

Программа курса  
**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА**

для студентов 1-2 курсов

Механико-математического факультета

Новосибирского государственного университета

### I. ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

1. Секвенциальное исчисление высказываний. Вывод в исчислении. Теорема о подстановке.
2. Таблицы истинности. Теорема о корректности для исчисления ИС.
3. Допустимые правила вывода. Примеры.
4. Синтаксическая эквивалентность формул логики высказываний. Теоремы о замене. Вывод основных эквивалентностей.
5. Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы.
6. Теорема о полноте исчисления ИС.
7. Совершенные нормальные формы.
8. Функционально полные системы связок.

### II. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1. Операции над множествами. Теоретико-множественные тождества.
2. Упорядоченная пара. Декартово произведение множеств. Отношения и функции.
3. Отношения эквивалентности, предпорядка, частичного и линейного порядков.
4. Основные свойства вполне упорядоченных множеств. Теорема о сравнении вполне упорядоченных множеств.
5. Аксиома выбора, лемма Цорна, теорема Цермело.
6. Сравнение множеств по мощности. Теоремы Кантора-Бернштейна и Кантора. Теорема о трихотомии.
7. Сумма и произведение бесконечных кардинальных чисел. Мощность множества слов в бесконечном алфавите.

### III. ЯЗЫК ИСЧИСЛЕНИЯ ПРЕДИКАТОВ И ЕГО СЕМАНТИКА

1. Предикаты и функции. Алгебраические системы данной сигнатуры.
2. Термы и атомарные формулы. Формулы первого порядка.
3. Определение истинности формул на алгебраической системе. Тожественная истинность и выполнимость.
4. Семантическая эквивалентность формул. Предваренная нормальная форма.

### IV. ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ

1. Аксиомы и правила вывода секвенциального исчисления предикатов. Вывод в исчислении.
2. Допустимые правила. Леммы о подстановке.
3. Тожественная истинность доказуемых секвенций.
4. Непротиворечивые множества формул и их свойства.
5. Полные множества формул. Лемма Линденбаума.
6. Теорема о существовании модели.
7. Теорема Геделя о полноте исчисления предикатов.
8. Исчисление предикатов с равенством. Теорема о существовании модели. Теорема о полноте.

9. Теорема Мальцева о компактности. Теорема о расширении. Теорема Левенгейма-Скулема.
10. Теорема Эрбрана.
11. Исчисления гильбертовского типа. Теорема о дедукции для исчисления высказываний ИВ.
12. Вывод в исчислениях предикатов ИП и ИПР. Теорема о дедукции. Сведение ИПР к ИП.
13. Эквивалентность секвенциального и гильбертовского исчислений.
14. Сильная теорема о полноте для ИП и ИПР.
15. Аксиоматизируемые классы. Критерий конечной аксиоматизируемости.

## V. АЛГОРИТМЫ И РЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ

1. Понятие алгоритма. Машина Тьюринга.
2. Функции, вычислимые на машинах Тьюринга.
3. Операторы суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации. Частично-рекурсивные функции.
4. Нумерация пар и кортежей натуральных чисел. Функция Геделя.
5. Нумерация машин Тьюринга.
6. Равнообъемность класса частично-рекурсивных функций и класса вычислимых функций. Тезис Черча.
7. Существование универсальной частично рекурсивной функции. Теорема о нормальной форме Клини
8. Рекурсивные и рекурсивно перечислимые множества. Теорема Поста.
9. Существование нерекурсивного, рекурсивно перечислимого множества.
10. Теорема о графике и ее следствия.
11. Основная теорема о рекурсивно перечислимых множествах.
12.  $m$ -сводимость. Существование  $m$ -универсального множества.

## VI. ТЕОРЕМА ГЕДЕЛЯ О НЕПОЛНОТЕ АРИФМЕТИКИ

1. Геделевская нумерация и ее свойства.
2. Рекурсивная перечислимость множества теорем ИПР
3. Формальная теория арифметики.
4. Представимость рекурсивных функций.
5. Теорема Геделя о неразрешимости арифметики.
6. Теорема Черча о неразрешимости исчисления предикатов.
7. Рекурсивно аксиоматизируемые, полные и разрешимые теории.
8. Теорема Геделя о неполноте арифметики.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ю.Л.Ершов, Е.А.Палютин. Математическая логика.
2. И.А.Лавров, Л.Л.Максимова. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов.
3. А.И.Мальцев. Алгоритмы и рекурсивные функции.

Профессор, д.ф.-м.н.

Л.Л.Максимова

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

11 курс (третий семестр)  
Вопросы по курсу

**1. Исчисления предикатов**

1. Теорема о корректности для секвенциального исчисления предикатов с равенством (СИПР)
2. Теорема о существовании модели для СИПР
3. Теорема о полноте СИПР
4. Теорема Левенгейма-Скулема
5. Локальная теорема Мальцева
6. Теорема о расширении
7. Теорема Эрбрана
8. Теорема о дедукции в гильбертовском исчислении высказываний
9. Вывод в гильбертовском исчислении предикатов. Примеры выводов
10. Вывод в гильбертовском исчислении предикатов. Теорема о подстановке вместо пропозициональной переменной
11. Вывод из гипотез в гильбертовском исчислении предикатов. Свойства выводов
12. Слабая теорема о корректности для гильбертовских исчислений ИП и ИПР
13. Теорема о дедукции в гильбертовском исчислении предикатов
14. Теорема о погружении ИПР в ИП
15. Эквивалентность секвенциального и гильбертовского исчислений предикатов
16. Сильная теорема о полноте для ИПР
17. Аксиоматизируемые классы. Критерий конечной аксиоматизируемости.

**2. Алгоритмы и рекурсивные функции**

1. Прimitивно рекурсивные функции. Определение, примеры
2. Операторы суммирования и произведения. Ограниченный  $\mu$ -оператор
3. Теорема о возвратной рекурсии
4. Канторовская нумерация пар и  $n$ -ок чисел
5. Оператор минимизации для частичных числовых функции. Частично рекурсивные и общерекурсивные функции
6. Функция Геделя и ее свойства
7. Определение машины Тьюринга. Примеры
8. Вычислимость и правильная вычислимость на машинах Тьюринга. Примеры вычислимых функций
9. Правильная вычислимость частично рекурсивных функций
10. Нумерация машин Тьюринга
11. Частичная рекурсивность вычислимых функций
12. Теорема о нормальной форме Клини
13. Существование универсальной частично рекурсивной функции
14. Существование частично рекурсивной функции, не имеющей рекурсивного доопределения
15. Рекурсивные и рекурсивно перечислимые множества. Замкнутость относительно теоретико-множественных операций
16. Теорема о проекции рекурсивно перечислимого множества
17. Теорема об области определения частично рекурсивной функции и ее следствия
18. Теорема Поста о рекурсивных множествах
19. Существование нерекурсивного, рекурсивно перечислимого множества
20. Рекурсивность множества значений монотонной общерекурсивной функции

21. Теорема о графике
22. Основная теорема о рекурсивно перечислимых множествах
23. Теорема о составном определении частично рекурсивной функции
24. Свойства  $m$ -сводимости; существование  $m$ -универсального множества

### **3. Теорема Геделя о неполноте арифметики**

1. Геделевская нумерация языка арифметики. Рекурсивность основных множеств и функций
2. Рекурсивная перечислимость множества теорем ИПР
3. Теория  $A_0$  формальной арифметики. Лемма о стандартной модели
4. Существование нестандартной модели теории  $A_0$
5. Рекурсивная перечислимость множества теорем теории  $A_0$
6. Теорема о неразрешимости теории  $A_0$
7. Теорема Черча о неразрешимости ИПР
8. Аксиоматизируемые, полные и разрешимые теории
9. Теорема Геделя о неполноте арифметики

### **ЛИТЕРАТУРА**

1. Ю.Л.Ершов, Е.А.Палютин. Математическая логика.- М.: Наука, 1979 или позже.
2. И.А.Лавров, Л.Л.Максимова. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов.- М.: Наука, 1975 или позже.
3. А.И.Мальцев. Алгоритмы и рекурсивные функции.- М.: Наука, 1965 или 1986.

Программу составила  
профессор

Л.Л.Максимова