

Вступительный экзамен в магистратуру ММФ НГУ 2009

Вариант 1, часть 1.

1. Исследовать ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + n^{\frac{1}{n}}}$ на абсолютную и условную сходимости.
2. Найти жорданову форму матрицы

$$A(z) = \begin{pmatrix} z+1 & z^2-z-1 \\ 1 & z^2-1 \end{pmatrix}$$

в зависимости от комплексного параметра z , а также значения z , при которых $A(z)$ подобна вещественной ортогональной матрице.

3. Найти уравнение плоскости, которая бы проходила через точки $(2, 4, -3)$, $(2, 5, -4)$ и делила эллипсоид

$$x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 2xy + 6yz + 2zx - 6x - 14y - 20z + 19 = 0$$

на две равновеликие (по объему) части.

Вступительный экзамен в магистратуру ММФ НГУ 2009

Вариант 2, часть 1.

1. Исследовать ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + (\ln n)^{\frac{1}{n}}}$ на абсолютную и условную сходимости.
2. Найти жорданову форму матрицы

$$A(z) = \begin{pmatrix} z^2-1 & 1 \\ z^2+z-1 & 1-z \end{pmatrix}$$

в зависимости от комплексного параметра z , а также значения z , при которых $A(z)$ подобна вещественной ортогональной матрице.

3. Найти уравнение плоскости, которая бы проходила через точки $(3, -1, 1)$, $(3, -2, 2)$ и делила эллипсоид

$$x^2 + 4y^2 + 6z^2 + 2xy + 8yz + 2zx - 6x - 18y - 22z + 20 = 0$$

на две равновеликие (по объему) части.

Вступительный экзамен в магистратуру ММФ НГУ 2009

Вариант 1, часть 2.

1. Вычислить интеграл

$$\int_L \left(3x^2 \sin(y^2 + x^3) + x^{1/3} + x^7 + \frac{y}{x^2 + y^2} \right) dx + \left(2y \sin(x^3 + y^2) + e^{y^2 + \cos y} - \frac{x}{x^2 + y^2} \right) dy,$$

где $L : r = \varphi^5$, $0 < \varphi < 2\pi$.

2. Функция $f(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости за исключением точки $z = 2$, в которой она имеет полюс порядка 3, причем

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 5, \quad \operatorname{Res}_{z=2}[(z^2 - 3z + 3)f(z)] = 3.$$

Найти $f(3)$.

3. Пусть λ — собственное число задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} u'' + 5u' = \lambda u, & 0 < t < 1, \\ u(0) - 2u'(0) = 0, \\ u(1) - 3u'(1) = 0. \end{cases}$$

Доказать, что этому собственному значению соответствует только одна линейно независимая собственная функция.

Вступительный экзамен в магистратуру ММФ НГУ 2009

Вариант 2, часть 2.

1. Вычислить интеграл

$$\int_L \left(2x \cos(x^2 + y^3) + x^{1/7} + x^4 - \frac{y}{x^2 + y^2} \right) dx + \left(3y^2 \cos(x^2 + y^3) + e^{y + \sin y} + \frac{x}{x^2 + y^2} \right) dy,$$

где $L : r = \varphi^3$, $0 < \varphi < 2\pi$.

2. Функция $f(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости за исключением точки $z = 3$, в которой она имеет полюс порядка 2, причем

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 4, \quad \operatorname{Res}_{z=3}[(4z - 18)f(z)] = 2.$$

Найти $f(3/2)$.

3. Пусть λ — собственное число задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} u'' - 3u' = \lambda u, & 0 < t < 1, \\ u(0) + u'(0) = 0, \\ u(1) + 2u'(1) = 0. \end{cases}$$

Доказать, что этому собственному значению соответствует только одна линейно независимая собственная функция.