Математический анализ. Лектор — Константин Валерьевич Сторожук.

Первый семестр

ФУНКЦИИ ОДНОЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Предварительные сведения. О терминологии и обозначениях. Высказывания, аксиомы, теоремы. Стандартные обозначения. Постоянные и переменные. Способы задания множеств. Принцип совпадения множеств.

Числовая прямая. Свойства системы вещественных чисел. Расширенная числовая прямая; отношение порядка; арифметические операции; модуль и знак числа. Промежутки. Ограниченные подмножества. Верхняя и нижняя грани числового множества. Аксиома граней. Принцип Архимеда. Полная упорядоченность натурального ряда. Принцип математической индукции; биномиальные коэффициенты. Теорема о пересекающихся отрезках; принцип вложенных отрезков. Диаметр числового множества. Окрестности точек расширенной числовой прямой. Свойства системы окрестностей.

Отображения. Понятие отображения; бытующая терминология. Область задания отображения; пространство значений; образы и прообразы точек и множеств; график отображения. Сужение отображений. Постоянные, инъективные, сюръективные и биективные отображения. Композиция отображений. Обратимые отображения; критерий обратимости.

ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ.

Предел последовательности. Топологическое определение предела последовательности. Единственность предела. Предел монотонной последовательности. Лемма о пределе промежуточной последовательности. Асимптотическая истинность высказываний. Теорема о неравенстве пределов. Арифметический критерий сходимости. Теоремы о сумме пределов, о произведении пределов и об обратной величине предела. Теорема о пределе подпоследовательности. Теорема Вейерштрасса о частичных пределах; верхний и нижний пределы вещественной последовательности. Критерий Коши существования конечного предела; последовательности Коши. Приложение: вещественные числа по Вейерштрассу.

Суммирование бесконечных числовых рядов. Примеры появления сумм бесконечных числовых рядов. Основные вопросы. Популярные разложения в степенные ряды (формулировки). Об употреблении термина "ряд". Частичные суммы ряда. Сумма ряда. Суммируемые (сходящиеся) ряды; необходимое условие суммируемости. Сумма геометрической прогрессии. Условие суммируемости ряда $1/n^s$. Критерий Коши суммируемости ряда. Принцип сравнения. Абсолютно суммируемые ряды. Признаки Коши и Даламбера суммируемости ряда. Неравенство Абеля; признак Абеля–Дирихле; типичные примеры. Теорема Мертенса о произведении рядов. **Приложения**. Область суммируемости экспоненциального ряда; экспонента; её свойства. Иррациональность числа e. Трансцендентность числа Лиувилля. Сходимость последовательностей и суммирование рядов в поле комплексных чисел.

ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИЙ.

Свойства операции lim. Точки прикосновения подмножеств расширенной числовой прямой. Асимптотическая истинность высказываний. Предел функции по подмножеству. Единственность предела. Пределы монотонных функций. Лемма о пределе промежуточной функции. Теорема о неравенстве пределов. Арифметический критерий сходимости. Теоремы о сумме пределов, о произведении пределов и об обратной величине предела. Теорема о пределе композиции. Критерий сходимости Гейне.

Асимптотические отношения сравнения. Свойства асимптотических сравнений;связь с операцией предела.

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ.

Непрерывность функции в точке. Топологический критерий непрерывности. Теорема о композиции непрерывных функций. Лемма о непрерывности промежуточной функции. Операции над непрерывными функциями. Лемма об устойчивости строгих неравенств. Локальный характер свойства непрерывности.

Глобальная непрерывность. Теорема Вейерштрасса об экстремумах. Теорема Больцано–Коши о промежуточных значениях. Признак Больцано строгой монотонности. Теорема об обратной функции.

Основные элементарные функции. Функции x^n и $\sqrt[n]{x}$. Экспонента и натуральный логарифм. Теорема–определение показательной функции; $\log_a$. Функции $\sin$ и $\arcsin$; $\cos$ и $\arccos$; $\tan$ и $\arctan$.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Производная и дифференциал. Дифференцируемые функции; производная. Односторонние производные. Теорема о лейбницевом разложении; дифференциал. Кинематическая и геометрическая интерпретации производной и дифференциала; касательная к графику дифференцируемой функции. Непрерывность дифференцируемых функций. Правила дифференцирования. Локальный характер дифференциальных понятий. Лемма о производной промежуточной функции. Лемма о знаке производной. Теорема Ферма (необходимое условие локального экстремума). Теоремы Ролля и Лагранжа о среднем. Теорема о приращениях. **Приложения**. Признаки возрастания и убывания. Достаточные признаки локального экстремума. Выпуклые множества и функции; барицентрический критерий выпуклости; неравенство Иенсена. Дифференциальные признаки выпуклости; неравенство Юнга. Правило Лопиталя.

Многократная дифференцируемость. Высшие производные. Правила ммногократного дифференцирования суммы и произведения. Признаки многократной дифференцируемости композиции и обратного отображения.

Локальная аппроксимация функций полиномами. Лемма о степенно́й оценке приращения. Теорема о разложении Тейлора. Лагранжева оценка остатка разложения Тейлора. Порядок касания функций в точке. Операции над полиномиальными разложениями. **Приложения**. Исследование локального поведения функций посредством полиномиальных разложений. Популярные разложения в степенные ряды; оценки остатков разложений. Формула Эйлера. Метод Мэчина вычисления числа π.

Некоторые обобщения. Обобщённая теорема Ролля. Интерполяция по Лагранжу — Эрмиту. Оценка дефекта интерполяции. Теорема об интерполяции по Лагранжу — Эрмиту.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.

Введение. Метод Ньютона вычисления площадей.

Первообразная. Первообразная (неопределённый интеграл). Лемма о первообразных. Примеры и замечания. Правила неопределённого интегрирования. Разложение рациональной функции на простые дроби; первообразные рациональных функций. Обобщённая первообразная.

Интеграл. Интегрируемые функции (по Ньютону); интеграл; формула Ньютона - Лейбница. Геометрическая интерпретация интеграла. Элементарные свойства интеграла. Интеграл как функция верхнего предела. Формула интегрирования по частям. Формула замены переменной. **Приложения**. Модернизированный принцип Кавальери. Интегральное представление остатка разложения Тейлора. Ньютоново разложение бинома. Иррациональность чисел π и e^q.

Признаки интегрируемости. В основном непрерывные функции; принцип сравнения. Признак существования обобщённой первообразной. Лемма о сходящемся интеграле. Критерий Коши сходимости интеграла. Асимптотический признак Вейерштрасса. Неравенство Абеля; признак интегрируемости Абеля-Дирихле; типичные примеры. **Приложения**. Гамма-функция Эйлера; её основное свойство; формула Стирлинга Формула прямоугольников; интеграл Римана. Формула Кеплера — Симпсона. Теорема о единственности интеграла.

ВЕКТОР-ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

Евклидово пространство $\mathbb{R}^m$. Компоненты (координаты) вектор-функции; геометрическая и кинематическая терминологии; траектория. Распространение понятий и теорем предыдущих глав. Координатные критерии сходимости, непрерывности, дифференцируемости, интегрируемости. Теорема Коши о среднем; геометрическая интерпретация. Лемма о спуске; теорема о приращениях. **Приложения**. Длина пути. Формулы для секториальной скорости. Формулы для площади криволинейного сектора. Работа силового векторного поля. Законы Кеплера и закон Ньютона всемирного тяготения.

Второй семестр

МЕТРИЧЕСКИЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ.

Метрические и нормированные пространства.

Расстояния. Метрические пространства; подпространства. Произведение метрических пространств. Норма; примеры; неравенства Гёльдера и Минковского. Нормированные векторные пространства. Расстояние, индуцированное нормой. Произведение нормированных пространств.

Основы анализа взаимного расположения (Analysis Situs). Окрестности точек; свойства системы окрестностей. Открытые множества; свойства системы открытых множеств. Точки прикосновения множества; замкнутые множества; топологический критерий замкнутости; свойства системы замкнутых множеств. Лемма об открытых (замкнутых) частях подпространства. Плотные подмножества. Внутренние и граничные точки подмножества. Диаметр множества. Ограниченные множества.

Предел. Секвенциальный критерий замкнутости. Последовательности Коши; полные метрические пространства. Банаховы пространства. Полные подпространства пространства $\mathbb{R}^n$. Суммирование рядов в банаховых пространствах. Общее понятие предела функции. Метрический критерий сходимости.

Непрерывные отображения. Непрерывность отображения в точке; топологический, метрический и координатный критерии непрерывности. Теорема о непрерывности композиции. Операции над непрерывными функциями. Критерий глобальной непрерывности. Множества, определяемые системами уравнений и неравенств. Равномерно непрерывные отображения. Теорема о неподвижной точке сжимающего отображения. Топологические изоморфизмы (гомеоморфизмы). Линейно связные пространства. Компоненты линейной связности группы $GL(n)$; критерий соориентированности базисов. Информация: теоремы Александера—Понтрягина, Жордана—Брауэра и о вложении области.

Компактность. Теорема Бореля—Лебега; компактные пространства. Взаимосвязь свойств компактности, ограниченности и замкнутости. Теорема Вейерштрасса об экстремумах. Непрерывные образы компактов. Теорема о непрерывной биекции компакта. Теорема Гейне о равномерной непрерывности. Секвенциальный критерий компактности. Произведение компактных пространств. Компактные множества в $\mathbb{R}^n$. Эквивалентность норм в $\mathbb{R}^n$.

ОСНОВЫ МНОГОМЕРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ.

Частные производные. Производная по вектору; частные производные; матрица Яко́би. Принцип фиксации переменных. Необходимое условие локального экстремума. Лемма о степенно́й оценке приращения. Пример разрывной функции, дифференцируемой по каждому вектору.

Дифференциал. Дифференцируемые функции; дифференциал. Непрерывность дифференцируемой функции. Формула для производной по вектору. Координатное представление дифференциала. Достаточный признак дифференцируемости. Правила дифференцирования. Градиент вещественной функции; его геометрические свойства. Потенциальные векторные поля; потенциал.

Правила многократного дифференцирования. Высшие производные. Многократно дифференцируемые отображения; их свойства. Теорема о вторых производных.

Учебные пособия.

В. А. Зорич, Математический анализ, т.I. Ю.Г.Решетняк, Курс математического анализа, часть I, книга 1. Г. М. Фихтенгольц, Дифференциальное и интегральное исчисление, тт.I и II.

Б. П. Демидович, Сборник задач по математическому анализу. М.: Наука, 1990.

Зорич В.А. Математический анализ. Ч. 1. М.: МЦНМО, 1998.

Решетняк Ю.Г. Курс математического анализа. Новосибирск. Изд-во Ин-та математики, 2000. Ч. 1, кн. 1-2.

Шведов И. А. Компактный курс математического анализа. Ч. 1 и 2. Новосибирский гос. ун-т. Новосибирск, 2003.