усреднений на компактах, тривиальное продолжение финитных функций, поведение при замене координат. Пространство  $W_p^{0k}$  и его простые свойства: тривиальное продолжение, случай всего пространства, сходимость усреднений. Плотность гладких функций в  $W_p^k$  для звездных областей. Теорема о продолжении:

основные моменты доказательства и одномерная иллюстрация. Плотность гладких функций в общем случае. Сепарабельность и рефлексивность  $W_p^k$ . Описание слабой сходимости. Неравенство Фридрихса (Стеклова), эквивалентная норма в  $W_p^{ok}$ . Интерполяционные неравенства и эквивалентная норма в  $W_p^k$  (без промежуточных производных). Интегральное представление гладких функций через градиент, оценки для гладких функций и теоремы вложения  $W_p^1$  в  $L_t$  или  $C$ ; вложения для  $W_p^k$  (при  $n > 1$ ). Случай  $n=1$ , вложения в пространства Гельдера. Теорема Реллиха; компактность вложений в общем случае. Общая конструкция эквивалентных норм в  $W_p^k$  (через систему полунорм); неравенства Пуанкаре, Фридрихса и их аналоги. Конструкция следа на многообразиях размерности  $(n-1)$ . Свойства оператора следа (без доказательства): компактность, непрерывность при сдвиге многообразия, случай многообразий меньшей размерности, общие теоремы вложения, критерий принадлежности  $W_p^{ok}$ . Формулы Гаусса–Остроградского и интегрирования по частям.

3. **Эллиптические уравнения в ограниченных областях.** Мотивация поиска обобщенных решений. Классическая постановка задачи: эквивалентные формы, условия эллиптичности и равномерной эллиптичности, сведение к случаю нулевых краевых условий. Постановка первой краевой задачи с негладкими данными; сильное и слабое обобщенные решения, связь между ними. Энергетическое неравенство, теорема единственности. Существование решения: абстрактная постановка задачи в  $W_2^{01}$ ; формально сопряженные дифференциальные операторы и краевая задача, и соответствующая абстрактная задача; теорема существования; структура множества решений и спектра. Повышение гладкости (внутренней и глобальной). Мотивация постановки III краевой задачи и определения сопряженных краевых задач III типа. Теорема существования обобщенного слабого решения III краевой задачи и структура спектра. Случай неоднородных краевых условий.
4. **Смешанная задача для уравнения теплопроводности.** Постановка первой начально-краевой задачи. Замечания о случаях общего эллиптического оператора, неограниченных областях, других краевых условиях; сведение к нулевому данному на боковой поверхности. Интегральное тождество для классического решения; необходимость анизотропных пространств Соболева, их определение и простые свойства: полнота, продолжения, плотность гладких функций, следы. Определение обобщенного решения задачи. Нетривиальные свойства анизотропного пространства Соболева: интегрирование по частям при ненулевом следе, свойства интеграла с переменным пределом. Априорные оценки (гладких) решений задачи, их роль в построении решения в соответствующих классах. Лемма Гронуолла для негладких функций. Теорема единственности. Теорема существования: метод Галеркина, разрешимость вспомогательной системы ОДУ; оценки приближенных решений; переход к пределу. Повышение гладкости. Аналогичная задача для гиперболических уравнений – сходства и различия.

## Литература

1. Обязательная (на которой в основном построен курс):
  - 1.1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., Наука, 1988.
  - 1.2. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М., Наука, 1979.
  - 1.3. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М., Наука, 1973.
  - 1.4. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., Наука, 1983.
2. Обязательная (содержит небольшие фрагменты курса):
  - 2.1. Избранные главы анализа и высшей алгебры. ЛГУ, 1981 (часть III в этой книге).
  - 2.2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Физматлит, 2006.
  - 2.3. Михлин С.Г. Курс математической физики. СПб, Лань, 2002.
  - 2.4. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М., Наука, 1966.
3. Дополнительная:

- 3.1. Демиденко Г.В. Введение в теорию соболевских пространств. Новосибирск, изд-во НГУ, 1995.
- 3.2. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977.
- 3.3. Кошляков Н.С., Глиннер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М., Высшая школа, 1970.
- 3.4. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М., Физматлит, 1961.
- 3.5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: МГУ Наука, 2004.
4. Дополнительная (для углубленного изучения):
  - 4.1. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М., Мир, 1966.
  - 4.2. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., Мир, 1964.
  - 4.3. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. М., Мир, 1977.
  - 4.4. Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. 2-е изд. Бином. Лаборатория знаний. 2005.
  - 4.5. Эванс Л.К. Уравнения с частными производными (перевод Т.Н.Рожковской под ред. Н.Н.Уральцевой) – Новосибирск: Тамара Рожковская (Университетская серия; Т. 7), 2003.

### **Рекомендуемый план семинарских занятий**

- I. Элементы (всего 22 занятия), **обязательно** включаемые в годовую программу (всего 30 занятий):
  1. **3 контрольные работы.**
  2. **Уравнения в частных производных (УЧП) первого порядка** (2 занятия):
    - a) линейные однородные, метод первых интегралов;
    - b) линейные неоднородные и квазилинейные, метод первых интегралов и метод характеристик;
    - c) квазилинейные системы с общей главной частью;
    - d) нелинейные уравнения; уравнение Гамильтона–Якоби.
  3. **Характеристические многообразия (ХМ) и смежные вопросы** (5 занятий):
    - a) общее понятие ХМ в связи с задачей Коши и теоремой Коши–Ковалевской; его особенности для квазилинейных систем и линейных уравнений, примеры нахождения в обоих случаях;
    - b) соотношения на ХМ, примеры их вывода для линейных систем первого порядка и уравнений второго порядка на плоскости, применение к решению задачи Коши для систем первого порядка;
    - c) канонический вид линейных уравнений второго порядка и их классификация:
      - i) на плоскости, с переменными коэффициентами;
      - ii) в многомерном пространстве, с постоянными коэффициентами.
    - d) гиперболические системы первого порядка на плоскости: инварианты Римана, решение смешанных краевых задач.
  4. **Уравнение колебаний струны (УКС)** (2 занятия):
    - a) общее решение, задача Коши, формула Даламбера;
    - b) принцип Диюамеля;
    - c) области влияния и единственности;
    - d) начально-краевые задачи в четверти плоскости и в «стакане», их однозначная разрешимость.
  5. **Метод разделения переменных для простейших линейных уравнений с постоянными коэффициентами (на плоскости или полное разделение переменных)** (4 занятия):
    - a) уравнение Лапласа в круге, внешности круга, секторе, кольце – задачи Дирихле, Неймана, смешанные задачи;
    - b) уравнение теплопроводности и волновое уравнение в «стакане» с однородными краевыми условиями;

- c) неоднородные краевые задачи; представление решения в виде ряда по собственным функциям соответствующей однородной задачи.

6. **Понятие корректности по Адамару (1 занятие):**

- a) примеры корректных задач (задача Коши для ОДУ, задача Коши для УКС, и др.);
- b) примеры некорректных задач для простейших УЧП, построение примеров Адамара.

7. **Обобщенные производные, регуляризация, пространства Соболева и обобщенные решения (5 занятий):**

- a) случай одной независимой переменной – возможность дифференцирования особенностей;
- b) простейшие многомерные примеры, обобщенное дифференцирование вырезанием особенностей;
- c) принадлежность функций пространствам Соболева: одномерный и многомерный случаи;
- d) отработка некоторых понятий на одномерном случае:
  - i) вывод простейших теорем вложения, следы;
  - ii) продолжение функций из  $W_p^1$  вовне отрезка с сохранением класса (оператор продолжения, его норма);
  - iii) приближение функций усреднениями, разные ядра усреднения;
  - iv) связь с понятием классической производной;
- e) примеры применения обобщенных производных (задачи с разрывными данными).

**II. Факультативные темы, из которых составляются недостающие 8 занятий:**

1. **Метод Римана в задаче Коши для гиперболических уравнений на плоскости, задача Гурса (1 занятие):**
  - a) теорема о среднем и уравнение Дарбу;
  - b) свойства собственных функций (СФ) оператора Лапласа, формулы Грина;
  - c) принцип максимума;
  - d) неравенство Гарнака;
  - e) теоремы о разрывной мажоранте, устранимой особенности;
  - f) задача Гильберта.
2. **Свойства решений уравнений Лапласа, Гельмгольца, Коши–Римана (3 занятия):**
  - a) случай многих переменных (метод отражения);
  - b) на плоскости (метод конформных отображений на круг).
3. **Функции Грина краевых задач для уравнения Пуассона (2 занятия):**
  - a) случай многих переменных (метод отражения);
  - b) на плоскости (метод конформных отображений на круг).
4. **Теория потенциала (2 занятия):**
  - a) поведение и вид потенциалов при наличии симметрий;
  - b) взаимосвязь потенциалов разных типов и размерностей (предельные переходы).
5. **Одномерное уравнение теплопроводности (3 занятия):**
  - a) автомодельные решения, примеры применения (задача Стефана);
  - b) задача Коши, формула Пуассона;
  - c) принцип Диомеля;
  - d) принцип максимума, связь с корректностью;
  - e) поведение решений при больших временах.
6. **Многомерное волновое уравнение (3 занятия):**
  - a) анализ качественных свойств решений на основе формул Кирхгофа и Пуассона: области влияния и единственности, принцип Гюйгенса;
  - b) специальные решения: сферические, цилиндрические и плоские волны; метод спуска.
7. **Метод разделения переменных как разложение по СФ стационарного оператора (2 занятия):**
  - a) краевые и начально-краевые задачи для уравнений теплопроводности, Пуассона и волнового уравнения в параллелепипеде, цилиндре и шаре;

- b) СФ оператора Лапласа в круге, цилиндре, шаре; сферические функции; однородные гармонические полиномы;
  - c) функции Бесселя и Лежандра, их основные свойства.
8. **Метод разделения переменных в смешанных задачах для гиперболических систем (2 занятия).**
  9. **Элементы теории нелинейных УЧП (1 занятие).**

### **Литература.**

1. Основная:
  - 1.1. Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М., Физматлит, 2001.
  - 1.2. Годунов С.К., Золотарева Е.В. Сборник задач по уравнениям математической физики. Новосиб., НГУ, 1987.
  - 1.3. Мамонтов А.Е., Мамонтов Е.В. Сборник задач по уравнениям математической физики, Новосиб., НГУ, 2006.
  - 1.4. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Москва, Ижевск, РХД, 2000.
2. Дополнительная:
  - 2.1. Белов В.В., Воробьев Е.М. Сборник задач по дополнительным главам математической физики. М., Высшая школа, 1978.
  - 2.2. Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М., Наука, 1985.
  - 2.3. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М., Физматлит, 2003.
  - 2.4. Вентцель Т.Д., Горицкий А.Ю. и др. Сборник задач по уравнениям с частными производными. М., Бином, 2005.
  - 2.5. Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики. М., Наука, 1975.