

ПРОГРАММА

курса лекций по теории вероятностей
для студентов механико-математического факультета (5 семестр)

Лектор – профессор В.И. Лотов

Глава 1. Вероятностные пространства. Основные формулы

1. Дискретное пространство элементарных исходов. События, операции над ними. Вероятность и ее свойства. Классическое определение вероятности.
2. Элементы комбинаторики. Выборки с возвращением и без возвращения. Размещение частиц по ячейкам. Гипергеометрическое распределение.
3. Вероятностное пространство общего вида, σ -алгебра событий. Аксиоматическое задание вероятности, основные свойства вероятности.
4. Продолжение меры с алгебры на σ -алгебру. Борелевские множества. Континуальные вероятностные пространства, примеры. Геометрические вероятности.
5. Формула для вероятности объединения событий. Независимые события.
6. Схема Бернулли. Полиномиальное распределение.
7. Приближение Пуассона для биномиального распределения.
8. Локальная предельная теорема о нормальном приближении.
9. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Глава 2. Распределения

1. Случайные величины. Функции распределения и их свойства. Типы распределений: дискретный, абсолютно непрерывный, сингулярный, смеси.
2. Основные семейства распределений.
3. Независимость случайных величин и классов событий.
4. Многомерные распределения и плотности, их основные свойства, примеры.
5. Преобразования случайных величин, в том числе: а) линейные, б) квантильные; линейные преобразования гауссовских случайных величин. Формула свертки.
6. Распределение суммы независимых случайных величин, имеющих а) гамма распределение; б) нормальное распределение; в) пуассоновское распределение.

Глава 3. Числовые характеристики распределений

1. Интеграл по вероятностной мере.
2. Математическое ожидание случайной величины и его свойства, примеры.
3. Моменты, вопросы их существования. Дисперсия случайной величины и ее свойства. Примеры.
4. Коэффициент корреляции и его свойства.
5. Матрица ковариаций, ее свойства. Многомерное нормальное распределение, определение и свойства.
6. Математическое ожидание суммы случайного числа слагаемых. Тождество Вальда. Задача о разорении.
7. Условное математическое ожидание.
8. Задача о наилучшем приближении.

Глава 4. Сходимость случайных величин и распределений. Характеристические функции. Предельные теоремы

1. Сходимость последовательностей случайных величин. Связь между разными типами сходимости.
2. Равномерная интегрируемость. Сходимость математических ожиданий.
3. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел. Теорема Хинчина.
4. Усиленный закон больших чисел.
5. Слабая сходимость распределений, критерий. Связь со сходимостью по вероятности.
6. Характеристические функции, основные свойства, примеры вычисления.
7. Формула обращения.

8. Теорема о непрерывном соответствии.
9. Центральная предельная теорема, примеры применения.

Глава 5. Цепи Маркова.

1. Основные определения. Матрица переходных вероятностей.
2. Возвратность состояний.
3. Эргодическая теорема.

Глава 6. Простейшие случайные процессы

1. Ветвящиеся процессы.
2. Случайные процессы с непрерывным временем. Процесс Пуассона.

Список основной и дополнительной литературы.

1. Боровков А.А. Теория вероятностей. М., Наука, 1986.
2. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1988.
3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, Т.1, 1984.
4. Розанов Ю.А. Случайные процессы. Краткий курс. М.: Наука, 1979.

Примерный план семинарских занятий

1. Комбинаторика. Классическое определение вероятностей (3 часа)
2. Геометрические вероятности (1 час)
3. Независимые события. Схема Бернулли (2 часа)
4. Условные вероятности. Формула полной вероятности. Формула Байеса (2 часа)
5. Контрольная работа (2 часа)
6. Распределения случайных величин. Преобразования случайных величин (6 часов)
7. Числовые характеристики случайных величин (5 часов)
8. Контрольная работа (2 часа)
9. Характеристические функции (3 часа)
10. Сходимость последовательностей случайных величин и распределений (2 часа)
11. Предельные теоремы (4 часа)