

ПРОГРАММА КУРСА
«Математический анализ» на 2012–2013 уч. год
Лектор — профессор В. С. Белонос

1-й семестр

Глава I. Введение в анализ

1. Множества и операции с ними. Отображения, образы и прообразы, композиция. Взаимно однозначное соответствие, понятие о мощности.

2. Счетные множества. Теоремы о бесконечном подмножестве счетного множества, об объединении и произведении счетных множеств. Счетность рациональных чисел. Пример несчетного множества.

3. Аксиомы действий и порядка в поле рациональных чисел. Аксиома Архимеда и следствия из нее. Представление рациональных чисел десятичными дробями.

4. Определение иррациональных и вещественных чисел. Сравнение вещественных чисел. Верхние и нижние грани. Теорема о существовании точных верхних и нижних граней. Плотность рациональных и иррациональных чисел.

5. Определения суммы и произведения вещественных чисел. Проверка аксиом упорядоченного поля для вещественных чисел.

Глава II. Теория последовательностей

1. Определения предела последовательности на языке окрестностей и языке неравенств, их эквивалентность. Единственность предела. Бесконечные пределы.

2. Предельный переход в равенстве и неравенстве; пределы суммы, произведения, отношения. Бесконечно малые и бесконечно большие величины.

3. Существование предела у монотонной последовательности. Число e .

4. Теорема о вложенных отрезках. Критерий Коши существования конечного предела.

5. Теорема Вейерштрасса о существовании сходящихся подпоследовательностей, частичные пределы. Верхний и нижний пределы, теорема об их существовании.

Глава III. Предел функции. Непрерывность. Элементарные функции

1. Предельные точки числовых множеств. Определения предела функции в терминах окрестностей, неравенств, последовательностей. Их эквивалентность. Критерий Коши существования предела.

2. Предельный переход в равенствах и неравенствах. Пределы суммы, произведения и отношения функций.

3. Непрерывность функции в точке. Определения по Борелю и Гейне. Непрерывность суммы, произведения, частного и суперпозиции. Теорема о пределе суперпозиции.

4. Односторонние пределы. Пределы монотонных функций. Классификация точек разрыва. Разрывы монотонных функций. Критерий непрерывности монотонной функции на промежутке.

5. Теоремы Вейерштрасса о непрерывных функциях на замкнутых промежутках. Теорема Больцано – Коши о промежуточных значениях.

6. Определение обратной функции и теорема о непрерывности обратной функции.

7. Неравенство Бернулли. Определение и свойства функций a^x , $\log_a x$, x^a . Замечательные пределы при $x \rightarrow 0$ выражений $(1+x)^{1/x}$, $\frac{\log_a(1+x)}{x}$, $\frac{a^x-1}{x}$, $\frac{(1+x)^a-1}{x}$.

8. Тригонометрические функции и обратные к ним. Замечательный предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Непрерывность тригонометрических и обратных к ним функций.

Глава IV. Дифференциальное исчисление

1. Определение производной и ее геометрический смысл. Производные функций a^x , x^a , $\sin x$, $\cos x$. Правая и левая производные. Примеры несуществования производных.

2. Производные суммы, произведения, отношения. Производные тангенса и котангенса.
3. Понятие дифференциала. Эквивалентность дифференцируемости и существования конечной производной. Дифференцирование сложной функции.
4. Производная обратной функции. Дифференцирование логарифмической и обратных тригонометрических функций.
5. Возрастание и убывание функции в точке. Локальный экстремум и теорема Ферма.
6. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши.
7. Условия монотонности функции на промежутке. Достаточные условия локального экстремума.
8. Производные и дифференциалы высокого порядка. Формула Лейбница.
9. Символы o и O . Формула Тейлора с остатком в форме Пеано.
10. Остатки формулы Тейлора в формах Коши и Лагранжа. Разложения основных элементарных функций.
11. Применение формулы Тейлора к раскрытию неопределенностей и практическим вычислениям. Правило Лопиталя.
12. Выпуклые функции. Их непрерывность и односторонняя дифференцируемость. Необходимые условия и достаточные условия выпуклости. Точки перегиба.
13. Касательная к графику выпуклой функции. Неравенства Иенсена, Юнга, Гельдера и Минковского.

2-й семестр

Глава V. Числовые ряды

1. Сходимость ряда. Критерий Коши и абсолютная сходимость. Признаки сравнения, Даламбера и Коши. Телескопический признак, гармонические ряды.
2. Преобразование Абеля. Признаки Абеля, Дирихле, Лейбница. Примеры неабсолютно сходящихся рядов.

3. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Теорема Абеля о коммутативности абсолютно сходящегося ряда.

4. Теорема Римана о неабсолютно сходящихся рядах.

Глава VI. Неопределенный интеграл

1. Определение первообразной. Теорема об общем виде первообразных на промежутке. Неопределенный интеграл.

2. Линейность интеграла. Замена переменных и интегрирование по частям. Примеры.

3. Разложение рациональной дроби в сумму простых дробей. Метод неопределенных коэффициентов. Метод Остроградского.

Глава VII. Определенный интеграл

1. Разбиения; их суммы, продолжения, диаметры. Понятие определенного интеграла и его геометрический смысл. Ограниченность интегрируемых функций. Пример ограниченной неинтегрируемой функции.

2. Суммы Дарбу и их свойства. Верхний и нижний интегралы, теорема Дарбу.

3. Критерий интегрируемости. Равномерная непрерывность и теорема Кантора. Интегрируемость ограниченных функций с конечным числом разрывов, ограниченных монотонных функций.

4. Линейность и аддитивность интеграла. Интегрируемость модуля, произведения, отношения интегрируемых функций.

5. Почленное интегрирование строгих и нестрогих неравенств. Первая теорема о среднем.

6. Непрерывность и дифференцирование интеграла с переменными пределами интегрирования. Формула Ньютона-Лейбница.

7. Интегрирование по частям и замена переменных. Вторая теорема о среднем.

Глава VIII. Необственные интегралы

1. Несобственный интеграл с единственной особой точкой. Примеры. Критерий Коши, признаки сравнения и абсолютная сходимость для несобственных интегралов.
2. Признаки Абеля и Дирихле. Пример неабсолютно сходящегося интеграла.
3. Несобственные интегралы с конечным числом особых точек.

Глава IX. Пространство R^n

1. Аксиомы линейного векторного пространства. Определение R^n . Линейная независимость и базисы.
2. Понятие нормы и ее простейшие свойства. Примеры различных норм в R^n . Скалярное произведение и его связь с евклидовой нормой.
3. Открытые и замкнутые шары в R^n . Понятия внутренних, внешних и граничных точек. Определение границы множества. Примеры.
4. Открытые и замкнутые множества. Их объединения и пересечения. Замкнутость границы любого множества. Замыкание.
5. Сходимость последовательностей в R^n и ее эквивалентность по координатной сходимости. Фундаментальные последовательности и критерий Коши.
6. Понятие предельной точки. Характеризация замкнутых множеств в терминах предельных точек.
7. Теорема Вейерштрасса о сходящихся подпоследовательностях. Теорема о последовательности вложенных замкнутых множеств.
8. Теорема Бореля об открытых покрытиях. Понятие компактного множества. Эквивалентные определения компактности в R^n .

Глава X. Пределы и непрерывность отображений

1. Отображения из R^n в R^m , координатные функции. Определения предела отображения по Борелю и Гейне, их эквивалентность.
2. Определение предела на языке координатных функций. Критерий Коши существования предела.

3. Алгебраические свойства предела. Теорема о двойном и повторном пределах.

4. Различные определения непрерывности отображений и их эквивалентность. Теорема об образе компактного множества при непрерывном отображении и следствия из нее (аналоги теорем Вейерштрасса).

5. Эквивалентность всех норм в R^n . Равномерная непрерывность и теорема Кантора.

6. Линейные отображения, их непрерывность и норма. Примеры норм линейных отображений.

Глава XI. Дифференцирование отображений

1. Дифференциал отображения в точке. Единственность дифференциала, непрерывность дифференцируемого отображения.

2. Алгебраические свойства дифференциала. Эквивалентность дифференцируемости отображения и его координатных функций.

3. Частные производные. Матрица Якоби дифференцируемого отображения. Непрерывность частных производных — достаточное условие дифференцируемости.

4. Частные производные сложной функции. Производная по направлению, градиент.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М: Физматгиз, 1969, т. 1–2.

2. Никольский С. М. Курс математического анализа. М: Наука, 1975, т. 1.

ПЛАН ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО КУРСУ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ЗАДАЧНИКИ

Д. — Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М: Наука, 1972.

О. — Очан Ю. С. Сборник задач по математическому анализу. М: Просвещение, 1981.

1-й семестр

1. Элементы теории множеств. О.: 3–7, 10–11.
2. Отображения. О.: 27–29, 32–33, 35–36, 43.
3. Метод индукции, бином Ньютона. Д.: 2, 3, 5, 6, 8, 10, 10.1 а).
4. Вещественные числа. О.: 52. (Можно использовать упражнения 1–5, 6, 10, 13 к параграфу 5 главы 1 книги Л. Берса «Математический анализ» — М: Высшая школа, 1975, т. 1).
5. Границы числовых множеств. Д.: 15–21 (Можно дополнительно взять упражнения 6–10, 23–24 к параграфу 6 главы 1 упомянутой книги Л. Берса).
6. Предел числовой последовательности, критерий Коши. Д.: 82–85, 87–88, 91, 94–95.
7. Раскрытие некоторых типичных неопределенностей. Д.: 58–66.
8. Монотонные последовательности. Д.: 69, 77–81, 75–76.
9. Частичные пределы. Верхний и нижний пределы. Д.: 102, 105, 117, 118, 121–123, 131–132.
10. Предел функции. Раскрытие простейших неопределенностей. Д.: 401, 402, 404–406, 412, 414, 418, 437, 440, 442, 457, 459.
11. Замечательный предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Д.: 474, 475, 477, 482, 484, 501, 502.
12. Замечательный предел $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 1/x)^x = e$. Д.: 511, 517, 519, 522, 525, 526, 529, 541.
13. Контрольная работа.
14. Непрерывные функции. Д.: 671–73, 741, 742–43, 734, 788–90.
15. Дифференцирование по таблице. Д.: 839, 842, 846, 848, 852, 855, 863, 871, 875, 877, 883, 885, 886, 890, 913, 915, 921, 924.

16. Производные высокого порядка. Д.: 1158–59, 1162–63, 1169, 1189, 1191, 1194, 1203, 1206.
17. Теоремы Ролля и Лагранжа. Д.: 1238, 1240, 1241, 1251, 1254, 1256, 1259–60.
18. Возрастание и убывание функции. Д.: 1269, 1271, 1275, 1277, 1288–90.
19. Экстремумы. Д.: 1431, 1434, 1436–38, 1456, 1462, 1466–67.
20. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано. Д.: 1377–87.
21. Формула Тейлора с остатками в формах Коши и Лагранжа. Д.: 1394, 1396–97.
22. Выпуклость. Д.: 1300, 1302, 1304, 1306, 1311–14.
23. Исследование функций с построением графиков. Д.: 1472–73, 1477, 1488, 1495, 1507, 1512, 1518.
24. Контрольная работа.
25. Зачет.

2-й семестр

1. Числовые ряды, абсолютная сходимость, признаки сравнения. Д.: 2557–64, 2569, 2573–74, 2576.
2. Признаки Коши и Даламбера. Д.: 2578–83, 2586–87, 2589.
3. Признаки Абеля и Дирихле. Д.: 2667, 2670, 2676, 2680, 2682, 2698, 2698.1.
4. Интегрирование по таблице методом разложения. Д.: 1629, 1631, 1634, 1642, 1648, 1650, 1725, 1729.
5. Метод подстановки. Д.: 1656, 1658, 1661, 1668, 1676, 1682, 1687, 1697, 1703, 1709.
6. Интегрирование по частям. Д.: 1791, 1793, 1796, 1799, 1802, 1804, 1809, 1812, 1819, 1826, 1828.
7. Интегрирование рациональных выражений. Д.: 1866, 1869, 1872, 1876, 1881–84.
- 8–9. Иррациональные выражения и подстановки Эйлера. Д.: 1927, 1932, 1933, 1966, 1968, 1970, 1981, 1983, 1986.
10. Тригонометрические выражения. Д.: 1991–2000, 2013, 2017, 2026, 2029, 2032, 2038.

11. Вычисление определенных интегралов с помощью интегральных сумм. Д.: 2185, 2186, 2187, 2195–97, 2200–01, 2203, 2205.
12. Формула Ньютона-Лейбница, интегрирование по частям. Д.: 2216–18, 2232–33, 2237, 2239, 2241, 2243.
13. Замена переменных. Д.: 2250, 2251, 2253, 2255, 2257–58, 2260–61, 2265.
14. Теоремы о среднем. Д.: 2316, 2321.1, 2326, 2328, 2329, 2330, 2332.
15. Понятие несобственного интеграла. Д.: 2335–37, 2346, 2348, 2357, 2384–86.
16. Абсолютная сходимость, признаки сравнения. Д.: 2358–62, 2371–72, 2374.
17. Признаки Абеля и Дирихле. Д.: 2378–81, 2368.
18. Контрольная работа.
19. Открытые и замкнутые множества. О.: 150–153, 162–163, 165, 178, 182, 187.
20. Граница, замыкание. О.: 155–157, 168, 214, 282, 291.
21. Компактность. О.: 313, 317, 319, 323, 339–340, 343–344.
22. Пределы функций многих переменных. Д.: 3181–83.2, 3185–91.
- 23–24. Непрерывность функций и отображений. Д.: 3195–96, 3202–03, 3205–08; О.: 503–504, 507, 519, 524, 526, 531, 576–77.
25. Частные производные. Д.: 3212.1–3, 3229–31, 3233, 3257–58, 3263–64.
26. Дифференцируемость. Производная по направлению, градиент. Д.: 3251–53, 3236–38, 3242, 3341–42, 3346, 3350.
27. Дифференцирование сложной функции. Д.: 3288–3302, 3305, 3307–3309.
28. Контрольная работа.
29. Зачет.