

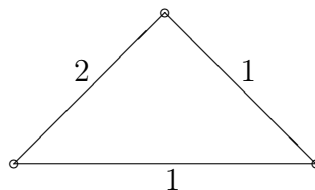
ВСТУПИТЕЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН В МАГИСТРАТУРУ (2004 г.)

1.1. Исследовать на равномерную сходимость последовательность функций $\{f_n(x)\}$ на множестве E :

$$f_n(x) = \frac{n^2 x}{e^{nx^2}}, \quad \text{а) } E = (0, 2); \quad \text{б) } E = (2, \infty).$$

1.2. Пусть X — неориентированный граф с множеством вершин V и множеством ребер E с заданными весами ребер $\lambda(e)$. Пусть F — пространство вещественнозначных функций на множестве вершин графа и D — оператор, сопоставляющий функции $f \in F$ такую функцию Df , что $(Df)(v) = \sum_{e=(v,w) \in E} \lambda(e)[f(v) - f(w)]$.

Найти все собственные значения оператора D , а также базисы подпространств собственных функций относительно D , если X :



1.3. Доказать, что линия второго порядка

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$$

есть эллипс, и написать уравнение эллипса с теми же осями, полуоси которого вдвое больше, чем у данного.

1.4. Найти площадь поверхности тела, образованного вращением кривой вокруг оси Ox :

$$x = 2 \cos(t) - \cos(2t), \quad y = 2 \sin(t) - \sin(2t).$$

1.5. Вычислить интеграл

$$I = \int_{\Gamma} \frac{dz}{z^3 - z^4}$$

в смысле главного значения по Коши, где Γ — прямая $\{x = 1, -\infty < y < \infty\}$, проходимая снизу вверх.

1.6. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} 3y'y'' + (y')^3 - y^3 + 3y = 2, \\ y|_{t=0} = 0, \\ y'|_{t=0} = -1. \end{cases}$$

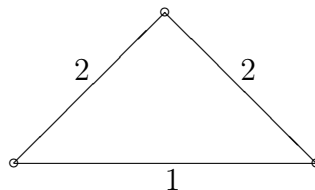
ВСТУПИТЕЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН В МАГИСТРАТУРУ (2004 г.)

2.1. Исследовать на равномерную сходимость последовательность функций $\{f_n(x)\}$ на множестве E :

$$f_n(x) = \frac{\ln(nx)}{\sqrt{n} x}, \quad \text{а) } E = (0, 1); \quad \text{б) } E = (1, \infty).$$

2.2. Пусть X — неориентированный граф с множеством вершин V и множеством ребер E с заданными весами ребер $\lambda(e)$. Пусть F — пространство вещественнозначных функций на множестве вершин графа и D — оператор, сопоставляющий функции $f \in F$ такую функцию Df , что $(Df)(v) = \sum_{e=(v,w) \in E} \lambda(e)[f(v) - f(w)]$.

Найти все собственные значения оператора D , а также базисы подпространств собственных функций относительно D , если X :



2.3. Доказать, что линия второго порядка

$$5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$$

есть гипербола, и написать уравнение гиперболы с теми же осями, полуоси которой вдвое меньше, чем у данной.

2.4. Найти площадь поверхности тела, образованного вращением кривой вокруг оси Ox :

$$x = \cos(t) - \frac{\cos(2t)}{2\sqrt{3}}, \quad y = \sin(t) - \frac{\sin(2t)}{2\sqrt{3}}.$$

2.5. Вычислить интеграл

$$I = \int_{\Gamma} \frac{dz}{z(1+z)^2}$$

в смысле главного значения по Коши, где Γ — прямая $\{y = x, -\infty < y < \infty\}$, проходимая снизу вверх.

2.6. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y'' - (y')^2 + y^2 = 1/4, \\ y|_{t=0} = 0, \\ y'|_{t=0} = 1/2. \end{cases}$$