МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Лектор – проф. И. А. Шведов

3-й семестр

8. Дифференциальное исчисление функций многих переменных
(Продолжение)

8.3. Высшие производные.

Многократная дифференцируемость. Теорема о вторых производных. Мультииндексный формализм. Линейные дифференциальные операторы; композиционное правило для операторов с постоянными коэффициентами. Высшие дифференциалы; их координатное представление.

8.4. Разложение Тейлора.

Существование и единственность разложений Тейлора; интегральная форма остатка. Лагранжева оценка остатка. Действия с полиномиальными разложениями. Гессиан вещественной функции; достаточные условия локального экстремума.

8.5. Гладкие отображения.

Отображения класса $\boldsymbol{C}^p$ подмножеств пространства $\boldsymbol{R}^n$. Гладкие изоморфизмы и гладкие вложения. Лемма о липшицевом вложении области. Теорема о локальной обратимости (об обратной функции). Криволинейные системы координат (карты). Необходимое условие зависимости системы функций. Теорема о неявной функции.

8.6. Многообразия в $\boldsymbol{R}^n$.

Определение и примеры. Внутренние и крайние точки многообразия. Строение множества регулярных решений. Лемма о локальном вложении.

8.7. Касательные векторы.

Определение. Кинематическая и геометрическая интерпретации. Касательное пространство и контингенция. Действие гладкого отображения на касательные векторы. Строение касательного пространства гладкого многообразия. Теорема о градиентах. Составление уравнений касательной и нормали. Метод Лагранжа поиска условного экстремума.

9. Равномерная сходимость

Проблема коммутирования операций анализа. Равномерное отклонение функций. Равномерная сходимость последовательностей и рядов функций. Признаки равномерной сходимости. Равномерный предел последовательности непрерывных функций; полнота пространства непрерывных функций. Теорема о равномерном пределе производных. Интегрирование равномерного предела; принцип исчерпывания.

Степенные ряды; радиус и круг сходимости. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов. Теорема Абеля. Коэффициенты и ряд Фурье интегрируемой функции. Интегральная форма остатка разложения Фурье (формула Дирихле). Теорема Фурье. Равенство Парсеваля. Теорема Вейерштрасса об аппроксимации полиномами. Изопериметрическое неравенство.

10. Теория интеграла

10.0. Введение.

Задача описания функций области. Наглядное определение интеграла. Основные факты.

10.1. Элементарный интеграл.

Сегменты (прямоугольники) пространства $\boldsymbol{R}^n$, лемма о дроблении. Мера сегмента. Индикаторы (характеристические функции) подмножеств. Интегрирование ступенчатых функций. Принцип исчерпывания. Элементарная теорема Фубини.

10.2. Интеграл.

Интегральная норма произвольной функции; её свойства. Интегрируемые функции. Интеграл; его простейшие свойства. Интегрирование по подмножеству. Пренебрежимые функции и множества. Термин "почти везде". Леммы о нулях пренебрежимой функции, о пренебрежимых изменениях, о бесконечных значениях.

4-й семестр

10.3. Интеграл и предел.

Лемма о сходимости по норме. Теорема о нормальных рядах. Теорема Ф. Рисса о полноте. Теорема Беппо Леви. Лемма о верхней огибающей. Теорема Лебега о мажорируемой сходимости.

Необходимое условие интегрируемости; измеримые функции. Измеримость почти непрерывных функций. Операции над измеримыми функциями. Срезки измеримых и интегрируемых функций. Признак интегрируемости Лебега. Предел последовательности измеримых функций. Интеграл неотрицательной измеримой функции. Лемма Фату.

10.4. Повторный интеграл.

Лемма о повторной норме. Теорема Фубини. Теорема Тонелли. Признаки интегрируемости и измеримости функций вида $f(x)\cdot g(y)$. Лемма о поднятии.

10.5. Основы теории меры.

Мера произвольного множества в $\boldsymbol{R}^n$. Измеримые множества; операции над ними. Мера измеримого множества. Счётная аддитивность меры. Измеримость лебеговских множеств; измеримость открытых и замкнутых множеств в $\boldsymbol{R}^n$. "Пример" неизмеримого множества. Интеграл как функция области интегрирования; счётная аддитивность и непрерывность интеграла. Интеграл как мера подграфика; формула Кавальери–Лебега.

10.6. Формула замены переменной.

Приложения.

1. Интеграл и первообразная; формула Ньютона–Лейбница. Связь интегралов Ньютона и Лебега.
2. Интегралы, зависящие от параметра. Признаки непрерывности. Правила дифференцирования и интегрирования.
3. Асимптотическая формула Лапласа. Формула Стирлинга.
4. Свёртка. Усреднения. Аппроксимация функций бесконечно гладкими функциями и полиномами.
5. Пространства с мерой; интеграл. Теорема о продолжении меры. Абсолютно суммируемые семейства. Основные законы бесконечного суммирования.

Площадь гладкого многообразия в $\boldsymbol{R}^n$; её связь с объёмами малых утолщений. Интеграл функции по многообразию. Интеграл в полярных координатах. Интегральные представления функций Эйлера. Объемы сфер и шаров.

11. Исчисление дифференциальных форм

11.1. Дифференциальные формы первой степени.

Определения и примеры. Связь с векторными полями. Операции сложения и умножения на функцию. Теорема о координатном представлении. Действие гладкого отображения на дифференциальные формы. Интеграл дифференциальной формы вдоль пути; его свойства, запись в координатах, формула Ньютона–Лейбница, правило замены параметра. Ориентированные линии; способы задания ориентации. Интеграл по ориентированной линии и по цепи. Формула Грина. Вычисление площадей с помощью криволинейных интегралов.

11.2. Общая теория.

Задачи, приводящие к использованию дифференциальных форм. Операции сложения и умножения на функцию. Внешнее умножение 1-форм. Теорема о координатной записи. Внешнее умножение дифференциальных форм. Действие гладкого отображения на дифференциальные формы; его свойства, запись в координатах. Внешний дифференциал; его свойства. Градиент, дивергенция, ротор. Формула гомотопии. Замкнутые и точные формы; лемма Пуанкаре.

Интеграл дифференциальной формы по параметризованной поверхности; его запись в координатах, правило замены параметра. Ориентация гладкого многообразия. Способы задания ориентации. Индуцированная ориентация края. Отображения, сохраняющие ориентацию. Интеграл дифференциальной формы по ориентированному многообразию. Формула замены переменной. Формула Стокса. Связь интегралов первого и второго рода.

Приложения.

1. Классические формулы Стокса и Гаусса–Остроградского.
2. Закон Архимеда.
3. Вычисление интеграла Гаусса. Теорема о наложении. Теорема Брауэра о неподвижной точке. Особые точки векторных полей на шарах и сферах.
4. Примеры гладко неизоморфных многообразий.

Библиографический список

1. Зорич В. А. Математический анализ. М.: Наука, 1981. Т. 1–2.
2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1969. Т. 1–3.