

Программа курса
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА
для студентов 1-2 курсов ММФ НГУ, 2012 год
Лектор — д.ф.м.н. Алаев П.Е.

I. ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ (ИВ)

1. Формулы ИВ. Исчисление секвенций (ИС). Вывод в ИС.
2. Семантика ИВ. Таблицы истинности. Теорема о корректности исчисления ИС.
3. Допустимые правила вывода. Примеры.
4. Синтаксическая эквивалентность формул ИВ. Теорема о замене. Вывод основных эквивалентностей.
5. Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы. Приведение формул к нормальным формам.
6. Теорема о полноте исчисления ИС.
7. Приведение формул к совершенным нормальным формам.

II. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1. Простейшие свойства множеств и операции над ними. Упорядоченные пары и n -ки. Декартово произведение множеств.
2. Бинарные отношения и функции. Композиция функций. Инъективные и сюръективные функции, биекции.
3. Отношения эквивалентности. Теорема о связи отношений эквивалентности и разбиений множества.
4. Частичные порядки и частично упорядоченные множества (ч.у.м.). Изоморфизмы ч.у.м. Фундированные порядки, принцип индукции.
5. Линейно упорядоченные множества.
6. Вполне упорядоченные множества, их свойства. Теорема о сравнении вполне упорядоченных множеств.
7. Аксиома выбора, лемма Цорна, теорема Цермело.
8. Парадокс Рассела. Аксиоматическая теория множеств Цермело-Френкеля с аксиомой выбора (ZFC).
9. Сравнение множеств по мощности. Теорема Кантора-Бернштейна. Теорема о сравнимости мощностей. Теорема Кантора.
10. Мощности объединения и декартова произведения множеств. Мощность множества слов в данном алфавите.
11. Ординалы, их основные свойства. Теорема об изоморфизме между в.у.м. и ординалом. Принципы трансфинитной индукции и рекурсии. Сумма и произведение ординалов.
12. Кардиналы. Теорема о равномощности множества кардиналу.

III. ЯЗЫК ИСЧИСЛЕНИЯ ПРЕДИКАТОВ И ЕГО СЕМАНТИКА

1. Термы и формулы ИП.
2. Алгебраические системы данной сигнатуры. Изоморфизм систем. Подсистема, порождённая данным множеством.
3. Истинность формул ИП в алгебраических системах. Сохранение формул при изоморфизме.
4. Семантическая эквивалентность формул. Тавтологически истинные формулы. Выполнимые множества формул.
5. Фильтры и ультрафильтры. Теорема о расширении централизованного семейства до ультрафильтра.
6. Прямые и фильтрованные произведения алгебраических систем. Теорема Лося.
7. Теорема компактности Мальцева.
8. Формулировка аксиом ZFC на языке формул ИП.

IV. ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ

1. Аксиомы и правила вывода секвенциального исчисления предикатов с равенством (ИПС). Вывод в исчислении.
2. Допустимые правила. Леммы о подстановке.
3. Теорема о корректности ИПС.
4. Непротиворечивые множества формул и их свойства.
5. Полные множества формул. Лемма Линденбаума.
6. Теорема о существовании модели.
7. Теорема Гёделя о полноте ИПС.
8. Теорема о расширении. Теорема Левенгейма-Скулема.
9. Теорема Эрбрана.
10. Исчисления гильбертовского типа. Теорема о дедукции для ИВ.
11. Эквивалентность секвенциального и гильбертовского исчислений для ИВ.
12. Аксиоматизируемые классы. Критерий конечной аксиоматизируемости.

V. АЛГОРИТМЫ И РЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ

1. Понятие алгоритма. Машина Тьюринга.
2. Функции, вычислимые на машинах Тьюринга.
3. Операторы суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации. Частично-рекурсивные функции.
4. Нумерация пар и кортежей натуральных чисел. Функция Гёделя.
5. Нумерация машин Тьюринга.
6. Равнообъёмность класса частично-рекурсивных функций и класса вычислимых функций. Тезис Чёрча.
7. Существование универсальной частично-рекурсивной функции. Теорема о нормальной форме Клини.

8. Рекурсивные и рекурсивно перечислимые множества. Теорема Поста.
9. Существование нерекурсивного, рекурсивно перечислимого множества.
10. Теорема о графике и ее следствия.
11. Основная теорема о рекурсивно перечислимых множествах.
12. m -сводимость. Существование m -универсального множества.

VI. ТЕОРЕМА ГЁДЕЛЯ О НЕПОЛНОТЕ АРИФМЕТИКИ

1. Гёделевская нумерация и ее свойства.
2. Рекурсивная перечислимость множества теорем ИПС.
3. Формальная теория арифметики.
4. Представимость рекурсивных функций в арифметике.
5. Теорема Гёделя о неразрешимости арифметики.
6. Теорема Чёрча о неразрешимости исчисления предикатов.
7. Рекурсивно аксиоматизируемые, полные и разрешимые теории.
8. Теорема Гёделя о неполноте арифметики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю.Л.Ершов, Е.А.Палютин. Математическая логика.
2. И.А.Лавров, Л.Л.Максимова. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов.
3. А.И.Мальцев. Алгоритмы и рекурсивные функции.