

ВСТУПИТЕЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН В МАГИСТРАТУРУ (2006 г.)

Вариант 1

1. Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin x} (e^y - \operatorname{arctg} y - 1)^{1/2} dy}{\int_0^{\ln(1+x)} (e^{\sin y} - 1) dy}.$$

2. Найти собственные значения и векторы линейного оператора $x \rightarrow Ax$, $x \in R^2$, а также все возможные значения предела

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|A^{k+1}x\|}{\|A^k x\|}, \quad x \neq 0, \quad \text{если} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Прямая скользит по прямым $x = 0$, $y = 0$ и $x = 1$, $z = 0$, оставаясь параллельной плоскости $x + y + z = 0$. Найти уравнение поверхности, образованной движением этой прямой.

ВСТУПИТЕЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН В МАГИСТРАТУРУ (2006 г.)

Вариант 1

4. Найти все значения параметра p , при которых несобственный интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x^2 + \frac{1}{x})}{x^p} dx$$

сходится: а) абсолютно; б) условно.

5. Доказать, что уравнение

$$z^{2009} + 5z^{2006} - 1 = 0$$

имеет в круге $\{|z| < 1\}$ ровно 2006 корней.

6. Найти решение краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} y + f(t), \quad 0 < t < 1, \\ y_1(0) &= 0, \quad y_2(1) = 0. \end{aligned}$$

Сколько существует решений?

ВСТУПИТЕЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН В МАГИСТРАТУРУ (2006 г.)

Вариант 2

1. Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\operatorname{arctg} x} \ln^{3/2}(1 + \sin y) dy}{\int_0^{\ln(1+x)} (y - \operatorname{arctg} y)^{1/2} dy}.$$

2. Найти собственные значения и векторы линейного оператора $x \rightarrow Ax$, $x \in R^2$, а также все возможные значения предела

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|A^{k+1}x\|}{\|A^k x\|}, \quad x \neq 0, \quad \text{если} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Прямая скользит по трем прямым $x = 1/2$, $y = z$; $y = -1$, $z = 2x$ и $y = 1$, $z = -2x$. Найти уравнение поверхности, образованной движением этой прямой.

ВСТУПИТЕЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН В МАГИСТРАТУРУ (2006 г.)

Вариант 2

4. Найти все значения параметра p , при которых несобственный интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x^2})}{x^p} dx$$

сходится: а) абсолютно; б) условно.

5. Доказать, что уравнение

$$z^{2009} - 8z^{2006} + 1 = 0$$

имеет в круге $\{|z| < 1\}$ ровно 2006 корней.

6. Найти решение краевой задачи

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} y + f(t), \quad 0 < t < 1, \\ y_1(0) = 0, \quad y_2(1) = 0.$$

Сколько существует решений?

ВСТУПИТЕЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН В МАГИСТРАТУРУ (2006 г.)

Вариант 3

1. Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\operatorname{arctg} x} (e^{\sin y} - \sin y - 1)^{1/2} dy}{\int_0^{\ln(1+x)} (y - \sin y)^{1/3} dy}.$$

2. Найти собственные значения и векторы линейного оператора $x \rightarrow Ax$, $x \in R^2$, а также все возможные значения предела

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|A^{k+1}x\|}{\|A^k x\|}, \quad x \neq 0, \quad \text{если} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Прямая скользит по прямым $x = y$, $z = 0$ и $x - y = z$, $2(x + y) = z$, оставаясь параллельной плоскости $x + y = 1$. Найти уравнение поверхности, образованной движением этой прямой.

ВСТУПИТЕЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН В МАГИСТРАТУРУ (2006 г.)

Вариант 3

4. Найти все значения параметра p , при которых несобственный интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{x^p} dx$$

сходится: а) абсолютно; б) условно.

5. Доказать, что уравнение

$$z^{2012} + 4z^{2006} - 1 = 0$$

имеет в круге $\{|z| < 1\}$ ровно 2006 корней.

6. Найти решение краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} y + f(t), \quad 0 < t < 1, \\ y_1(0) &= 0, \quad y_2(1) = 0. \end{aligned}$$

Сколько существует решений?

ВСТУПИТЕЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН В МАГИСТРАТУРУ (2006 г.)

Вариант 4

1. Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\operatorname{arctg} x} (e^{\ln(1+y)} - 1) dy}{\int_0^{\ln(1+x)} (\operatorname{tg} y - \sin y)^{1/3} dy}.$$

2. Найти собственные значения и векторы линейного оператора $x \rightarrow Ax$, $x \in R^2$, а также все возможные значения предела

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|A^{k+1}x\|}{\|A^k x\|}, \quad x \neq 0, \quad \text{если} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Прямая скользит по трем прямым $x = 0$, $z = 0$; $y = 0$, $z = 1$ и $x = 1$, $y = 1$. Найти уравнение поверхности, образованной движением этой прямой.

ВСТУПИТЕЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН В МАГИСТРАТУРУ (2006 г.)

Вариант 4

4. Найти все значения параметра p , при которых несобственный интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{x^p} dx$$

сходится: а) абсолютно; б) условно.

5. Доказать, что уравнение

$$2z^{2008} + 6z^{2006} - 1 = 0$$

имеет в круге $\{|z| < 1\}$ ровно 2006 корней.

6. Найти решение краевой задачи

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} y + f(t), \quad 0 < t < 1, \\ y_1(0) = 0, \quad y_2(1) = 0.$$

Сколько существует решений?