

ВСТУПИТЕЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН В МАГИСТРАТУРУ (июль 1999 г.).

1.1. Что можно сказать о дифференцируемости функции

$$f(x, y) = \left((x - 1)^4 + (y + 1)^4 \right)^{1/4}$$

в точке $(1, -1)$? Ответ обосновать.

1.2. При каких значениях t жорданова форма матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ t+1 & t^2-2 & 0 \\ t & t-2 & t^2-2 \end{pmatrix}.$$

является жордановой клеткой?

1.3. Из некоторой точки M , лежащей на "внешнем" эллипсоиде $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{5} = 25$, проводятся всевозможные касательные к "внутреннему" эллипсоиду $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{5} = 16$. Обозначим множество точек касания через P , а множество точек пересечения касательных с "внешним" эллипсоидом через Q . Доказать, что P, Q — эллипсы, лежащие в параллельных плоскостях. Найти отношение площадей.

1.4. Вычислить интеграл

$$\int_S \int x^2 dy dz + z^2 dx dy,$$

где S — внешняя сторона части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x \geq 0$, $z \leq 0$.

1.5. Используя теорему о вычетах, вычислить интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^4 + 1} dx.$$

1.6. Указать условия на матрицу M , при которых краевая задача

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}y, & t > 0, \\ My(0) = \varphi, \\ \sup_{t \geq 0} (e^{-4t} \|y(t)\|) < \infty \end{cases}$$

однозначно разрешима.