ЭКЗАМЕН В МАГИСТРАТУРУ 16.07.97

Вариант 1.1.

1. Вычислить производную $\frac{dy}{dx}$ от параметрически заданной функции:

$$\begin{aligned} y &= \begin{cases} (t-2)^2\cos\left(\exp[(t-2)^{-2}]\right), & \text{при } t \neq 2, \\ 0, & \text{при } t = 2, \end{cases} \\ x &= t\exp(t), \quad 1 < t < 3. \end{aligned}$$

2. При каких значениях параметра p дифференцирование пространства вещественных многочленов степени не выше 2 в подходящей базе может иметь матрицу

$$\begin{pmatrix} p & 0 & 2p-p^3 \\ 2p+1 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & p^2-2 \end{pmatrix}?$$

3. Пусть P — поверхность второго порядка, заданная уравнением $x^2 + 3y^2 - z^2 = -9$ в некоторой прямоугольной системе координат. Из точки $M_0 = (0, 0, \sqrt{3})$ проводятся всевозможные прямые, касающиеся поверхности P в точках M.

а) Доказать, что все точки M лежат в одной плоскости.

б) Найти объем конуса, образованного отрезками M_0M.

Вариант 1.2.

4. Вычислить интеграл

$$\iint\limits_S \left(z + 2x + \frac{4y}{3}\right) ds,$$

где S — часть плоскости $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$, лежащая в первом октанте.

5. Найти приращение аргумента функции $f(z)$ по кривой $\left|z - 1 - \frac{i}{2}\right| = 1$, если $f(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости, за исключением точки $z = 1$, где она имеет полюс второго порядка, $f(\infty) = 1$, $f(2) = 2$ и $\operatorname{res}_1 f(z) = 0$.

6. При каких непрерывных $f(t)$ существуют решения краевой задачи

$$y'' + (2\pi)^2 y = f(t), \quad 0 < t < 1, \quad y\big|_{t=0} = y\big|_{t=1} = 0?$$

Выписать все решения.

ЭКЗАМЕН В МАГИСТРАТУРУ 16.07.97

Вариант 2.1.

1. Вычислить производную $\frac{dy}{dx}$ от параметрически заданной функции:

$$\begin{aligned} y &= \begin{cases} (t-2)^2 \cos\left(\sin[(t-2)^{-5}]\right), & \text{при } t \neq 2, \\ 0, & \text{при } t = 2, \end{cases} \\ x &= t\ln(t), \quad 1 < t < 3. \end{aligned}$$

2. При каких значениях параметра p дифференцирование пространства вещественных многочленов степени не выше 2 в подходящей базе может иметь матрицу

$$\begin{pmatrix} p^2 & 3p-2 & 0 \\ -p^2 & 2-3p & 0 \\ 2 & p+1 & 0 \end{pmatrix}?$$

3. Пусть P — поверхность второго порядка, заданная уравнением $x^2 + 5y^2 + 2z^2 = 12$ в некоторой прямоугольной системе координат. Из точки $M_0 = (3\sqrt{3}, 0, 0)$ проводятся всевозможные прямые, касающиеся поверхности P в точках M.

а) Доказать, что все точки M лежат в одной плоскости.

б) Найти объем конуса, образованного отрезками M_0M.

Вариант 2.2.

4. Вычислить интеграл $\iint\limits_S x\,ds$, где S — часть сферы $x^2+y^2+z^2=1$, лежащая в первом октанте.

5. Найти приращение аргумента функции $f(z)$ по кривой $|z+1|=1$, если $f(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости, за исключением точки $z=-1$, где она имеет полюс второго порядка, ограничена на ∞, $f(-2)=-1$, $f'(-2)=-\frac{3}{2}$ и $f(0)=3$.

6. При каких непрерывных $f(t)$ существуют решения краевой задачи

$$y'' + \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 y = f(t), \quad 0 < t < 2, \quad y|_{t=0} = y'|_{t=2} = 0?$$

Выписать все решения.

ЭКЗАМЕН В МАГИСТРАТУРУ 16.07.97

Вариант 3.1.

1. Вычислить производную $\frac{dy}{dx}$ от параметрически заданной функции:

$$\begin{aligned} y &= \begin{cases} \left(t-\frac{1}{2}\right)^2 \sin\left(\exp\left[(t-\frac{1}{2})^{-3}\right]\right), & \text{при } t \neq \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{при } t = \frac{1}{2}, \end{cases} \\ x &= t\,\mathrm{arctg}(t), \quad 0 < t < 1. \end{aligned}$$

2. При каких значениях параметра p дифференцирование пространства вещественных многочленов степени не выше 2 в подходящей базе может иметь матрицу

$$\begin{pmatrix} p^2-3 & 2p^2 & 6p-2p^3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2p \end{pmatrix}?$$

3. Пусть P — поверхность второго порядка, заданная уравнением $x^2-3y^2-2z^2=8$ в некоторой прямоугольной системе координат. Из точки $M_0 = (\sqrt{2},0,0)$ проводятся всевозможные прямые, касающиеся поверхности P в точках M.

а) Доказать, что все точки M лежат в одной плоскости.

б) Найти объем конуса, образованного отрезками M_0M.

Вариант 3.2.

4. Вычислить интеграл $\iint\limits_S xyz\,ds$, где S — часть плоскости $x+y+z=1$, лежащая в первом октанте.

5. Найти приращение аргумента функции $f(z)$ по кривой $|z+1|=2$, если $f(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости, за исключением точки $z=-1$, где она имеет полюс второго порядка, $f(\infty)=1$, $f(-2)=0$ и $\mathrm{res}_{-1}\, f(z)=0$.

6. При каких непрерывных $f(t)$ существуют решения краевой задачи

$$y'' + \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 y = f(t), \quad 0 < t < 3, \quad y'|_{t=0} = y'|_{t=3} = 0?$$

Выписать все решения.

ЭКЗАМЕН В МАГИСТРАТУРУ 16.07.97

Вариант 4.1.

1. Вычислить производную $\frac{dy}{dx}$ от параметрически заданной функции:

$$\begin{aligned} y &= \begin{cases} \left(t-\frac{1}{4}\right)^2 \sin\left(\cos\left[(t-\frac{1}{4})^{-2}\right]\right), & \text{при } t \neq \frac{1}{4}, \\ 0, & \text{при } t = \frac{1}{4}, \end{cases} \\ x &= t \arcsin(t), \quad 0 < t < 1. \end{aligned}$$

2. При каких значениях параметра p дифференцирование пространства вещественных многочленов степени не выше 2 в подходящей базе может иметь матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & -p & p \\ 0 & -3p & 4p-p^3 \\ 0 & 3 & p^2-4 \end{pmatrix}?$$

3. Пусть P — поверхность второго порядка, заданная уравнением $x^2+3y^2 = 2z$ в некоторой прямоугольной системе координат. Из точки $M_0 = (0, 0, -\frac{3}{2})$ проводятся всевозможные прямые, касающиеся поверхности P в точках M.

а) Доказать, что все точки M лежат в одной плоскости.

б) Найти объем конуса, образованного отрезками M_0M.

Вариант 4.2.

4. Вычислить интеграл $\displaystyle\iint\limits_S z\,ds$, где S — полусфера $x^2+y^2+z^2 = 1$, $z \geq 0$.

5. Найти приращение аргумента функции $f(z)$ по кривой $|z-3| = 3$, если $f(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости, за исключением точки $z = 2$, где она имеет полюс второго порядка, $f(\infty) = 0$, $f(3) = 3$ и $\operatorname{res}_2 f(z) = 2$.

6. При каких непрерывных $f(t)$ существуют решения краевой задачи

$$y'' + \left(\frac{\pi}{8}\right)^2 y = f(t), \quad 0 < t < 4, \quad y'|_{t=0} = y|_{t=4} = 0?$$

Выписать все решения.