МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Лектор – проф. В. Н. Старовойтов

1-й и 2-й семестры

1. Множества и отображения

1.1. Множества. Множество и его элементы. Примеры множеств. Отношение включения и его свойства. Операции над множествами: пересечение, объединение, разность, симметрическая разность, декартово произведение. Свойства этих операций. Дополнение множества, законы де Моргана. Способы описания множеств. Пустое множество.

1.2. Утверждения. Понятие утверждения (высказывания). Отрицание, дизъюнкция, конъюнкция и импликация утверждений. Равносильность утверждений. Логическая символика. Кванторы. Законы де Моргана.

1.3. Отображения. Понятие отображения (функции). Область определения и множество значений отображения. Образ и прообраз. Сюръективные, инъективные и биективные отображения. Суперпозиция отображений. Прообраз множества. Понятие обратного отображения. Теорема о необходимом и достаточном условии существования обратного отображения. Единственность обратного отображения. Сужение и продолжение отображений. График отображения. Строгое определение понятия отображения через его график.

2. Числовые системы

2.1. Вещественные числа. Понятия поля, упорядоченного поля, полного упорядоченного поля.

Поле вещественных чисел и его основные арифметические свойства: единственность нуля, единицы, противоположного и обратного элементов, законы сокращения для сложения и умножения, умножение на 0 и на (-1). Порядковые свойства вещественных чисел: транзитивность, сложение и умножение неравенств, положительность квадрата числа. Модуль числа. Неравенство треугольника.

Точная верхняя (супремум) и точная нижняя (инфимум) грани множества чисел. Простейшие свойства супремума и инфимума. Существование супремума ограниченного сверху множества.

Понятие индуктивного множества. Множество натуральных чисел. Принцип математической индукции. Теорема о структуре множества натуральных чисел. Натуральная степень вещественного числа. Неравенство Бернулли. Принцип Архимеда (неограниченность сверху множества натуральных чисел) и его следствия.

Множество целых чисел. Целая и дробная части вещественного числа. Теорема о целой части вещественного числа. Чётные и нечётные целые числа.

Рациональные и иррациональные числа. Делитель целого числа, несократимые дроби, корень степени n. Теорема о существовании квадратного корня. Иррациональность $\sqrt{2}$. Неполнота упорядоченного поля рациональных чисел. Теорема о том, что между любыми двумя вещественными числами найдётся рациональное число.

Позиционные системы счисления. Представление числа десятичной и двоичной дробью.

2.2. Числовая прямая. Интерпретация вещественных чисел как точек на прямой. Расширенная числовая прямая.

Отрезок, интервал, полуинтервал, промежуток, окрестность точки, расстояние между точками, длина промежутка. Понятие последовательности. Последовательность множеств. Теорема о вложенных отрезках. Покрытие множества на прямой системой интервалов. Теорема о конечном подпокрытии. Предельная точка множества на прямой. Теорема Больцано – Вейерштрасса.

Координатная плоскость. Евклидово расстояние между точками плоскости. Окружность. Понятие длины дуги окружности. Величина угла. Синус, косинус, тангенс и котангенс угла.

2.3. Комплексные числа. Мнимая единица. Вещественная и мнимая части комплексного числа. Операция сопряжения. Арифметические операции над комплексными числами. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Модуль и аргумент. Формула Муавра.

2.4. Кардинальные числа. Понятие мощности (кардинального числа) множества. Сравнение мощностей. Теорема Кантора. Теорема Шрёдера – Бернштейна.

Счётные множества. Теорема о счётности бесконечного подмножества счётного множества. Теорема о счётности счётного объединения счётных множеств. Теорема о счётности декартова произведения счётных множеств. Счётность множества рациональных чисел. Лемма о том, что любое бесконечное множество содержит счётное подмножество. Теорема о мощности объединения бесконечного и счётного множеств.

Множества мощности континуума. Теорема Кантора. Теорема о том, что множество всех подмножеств множества натуральных чисел имеет мощность континуума. Теоремы о мощности конечного или счётного объединения множеств мощности континуума. Теорема о мощности декартова произведения множеств мощности континуума. Построение множеств сколь угодно большой мощности.

3. Числовые последовательности и ряды

3.1. Числовые последовательности. Понятия последовательности чисел и её предела. Сходящиеся последовательности. Единственность предела. Ограниченность сходящейся последовательности. Предел суммы, произведения и частного двух последовательностей. Предельный переход в неравенствах. Принцип двух милиционеров.

Фундаментальные последовательности (последовательности Коши). Критерий Коши сходимости последовательности. Теорема Вейерштрасса о монотонной ограниченной последовательности. Пределы последовательностей $\{a^k\}$, $\{k^n/a^k\}$, $\{\sqrt[k]{a}\}$, $\{\sqrt[k]{k}\}$, $\{a^k/k!\}$. Число e.

Подпоследовательности и частичные пределы последовательности. Теорема Больцано --- Вейерштрасса для последовательностей. Верхний и нижний пределы последовательности. Теорема о том, что верхний (нижний) предел последовательности является её наибольшим (наименьшим) частичным пределом.

3.2. Числовые ряды. Понятие числового ряда. Частичные суммы ряда. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Критерий Коши сходимости ряда. Гармонический ряд. Необходимый признак сходимости ряда. Теорема сравнения рядов с неотрицательными членами. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Теорема о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда. Признаки абсолютной сходимости: Вейерштрасса (мажорантный признак), Коши, Даламбера, Раабе. Прореживающий признак Коши. Обобщенный гармонический ряд $\sum_k 1/k^p$. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница.

Сходимость произвольных рядов: преобразование Абеля, признаки Абеля и Дирихле. Произведение рядов. Теорема о произведении двух абсолютно сходящихся рядов.

4. Функции вещественной переменной

4.1. Предел функции. Понятие функции вещественной переменной. Арифметические операции над функциями. Чётные и нечётные функции.

Определение Коши предела функции в точке. Замечательный предел $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$. Теорема Гейне о существовании предела функции. Теорема о пределе суммы, произведения и частного двух функций. Переход к пределу в неравенствах. Предел функции при $x \to \pm\infty$.

4.2. Показательная, логарифмическая и степенная функции. Определение и свойства показательной, логарифмической и степенной функций. Графики этих функций.
Замечательный предел $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$. Гиперболические функции.

4.3. Асимптотическое поведение функций. Понятия o и O и их свойства. Исследование пределов функций x^α / a^x, $\frac{\log x}{x^\alpha}$ при $x \to \infty$ и $x^\alpha \log x$ при $x \to 0$.
Касание порядка n графиков двух функций.

4.4. Непрерывные функции. Непрерывность функции в точке. Связь предела и непрерывности функции в точке. Пределы функции справа и слева. Совпадение односторонних пределов непрерывной функции. Типы разрывов функции. Теорема о локальной ограниченности непрерывной в точке функции. Теорема о локальной положительности функции, непрерывной и положительной в точке. Непрерывность в точке суммы, произведения, частного и композиции двух функций.

Непрерывность функции на множестве. Теорема о промежуточном значении функции, теорема Вейерштрасса о максимальном значении функции. Равномерная непрерывность функции и теорема Кантора – Гейне.

4.5. Монотонные функции. Возрастающие и убывающие функции. Существование обратной функции. Терема о возможном числе разрывов монотонной функции. Теорема о связи непрерывности и множества значений монотонной функции, определенной на отрезке. Непрерывность обратной функции.

5. Дифференцирование

5.1. Производная функции. Понятие дифференцируемой функции и её производной. Выражение производной функции в точке через предел. Производные тригонометрических, показательной, логарифмической и степенной функций. Геометрический и физический смысл производной.

Производная суммы, произведения, частного и композиции двух функций. Теорема о производной обратной функции. Производная порядка n. Формула Лейбница (n-я производная произведения двух функций).

5.2. Классические теоремы дифференциального исчисления. Теоремы Ферма и Ролля. Теоремы Лагранжа и Коши о конечном приращении.

Формула Тейлора с остаточным членом в общей форме, в формах Лагранжа и Коши. Ряд Тейлора. Представление показательной и тригонометрических функций в виде ряда Тейлора. Иррациональность числа e. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Примеры использования формулы Тейлора: неравенство Бернулли с вещественным показателем степени, бином Ньютона, исследование поведения сложных функций.

5.3. Степенные ряды. Комплексный степенной ряд. Теорема о сходимости комплексного степенного ряда в открытом круге. Радиус сходимости степенного ряда. Теорема Коши --- Адамара. Показательная и тригонометрические функции комплексной переменной. Формула Эйлера.

5.4. Исследование поведения функций. Признак монотонности функции. Необходимые и достаточные условия экстремума функции. Выпуклость функции и её признаки. Неравенство Бернулли. Точки перегиба функции. Асимптота графика функции при $x \to \infty$. Правило Лопиталя раскрытия неопределённостей.

5.5. Классические неравенства анализа. Неравенства Йенсена, Юнга, Гёльдера и Минковского.

6. Интегрирование

6.1. Неопределённый интеграл. Первообразная и неопределённый интеграл функции. Линейность неопределённого интеграла. Замена переменной и интегрирование по частям. Интегрирование рациональных и рационально-тригонометрических функций.

6.2. Определённый интеграл. Разбиение отрезка. Понятия интегрируемой по Риману функции и интеграла Римана. Ограниченность интегрируемой по Риману функции. Интегральные суммы Дарбу, верхний и нижний интегралы и их связь с интегралом Римана. Колебание функции на множестве. Необходимый и достаточный признак интегрируемости функции по Риману. Интегрируемость непрерывной функции. Теорема об интегрируемости функции, имеющей конечное число разрывов. Интегрируемость монотонной ограниченной функции. Линейность, аддитивность и монотонность интеграла Римана. Теоремы об интегрируемости модуля и произведения интегрируемых функций. Первая и вторая теоремы о среднем.

Связь определённого интеграла с первообразной. Формула Ньютона – Лейбница. Интегрирование по частям и замена переменной в определённом интеграле. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

6.3 Несобственные интегралы. Два типа несобственных интегралов. Понятие сходимости несобственного интеграла, абсолютная и условная сходимости. Главное значение несобственного интеграла. Формулы интегрирования по частям и замены переменной в несобственном интеграле. Признаки сходимости несобственных интегралов: признак сравнения, критерий Коши, признаки Абеля и Дирихле. Интегральный признак сходимости рядов.

7. Пространство R^n

7.1. Пространство R^n. Понятие метрики. Метрическая структура в R^n. Евклидова метрика. Линейная (векторная) и евклидова структуры в R^n. Норма и скалярное произведение векторов. Неравенство Коши – Буняковского. Стандартный базис в R^n. Евклидова и другие нормы.

Открытые и замкнутые шары. Открытые и замкнутые множества. Внутренние и внешние точки множества. Граница множества. Теоремы об объединениях и пересечениях для систем открытых и замкнутых множеств. Понятие окрестности точки и множества. Предельные точки множества. Замыкание множества. Теорема о том, что замыкание множества есть наименьшее замкнутое множество, его содержащее. Понятие открытого покрытия множества. Компактные множества. Лемма о вложенных замкнутых кубах. Теорема о компактности замкнутого куба. Теорема Гейне – Бореля.

Сходимость последовательностей точек в R^n. Единственность предельной точки сходящейся последовательности. Теорема о существовании сходящейся подпоследовательности ограниченной последовательности точек. Критерий Коши.

7.2. Функции многих переменных. Функции из R^n в R^m (вектор-функции). Предел функции в точке. Единственность предела. Понятия ограниченной функции и колебания функции на множестве. Критерий Коши существования предела функции в точке.

Непрерывность функции в точке (определения через окрестности и через предел). Теорема о локальной ограниченности функции, непрерывной в точке. Теорема о локальной положительности скалярной функции, непрерывной и положительной в точке. Непрерывность в точке суммы, произведения, частного и композиции двух функций.

Непрерывность функции на множестве. Теорема об открытости прообраза открытого множества при непрерывном отображении. Теорема о компактности образа компактного множества. Понятие равномерной непрерывности. Теорема о равномерной непрерывности функции, непрерывной на компакте. Теорема о максимальном и минимальном значении непрерывной функции, заданной на компакте. Эквивалентность норм в R^n.

Понятие пути в R^n. Линейно связные множества. Понятие области. Теорема о промежуточном значении скалярной функции, заданной на области.

8. Основы дифференциального исчисления в R^n

8.1. Производная функции многих переменных. Линейные отображения, их непрерывность и норма. Матрица линейного отображения. Дифференцируемость функции и её дифференциал (производная). Единственность дифференциала (корректность его определения). Дифференциал суммы, произведения, частного и композиции двух функций. Дифференциал обратной функции. Теорема о конечном приращении скалярной функции многих переменных. Теорема о постоянстве функции на области, где её дифференциал равен нулю.

8.2. Частные производные. Производная функции по направлению и её представление в виде предела. Частные производные. Координатное представление дифференциала отображения. Матрица Якоби. Матрица Якоби обратной функции. Достаточное условие дифференцируемости отображения (через частные производные). Градиент скалярной функции и его представление в декартовых координатах. Простейшие свойства градиента. Дивергенция и ротор вектор-функций. Их механический смысл.

8.3. Производные высших порядков. Производная по направлению порядка выше единицы. Частные производные высших порядков. Перестановочность частных производных. Формула Тейлора. Понятие дифференциала (производной) высшего порядка. Симметричность второго дифференциала.

8.4. Экстремум функции многих переменных. Понятие экстремума функции. Стационарная (критическая) точка функции. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума.

Литература

1. Зорич В. А. Математический анализ. М.: ФАЗИС, 1997. Ч. 1.
2. Решетняк Ю. Г. Курс математического анализа. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999. Ч. 1, Кн.1 – 2.
3. Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.
4. Никольский С.М. Курс математического анализа. М.: Наука, 1990. Т. 1.
5. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Физматлит, 2006. Т. 1 – 2.
6. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1977.
7. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. Т.1,2,3.