

ЭКЗАМЕН В МАГИСТРАТУРУ 21.07.98

Вариант 1.1.

1. При каких вещественных a уравнение

$$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + a = 0$$

имеет четыре различных вещественных корня?

2. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$, если

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. На линии пересечения однополостного гиперболоида $15x^2 + 4y^2 = 1 + 9z^2$ и плоскости $z = -t$ ($t > 0$) выбирается некоторая точка $P = P_0$. Точка P движется по одной из прямолинейных образующих до точки P_1 , лежащей в плоскости $z = t$, затем она движется по другой прямолинейной образующей до точки P_2 в плоскости $z = -t$, и так далее.

а) При каких t точка P за конечное число шагов вернется в исходное положение?

б) Найти площадь треугольника, который замечает проекция радиус-вектора OP на плоскости OXY при движении точки P от точки P_0 до точки P_1 .

Вариант 1.2.

4. Исследовать суммируемость функции

$$\frac{\sin(x^2 + y^4)}{x^2 + y^2}$$

на множестве $\{x^2 + y^2 \geq 1, y^2 \leq x\}$.

5. Найти главную часть разложения в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$ функции

$$f(z) = \frac{1}{z^2(\sin z + 3)}$$

и указать наибольшую область вида $\{0 < |z| < R\}$, в которой этот ряд сходится.

6. Найти все гладкие функции $a(t)$ такие, что уравнение

$$y'' + a(t)y' + y = 0$$

имеет два решения $y_1(t)$, $y_2(t)$, удовлетворяющие условию $y_2(t) - ty_1(t) = 0$.

ЭКЗАМЕН В МАГИСТРАТУРУ 21.07.98

Вариант 2.1.

1. При каких вещественных a уравнение

$$3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + a = 0$$

имеет четыре различных вещественных корня?

2. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$, если

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 17 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. На линии пересечения однополостного гиперболоида $x^2 + 25y^2 = 1 + 3z^2$ и плоскости $z = -h$ ($h > 0$) выбирается некоторая точка $Q = Q_0$. Точка Q движется по одной из прямолинейных образующих до точки Q_1 , лежащей в плоскости $z = 0$, затем она движется по другой прямолинейной образующей до точки Q_2 в плоскости $z = -h$, и так далее.

а) При каких h точка Q за конечное число шагов вернется в исходное положение?

б) Найти площадь треугольника, который замечает проекция радиус-вектора OQ на плоскости OXY при движении точки Q от точки Q_0 до точки Q_1 .

Вариант 2.2.

4. Исследовать суммируемость функции

$$\frac{\sin(1/(x^4 + y^2))}{x^2 + y^2}$$

на множестве $\{x^2 + y^2 \leq 1, |y| \leq x^2\}$.

5. Найти главную часть разложения в ряд Лорана в окрестности точки $z = 1$ функции

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(\cos(z-1) + 2)}$$

и указать наибольшую область вида $\{0 < |z-1| < R\}$, в которой этот ряд сходится.

6. Найти все гладкие функции $b(t)$ такие, что уравнение

$$y'' + (b(t) - 3)y' + b(t)y = 0$$

имеет два решения $y_1(t)$, $y_2(t)$, удовлетворяющие условию $y_1(t)y_2(t) = 1$.

ЭКЗАМЕН В МАГИСТРАТУРУ 21.07.98

Вариант 3.1.

1. При каких вещественных a уравнение

$$3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + a = 0$$

имеет четыре различных вещественных корня?

2. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$, если

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. На линии пересечения однополостного гиперболоида $5y^2 + 4z^2 = 1 + 9x^2$ и плоскости $x = -p$ ($p > 0$) выбирается некоторая точка $P = P_0$. Точка P движется по одной из прямолинейных образующих до точки P_1 , лежащей в плоскости $x = p$, затем она движется по другой прямолинейной образующей до точки P_2 в плоскости $x = -p$, и так далее.

а) При каких p точка P за конечное число шагов вернется в исходное положение?

б) Найти площадь треугольника, который замечает проекция радиус-вектора OP на плоскости OYZ при движении точки P от точки P_0 до точки P_1 .

Вариант 3.2.

4. Исследовать суммируемость функции

$$\frac{\cos(x^4 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

на множестве $\{x^2 + y^2 \geq 1, x^2 \leq y\}$.

5. Найти главную часть разложения в ряд Лорана в окрестности точки $z = 1$ функции

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(\operatorname{tg}(z-1) + 2i)}$$

и указать наибольшую область вида $\{0 < |z-1| < R\}$, в которой этот ряд сходится.

6. Найти все гладкие функции $a(t)$ такие, что уравнение

$$y'' + a(t)y' - a(t)y = 0$$

имеет два решения $y_1(t)$, $y_2(t)$, удовлетворяющие условию $y_2(t) - ty_1(t) = 0$.

ЭКЗАМЕН В МАГИСТРАТУРУ 21.07.98

Вариант 4.1.

1. При каких вещественных a уравнение

$$3x^4 + 4x^3 - 36x^2 + a = 0$$

имеет четыре различных вещественных корня?

2. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$, если

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. На линии пересечения однополостного гиперболоида $3z^2 + 5x^2 = 1 + 7y^2$ и плоскости $y = -q$ ($q > 0$) выбирается некоторая точка $Q = Q_0$. Точка Q движется по одной из прямолинейных образующих до точки Q_1 , лежащей в плоскости $y = 0$, затем она движется по другой прямолинейной образующей до точки Q_2 в плоскости $y = -q$, и так далее.

а) При каких q точка Q за конечное число шагов вернется в исходное положение?

б) Найти площадь треугольника, который замечает проекция радиус-вектора OQ на плоскости OXZ при движении точки Q от точки Q_0 до точки Q_1 .

Вариант 4.2.

4. Исследовать суммируемость функции

$$\frac{\cos(1/(x^2 + y^4))}{x^2 + y^2}$$

на множестве $\{x^2 + y^2 \leq 1, |x| \leq y^2\}$.

5. Найти главную часть разложения в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$ функции

$$f(z) = \frac{1}{z^2(\operatorname{tg} z - 4i)}$$

и указать наибольшую область вида $\{0 < |z| < R\}$, в которой этот ряд сходится.

6. Найти все гладкие функции $b(t)$ такие, что уравнение

$$y'' + (b(t) + 5)y' + b(t)y = 0$$

имеет два решения $y_1(t)$, $y_2(t)$, удовлетворяющие условию $y_1(t)y_2(t) = 1$.