Программа курса

“Обыкновенные дифференциальные уравнения“ .

1. О предмете курса. Примеры дифференциальных уравнений. Дифференциальное уравнение 1-го порядка. Понятия решения и интегральной кривой. Задача Коши. Теорема Коши-Пикара существования и единственности решения задачи Коши. Лемма Гронуолла. Метод последовательных приближений. Его применение для решения задачи Коши.

2. Теорема Пеано существования решения задачи Коши (без доказательства). Обсуждение вопроса о единственности решения задачи Коши. Пример неединственности решения задачи Коши.

Некоторые уравнения первого порядка. Уравнение $\dfrac{dx}{dt} = f(t)$. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Уравнения в полных дифференциалах. Линейные уравнения.

3. Нормальные системы дифференциальных уравнений. Понятия решения и интегральной кривой. Задача Коши. Теорема Коши-Пикара существования и единственности решения задачи Коши. Линейные системы дифференциальных уравнений. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

4. Глобальные утверждения. Понятие непродолжаемого решения системы дифференциальных уравнений. Теорема существования и единственности непродолжаемого решения задачи Коши. Примеры. Теорема о покидании компакта.

Сведение общей системы дифференциальных уравнений к нормальной.

Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной. Примеры. Уравнение Клеро.

5. Нормальные системы дифференциальных уравнений. Непрерывная зависимость решения от параметров и начальных данных. Постановка вопроса. Соответствующие теоремы, формулировки, примеры.

6. Нормальные системы дифференциальных уравнений. Дифференцируемость решения по параметрам и начальным данным. Постановка вопроса. Соответствующие теоремы, формулировки, примеры. Лемма Адамара. Уравнения в вариациях. Примеры.

7. Однородные линейные системы дифференциальных уравнений. Свойства решений. Фундаментальная система решений. Фундаментальная матрица. Произвол в выборе фундаментальной матрицы. Решение задачи Коши. Определитель Вронского. Формула Лиувилля.

Неоднородные линейные системы дифференциальных уравнений. Свойства решений. Метод вариации произвольных постоянных. Решение задачи Коши.

8. Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Построение фундаментальной матрицы. Матричная экспонента, определение и

основные свойства. Представление для решения задачи Коши. Структура фундаментальной матрицы. Примеры.

9. Линейные уравнения порядка n. Сведение к нормальной линейной системе.

Однородные уравнения. Линейная зависимость и независимость решений. Фундаментальная система решений. Общее решение. Понижение порядка уравнения. Определитель Вронского. Формула Лиувилля.

Неоднородные уравнения. Представление общего решения. Метод вариации произвольных постоянных.

Уравнения с постоянными коэффициентами. Фундаментальная система решений.

10. Линейные уравнения 2-го порядка. Постановка краевой задачи на конечном промежутке. Однородная задача. Существование нетривиального решения. Неоднородная задача. Условия ее разрешимости. Примеры.

11. Краевая задача. Приведение уравнения 2-го порядка к самосопряженному виду. Функция Грина, существование и единственность. Представление решения краевой задачи с помощью функции Грина.

12. Задача Штурма-Лиувилля. Собственные значения и собственные функции. Примеры. Вещественность собственных значений. Ортогональность собственных функций. Необходимые и достаточные условия разрешимости неоднородной задачи.

13. Теорема Штурма о нулях решений уравнения второго порядка. Преобразование Прюфера задачи Штурма-Лиувилля.

14. Анализ преобразованной задачи Штурма-Лиувилля. Вспомогательные утверждения. Теорема о колебании. Основная теорема: существование собственных значений и их поведение, нули собственных функций.

15. Автономные системы дифференциальных уравнений. Траектории. Их свойства. Виды траекторий. Точки покоя (положения равновесия). Фазовое пространство, фазовая плоскость. Геометрическая интерпретация автономной системы. Случай $n = 1$.

16. Автономная система второго порядка с постоянными коэффициентами. Фазовая плоскость. Фазовый портрет. Виды точек покоя: узел, седло, фокус. Приложение к уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами.

17. Связь между системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и одним уравнением. Метод исключения. Оценки решений систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

18. Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений. Постановка вопроса. Асимптотическая устойчивость. Автономные системы дифференциальных уравнений. Устойчивость точек покоя. Примеры систем уравнений, все решения которых стремятся к нулю, а нулевое решение неустойчиво.

Линейная однородная система уравнений с постоянными коэффициентами. Достаточное условие асимптотической устойчивости нулевого решения.

19. Функция Ляпунова. Теорема: существование функции Ляпунова $\Longrightarrow$ устойчивость нулевого решения. Построение функции Ляпунова для системы с постоянными коэффициентами. Примеры.

20. Теорема Ляпунова об устойчивости (и неустойчивости) по линейному (первому)

приближению. Примеры. Теорема Четаева.

21. Линейные системы с периодическими коэффициентами. Теорема Флоке. Структура фундаментальной матрицы. Матрица монодромии. Мультипликаторы, характеристические показатели. Нормальные решения. Вопросы устойчивости решений.

Уравнение второго порядка с периодическими коэффициентами. Уравнение Матье. Вопросы устойчивости. Параметрический резонанс. Примеры.

Математический маятник с колеблющейся точкой подвеса. Устойчивость "перевернутого маятника".

22. Автономные системы дифференциальных уравнений. Первые интегралы. Существование полной системы независимых первых интегралов. Понижение порядка системы. Примеры.

23. Уравнения в частных производных первого порядка – линейные, полулинейные и квазилинейные. Связь решений с первыми интегралами автономных систем. Общее решение. Постановка задачи Коши. Характеристики. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши. Примеры.

Л и т е р а т у р а

1. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Наука, 1974.
2. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Высшая школа, 1991.
3. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М., ИЛ, 1962.
4. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М., Наука, 1967.

Темы семинарских занятий

Составление дифференциальных уравнений семейств кривых. Задача о траекториях. Поле направлений. Изоклины. Приближенное построение решений. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения. Линейные уравнения первого порядка. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Существование и единственность решений. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами. Матричная экспонента. Неоднородные системы. Метод вариации произвольных постоянных. Системы со специальной правой частью. Краевые задачи для уравнений второго порядка. Разрешимость, построение решений. Функция Грина.

Линейные системы с постоянными коэффициентами. Устойчивость. Особые точки. Фазовая плоскость. Зависимость решения от начальных условий и параметров. Автономные системы. Фазовые портреты. Особые точки. Уравнения в частных производных первого порядка.

Л и т е р а т у р а

1. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. - Ижевск, Изд. "РХД 2000.
2. Гюнтер Н.М. и Кузьмин Р.О. Сборник задач по высшей математике. т.П. М., Физматгиз, 1958.

Программу составил

доцент Е.В. Мамонтов