

ВСТУПИТЕЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН В МАГИСТРАТУРУ (2005 г.)

Вариант I

1. Пусть $f : A \rightarrow D = f(A)$. Найти $\inf_A f$ и $\sup_A f$, если

$$f = f(x, y, z) = x^2 + 6x + y^2 + 8y + z^2 + 4z + 1,$$

$$A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 4, |z| < 1/2\}.$$

2. Пусть дан линейный оператор $A : x \rightarrow [a, x]$, где $a = \frac{1}{3}(1, 2, -2)$, $[a, x]$ — векторное произведение векторов a и x из R^3 . Доказать, что оператор $\exp A$ ортогонален, и найти его геометрическое описание.

3. В прямоугольной системе координат эллипс задан уравнением $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$. Из точки $M(6; -1)$ проведены касательные к эллипсу. Написать уравнение касательных, найти угол между ними и вычислить площадь треугольника с вершинами в точках касания и левом фокусе.

ВСТУПИТЕЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН В МАГИСТРАТУРУ (2005 г.)

Вариант I

4. Найти объем тела, заданного системой неравенств

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{5}\right)^6 + \left(\frac{|y|}{4}\right)^7 < 1, \\ \left(\frac{x}{5}\right)^6 + \left(\frac{|z|}{3}\right)^{\frac{42}{29}} < 1. \end{cases}$$

5. Вычислить интеграл

$$I = \int_{\Gamma} \frac{z^{2005} + 1}{z^{2005} - 1} dz,$$

где Γ — окружность $\{|z| = 5\}$.

6. Найти общее решение уравнения

$$y' = 2t + \frac{2t}{\sqrt{t^2 - y}}.$$

ВСТУПИТЕЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН В МАГИСТРАТУРУ (2005 г.)

Вариант II

1. Пусть $f : A \rightarrow D = f(A)$. Найти $\inf_A f$ и $\sup_A f$, если

$$f = f(x, y, z) = x^2 + 8x + y^2 + 6y + z^2 + 10z + 1,$$

$$A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1, |z| < 1/2\}.$$

2. Пусть дан линейный оператор $A : x \rightarrow [a, x]$, где $a = \frac{1}{3}(2, -1, 2)$, $[a, x]$ — векторное произведение векторов a и x из R^3 . Доказать, что оператор $\exp A$ ортогонален, и найти его геометрическое описание.

3. В прямоугольной системе координат гипербола задана уравнением $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{18} = 1$. Из точки $M(\frac{5}{3}; 3)$ проведены касательные к гиперболе. Написать уравнение касательных, найти угол между ними и вычислить площадь треугольника с вершинами в точках касания и правым фокусе.

ВСТУПИТЕЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН В МАГИСТРАТУРУ (2005 г.)

Вариант II

4. Найти объем тела, заданного системой неравенств

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{4}\right)^8 + \left(\frac{|y|}{5}\right)^5 < 1, \\ \left(\frac{x}{4}\right)^8 + \left(\frac{|z|}{3}\right)^{\frac{40}{27}} < 1. \end{cases}$$

5. Вычислить интеграл

$$I = \int_{\Gamma} \frac{z^{2005} - 1}{z^{2005} + 1} dz,$$

где Γ — окружность $\{|z| = 10\}$.

6. Найти общее решение уравнения

$$y' = \frac{t^4}{\sqrt{t^3 + y}} - 3t^2.$$