МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Лектор: проф. С. К. Водопьянов

1–2-й семестры

1. Вещественные числа

1.1. Совокупности чисел, известные из <<школьного>> курса математики:
натуральные числа $N = \{1, 2, 3,...,\}$,
целые числа $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ... ,\}$,
рациональные числа $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$.
Геометрическая интерпретация множества рациональных чисел. Несоизмеримые отрезки.
1.2. Аксиоматический подход к описанию действительных чисел.
Свойства алгебраических операций (аксиомы поля). Следствия из аксиом.
Аксиомы порядка. Согласованность с алгебраическими операциями. Следствия.
1.3. Абсолютная величина числа. Расстояние между точками и его свойства.
1.4. Расширенная числовая прямая. Порядок на расширенной числовой
прямой и его свойства. Конечные и бесконечные элементы.
1.5. Понятие промежутка. Лемма о непустоте промежутка и ее следствие.
1.6. Понятие наибольшего и наименьшего элементов числового множества. Теорема о существовании наибольшего и наименьшего
элементов конечного числового множества.
1.7. Верхние и нижние границы числового множества. Ограниченные множества. Понятие точной верхней и точной нижней границ числового множества.
1.8. Аксиома непрерывности. Признак точной верхней и нижней граней. Точные верхние и нижние грани промежутка. Соотношения для *sup* и *inf* вложенных множеств.
1.9. Индуктивные множества. Основные классы действительных чисел (натуральные, целые, рациональные и иррациональные числа) в абстрактной ситуации.
1.10. Свойства плотности совокупности рациональных чисел и совокупности иррациональных чисел.
1.11. Принцип математической индукции. Неравенство Бернулли. Бином Ньютона.
1.12. Теорема Архимеда и ее следствия. Принцип наименьшего числа и его следствия.

Библиографический список: [1; 3; 5–7; 10].

2. Множества и элементарные операции над ними

2.1. Отношение включения. Операции над множествами (объединение, пересечение и разность). Прямое произведение множеств и его свойства.
2.2. Общее понятие функции и отображения. Понятие образа и прообраза точки (множества). Суперпозиция отображений и ее свойства. Сужение отображения. Инъективные, сюръективные и биективные отображения. Понятие обратного отображения. График отображения.
2.3. Понятие кардинального числа. Множества конечные, бесконечные, счетные, несчетные, не более чем счетные. Примеры. Теорема о счетности бесконечного подмножества счетного множества.
2.4. Вещественные функции. Последовательность. Верхняя и нижняя границы вещественной функции. Ограниченные функции. Точные верхние и нижние границы числовых функций. Признак точных верхних и нижних граней числовых функций (геометрическая интерпретация).

Библиографический список: [3; 6–7; 10].

3. Основные леммы о полноте множества вещественных чисел

3.1. Лемма о вложенных отрезках (принцип Коши–Кантора). Несчетность множества точек отрезка (теорема Кантора). Множества мощности континуум.
3.2. Лемма о конечном покрытии (принцип Бореля–Лебега).

Библиографический список: [3; 6–7; 10]..

4. Топология вещественной прямой

4.1. Понятие окрестности точки. Элементарные окрестности на расширенной числовой прямой. Понятие окрестности. Свойства окрестностей фиксированной точки. Понятие точки прикосновения числового множества. Предельные и изолированные точки числового множества. Предельные точки отрезка и множества всех натуральных чисел.
4.2. Замкнутые множества. Замкнутость множества предельных точек и точек прикосновения числового множества на расширенной числовой прямой.
4.3. Теорема о предельной точке sup A.
Следствие. Совокупность предельных точек промежутка <a, b> совпадает с [a, b], где <a, b> R.

Библиографический список: [3; 6–7; 10].

5. Предел последовательности

5.1. Определение последовательности и примеры.
5.2. Топологическое определение предела последовательности.
5.3. Единственность предела последовательности.
5.4. Монотонные последовательности.
5.5. Теорема о пределе монотонной последовательности. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности.
5.6. Теорема о предельном переходе в неравенствах.
5.7. Теорема о пределе промежуточной последовательности.
5.8. Арифметический критерий сходимости.
5.9. Предел и алгебраические операции.
5.10. Частичные пределы последовательности. Теорема Вейерштрасса о частичных пределах. Теорема Вейерштрасса о сходящейся подпоследовательности.
5.11. Верхний и нижний пределы последовательности.
5.12. Критерий Коши. Понятие фундаментальной последовательности.
5.13. Понятие ряда. Примеры. Необходимый признак сходимости. Признак Коши сходимости ряда. Мажорантный признак сходимости.
5.14. Число *e*. Представление *e* в виде ряда.
Предел $\exp x = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n, x \in R$.

Библиографический список: [3; 6–7; 10].

6. Предел функции

6.1. Топологическое определение предела в $\overline{R}$ функции $f: A \to R, A \subset R$, и примеры.
6.2. Единственность предела функции.
6.3. Теорема о пределе композиции функций.
6.4. Теорема о предельном переходе в неравенствах.
6.5. Теорема о пределе промежуточной функции.
6.6. Теорема о пределе монотонной функции.
6.7. Арифметический критерий сходимости функции.
6.8. Предел функции и алгебраические операции.
6.9. Определение предела функции по Коши. Определение предела функции по Гейне. Их эквивалентность.
6.10.Критерий Коши о существовании предела функции. Верхний и нижний пределы функции.
6.11. Асимптотические отношения сравнения. Символы *O* и *o*, правила оперирования с ними. Основные разложения. Примеры.

6.12. Совокупность *C* комплексных чисел. Топологическое определение предела $\overline{R}$ функции $f: A \to R, \quad A \subset C$, и примеры.

6.13. Предел $\exp z = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n,\ z\in C$, и его свойства.

Библиографический список: [3; 6–7; 10].

7. Непрерывные функции. Элементарные функции

7.1. Определение непрерывности функции в точке. Различные определения непрерывности, их эквивалентность. Локальные свойства непрерывных функций. Пространство *C(E)* функций, непрерывных на множестве *E*.
7.2. Точки разрыва функции. Точки разрыва первого и второго рода.
Точки устранимого разрыва. Теорема о точках разрыва монотонной функции. Существование монотонной функции с заданным множеством точек разрыва.
7.3. Глобальные свойства непрерывных функций. Теоремы Вейерштрасса о непрерывных функциях на замкнутых промежутках. Теорема Больцано–Коши о промежуточных значениях. Признак Больцано строгой монотонности. Теорема о существовании непрерывной обратной функции. Равномерная непрерывность, модуль непрерывности и теорема Кантора.
7.4. Основные элементарные функции. Линейные функции и их функциональное описание. Существование разрывной линейной функции.
Определение экспоненциальной функции $e^z = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$.
Свойства экспоненциальной функции.
Определение логарифмической функции и ее свойства.
Предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
Показательная и степенная функции.
Тригонометрические функции. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.
Представление тригонометрических функций в виде ряда. Функциональное описание тригонометрических функций.

Библиографический список: [3; 6–7; 10].

8. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

8.1. Дифференцируемая функция. Понятие функции, дифференцируемой в точке. Дифференциал. Задача линейного приближения. Определение производной функции одной переменной. Геометрический смысл понятия производной. Касательная. Механические приложения понятия производной.
8.2. Основные правила дифференцирования. Дифференцирование и арифметические операции. Дифференцирование суперпозиции и обратной функции. Таблица производных основных элементарных функций. Дифференцирование простейшей неявно заданной функции (функции, заданной параметрически).
8.3. Производные высших порядков. Определение. Существование производных высших порядков суммы, произведения, частного, суперпозиции и обратной функции. Формула Лейбница. Классы D^k и C^k.
8.4. Основные теоремы дифференциального исчисления. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши о конечных приращениях.
8.5. Формула Тейлора. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Представления остаточного члена в формуле Тейлора в форме Лагранжа и Коши. Ряд Тейлора.

Библиографический список: [3; 6–7; 10].

9. Применения дифференциального исчисления

9.1. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.
9.2. Исследование функций методами дифференциального исчисления. Дифференциальный признак монотонности функции. Условие внутреннего экстремума функции (необходимое условие экстремума дифференцируемой функции, достаточные условия). Понятие выпуклой функции. Дифференциальные признаки выпуклости функции. Точка перегиба функции. Построение графика функции.
9.3. Классические неравенства анализа. Неравенства Йенсена, Коши, Юнга, Гёльдера и Минковского.
9.4. Обобщенная теорема Ролля. Оценка дефекта интерполяции. Интерполяционная формула Лагранжа–Эрмита.

Библиографический список: [3; 6–7; 10].

10. Числовые ряды, степенные и функциональные ряды

10.1. Сходимость рядов. Понятие сходящегося ряда. Необходимый признак сходимости. Критерий сходимости Коши.
10.2. Понятие суммы ряда. Необходимое условие сходимости ряда. Простейшие свойства сходящихся рядов.
10.3. Абсолютная сходимость. Признаки сравнения, Куммера, Даламбера, Коши, Раабе, Бертрана и Гаусса. Перестановки абсолютно сходящегося ряда.
10.5. Условная сходимость. Неравенство Абеля (суммирование по частям). Признаки Абеля, Дирихле, Лейбница.
Примеры неабсолютно сходящихся рядов. Теорема Римана о перестановках условно сходящихся рядов.
10.6. Теорема об умножении рядов.
10.7. Степенные ряды. Понятие степенного ряда. Радиус сходимости степенного ряда. Формула Коши–Адамара для радиуса
сходимости степенного ряда. Свойства суммы степенного ряда. Операции над степенными рядами. Теорема Абеля о непрерывности
степенного ряда на границе круга сходимости.
10.8. Последовательности и ряды функций. Понятие функционального ряда. Поточечная и равномерная сходимости. Критерий Коши равномерной сходимости. Примеры. Критерий Вейерштрасса равномерной сходимости. Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости. Равномерная сходимость и непрерывность. Теорема Дини о равномерной сходимости монотонной последовательности непрерывных функций.
10.9. Обобщающая концепция. Понятие нормированного пространства. Примеры. Пространства *B(E)* и *C(E)*. Определение
структуры метрического пространства. Основные топологические понятия в метрическом пространстве: понятия окрестности
(свойства), сходимости (свойства). Сходимость в *B(E)* и равномерная сходимость. Понятие полного пространства. Полнота
пространства непрерывных функций в равномерной норме. Понятие компактного метрического пространства.
10.10. Теорема о перестановке предельного перехода. Теорема о дифференцировании суммы ряда. Ряды и интегрирование.

Библиографический список: [3; 6–7; 10].

11. Интегрирование

11.1. Неопределенный интеграл. Первообразная и неопределенный интеграл. Их свойства. Таблица основных интегралов. Основные общие приемы отыскания первообразной. Замена переменных и интегрирование по частям. Первообразные рациональных функций. Первообразные тригонометрических функций и функций специального вида.
11.2. Определенный интеграл. Определение площади криволинейной трапеции и ее свойства. Площадь как первообразная. Определение интеграла по Ньютону.
11.3. Элементарный интеграл. Множества и их характеристические функции. Разбиения отрезка. Лемма об измельчении разбиений. Лемма о разбиении, подчиненном открытому покрытию. Определение ступенчатых функций. Совокупность ступенчатых функций как векторное пространство. Определение меры. Примеры. Свойство конечной аддитивности. Множества нулевой меры. Свойства множеств нулевой меры. Канторово множество нулевой меры. Определение элементарного интеграла. Его свойства. Неравенство Чебышева.

11.4. Интегральная норма Дарбу. Определение интегральной нормы Дарбу. Свойства интегральной нормы и ее особенности.
11.5. Пространство интегрируемых функций. Интеграл Римана. Определение пространства интегрируемых по Риману функций и интеграла Римана. Корректность определения. Свойства интеграла Римана. Интеграл как аддитивная функция промежутка интегрирования. Оценки для интеграла. Замкнутость пространства интегрируемых функций.
11.6. Классические критерии интегрируемости. Первый критерий интегрируемости в терминах колебаний. Второй критерий интегрируемости в терминах колебаний. Критерий Дарбу.
11.7. Классы интегрируемых функций. Интегрируемость непрерывной функции. Интегрируемость ограниченной функции, имеющей конечное число точек разрыва. Интегрируемость монотонной функции.
11.8. Интегральные суммы Римана. Теорема о сходимости интегральных сумм к интегралу Римана.
11.9. Критерий интегрируемости Лебега. Определение множества меры нуль. Свойства. Термин “почти всюду”. Теорема Лебега о функциях, интегрируемых по Риману.
11.10. Описание первообразных интегрируемых по Риману функций. Основные формулы интегрального исчисления. Функции, удовлетворяющие условию Липшица. Первообразные функций, интегрируемых по Риману. Лемма о постоянных функциях. Формула Ньютона–Лейбница. Формула интегрирования по частям. Сведение интеграла по произвольной мере к интегралу Римана. Формула замены переменной.
11.11. Теоремы о среднем. Первая теорема о среднем. Вторая теорема о среднем.
11.12. Интеграл и предельный переход.
11.13. Некоторые приложения интеграла. Формула Тейлора с остатком в интегральной форме. Аддитивная функция ориентируемого промежутка и интеграл. Длина пути. Площади геометрических фигур. Объем тела вращения. Работа и энергия.
11.14. Недостатки метода интегрирования по Риману. Пример ряда функций, интегрируемых по Риману, сумма которого не является функцией, интегрируемой по Риману. Неполнота пространства интегрируемых по Риману функций с интегральной нормой. Конструкция канторовских множеств. Их свойства (мера, замкнутость, совершенность, мощность). Пример всюду дифференцируемой функции, производная которой неинтегрируема по Риману.
11.15. Теорема Рисса о представлении линейного функционала.
11.16. Несобственный интеграл. Определения, примеры и основные свойства несобственных интегралов. Критерий сходимости несобственных интегралов. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Исследование сходимости несобственных интегралов. Признаки сравнения. Основные признаки сходимости: Вейерштрасса, Абеля, Дирихле.

Библиографический список: [2–4; 6–7; 10].

12. Метрические пространства

Определение метрического пространства и основных топологических понятий в метрическом пространстве. Их свойства.
12.1. Понятие метрической структуры. Примеры. Точки прикосновения, предельные и изолированные точки по отношению к данному множеству.
12.2. Замкнутые множества. Их свойства. Понятие замыкания множества. Понятие границы и ее свойства.
12.3. Открытые множества. Их свойства. Шар как открытое множество. Понятие внутренности множества. Понятие открытой окрестности и окрестности множества.
12.4. Понятие плотного множества. Примеры. Сепарабельные пространства. Примеры.
12.5. Метрические подпространства. Открытые и замкнутые множества в метрических подпространствах.
12.6. Непрерывные отображения метрических пространств. Эквивалентные определения. Понятие гомеоморфных отображений метрических пространств. Расширенная вещественная прямая как метрическое пространство.
12.7. Понятие предела. Эквивалентные определения. Свойства предела. Теорема о суперпозиции.
12.8. Предел последовательности в метрическом пространстве. Предел по Гейне. Эквивалентность определений предела по Гейне и по Коши.
12.9. Фундаментальные последовательности (последовательности Коши). Полные метрические пространства. Примеры. Описание сходимости в многомерном евклидовом пространстве. Свойства полных пространств. Понятие колебания в точке. Критерий сходимости в терминах колебаний.
12.10. Элементарные теоремы о продолжении в равенствах и неравенствах.
12.11. Компактные множества в метрическом пространстве. Свойства компактных множеств. Понятие полной ограниченности. Эквивалентные определения компактных множеств в метрических пространствах. Компактные множества в многомерных евклидовых пространствах. Теорема о непрерывном образе компактного множества. Теорема Вейерштрасса об экстремальных значениях.

12.12. Равномерно непрерывные отображения. Теорема Кантора. Теорема о продолжении равномерно непрерывных отображений, определенных на плотном множестве.

Библиографический список: [3–4; 6–7; 10].

13. Дифференциальное исчисление функций многих переменных

13.1. Линейная структура в R^n. R^n как векторное пространство. Линейные преобразования из R^n в R^m. Нормы в R^n. Евклидова структура в R^n. Нормы линейных отображений.
13.2. Дифференциал функций многих переменных. Дифференцируемость и дифференциал функции в точке. Дифференциал и частные производные. Координатное представление дифференциала. Отображения. Матрица Якоби. Непрерывность, частные производные и дифференцируемость функции в точке.
13.3. Основные законы дифференцирования. Линейность операции дифференцирования. Дифференцирование суперпозиции дифференцируемых отображений.
13.4. Теорема о конечных приращениях. Теорема Эйлера об однородных функциях. Понятие градиента.

Библиографический список: [3–4; 6–7; 10].

Библиографический список

1. Берс Л. Математический анализ. М.: Высш. шк., 1975. Т. 1–2.
2. Водопьянов С. К. Интегрирование по Риману / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2005.
3. Зорич В. А. Математический анализ. М.: Наука, 1981. Т. 1–2.
4. Дьедонне Ж. Современный анализ. М.: Мир, 1964.
5. Никольский С. М. Курс математического анализа. М.: Наука, 1975.
6. Решетняк Ю. Г. Курс математического анализа. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999. Ч. 1. Кн. 1–2.
7. Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.
8. Спивак М. Математический анализ на многообразиях. М.: Мир, 1971.
9. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчис-ления. М.: Наука, 1969. Т. 1–3.
10. Шведов И. А. Компактный курс математического анализа. Функции одной переменной / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2003. Ч.1.

Библиографический список литературы, рекомендуемой для работы на семинарах

11. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967.
12. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1977.
13. Кудрявцев Л. Д. и др. Сборник задач по математическому анализу. СПб: Кристалл, 1994.
14. Решетняк Ю. Г. Сборник задач по курсу математического анализа / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 1979.