МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Лектор – чл.-кор. РАН, проф. С. С. Гончаров

(Есть экз. билеты и текст лекций в формате pdf, 610 Kb,
часть 2 - pdf, 570 Kb)

2–3-й семестры

Элементы теории множеств

1. Основные понятия теории множеств. Операции над множествами.
2. Упорядоченные пары, декартово (прямое) произведение множеств.
3. Отношения и функции над множествами, образы, прообразы и композиция, аксиома выбора и бесконечные прямые произведения множеств.
4. Отношения эквивалентности, предпорядка, порядка, линейного порядка и фактор-множества. Лемма Цорна (без доказательства).
5. Вполне упорядоченные множества, ординалы и кардиналы, трансфинитная индукция, натуральные числа и ординалы в теории множеств, аксиома существования бесконечного множества и построение множества натуральных чисел. Теорема о сравнимости ординалов. Теорема о сравнимости вполне-упорядоченных множеств. Теорема Цермело (без доказательства).
6. Теоремы Кантора и Кантора–Бернштейна. Операции на кардиналах и ординалах. Теорема о мощности квадрата (из теоремы Цермело).

Исчисление высказываний

1. Высказывания и их истинностная и теоретико-множественная семантика. Теорема о выполнимости следовании в истинностной семантике из следования в теоретико-множественной семантике.
2. Секвенциальное исчисление высказываний. Линейный и древовидный выводы и их эквивалентность. Теорема о построении вывода для квазивывода. Теорема о двузначности секвенциального исчисления высказываний. Основные эквивалентности, нормальные формы.
3. Гильбертовское исчисление высказываний. Теорема дедукции. Теорема о доказуемости из секвенциального следования следования в гильбертовском исчислении. Доказательство тождественной истинности в теоретико-множественной семантике формул доказуемых в гильбертовском исчислении высказываний.

4. Теорема об эквивалентности исчислений и семантик. Теорема о существовании конъюнктивной и дизъюнктивной нормальных форм в секвенциальном исчислении высказываний.

5. Теорема о характеризации доказуемых формул в секвенциальном исчислении высказываний и теорема Гёделя о полноте.

Теория моделей

1. Предикаты, сигнатуры, модели (алгебраические системы).
2. Синтаксис языка исчисления предикатов (термы, формулы, свободные и связанные вхождения переменных).
3. Семантика языка исчисления предикатов (истинность формул на модели и значение термов).
4. Гомоморфизмы, изоморфизмы; подмодели, связь теоретико-модельных свойств с универсальными, экзистенциальными формулами, позитивные формулы.
5. Элементарные расширения и подсистемы; элементарные вложения; объединение элементарных цепей.
6. Фильтры, главные и неглавные, максимальные и ультрафильтры. Фильтрованные произведения и теорема Лося.
7. Теорема компактности Мальцева. Метод диаграмм и теорема Мальцева о расширении.

Исчисление предикатов

1. Предикатное исчисление в секвенциальной и гильбертовской форме.
2. Теорема о подстановке. Основные эквивалентности.
3. Теорема дедукции для гильбертовского исчисления. Теорема об эквивалентности секвенциального и гильбертовского исчислений.
4. Пренексная и предваренная нормальные формы. Теорема о приведении к нормальной форме.
5. Непротиворечивые множества формул и их свойства.
6. Теорема о существовании расширений Хенкина.
7. Каноническая модель теории Хенкина.
8. Теорема о существовании модели.
9. Теорема Гёделя о полноте классического исчисления предикатов.

Аксиоматическая система теории множеств Цермело–Френкеля

1. Аксиоматика Цермело–Френкеля ZF.

2. Теорема об эквивалентности аксиомы выбора, леммы Цорна, теоремы Цермело и теоремы о мощности квадрата.

Аксиоматическая теория Пеано

1. Аксиоматика Пеано и ее свойства.
2. Стандартные и нестандартные модели арифметики Пеано.
3. Концевые расширения. Формулы с ограниченными кванторами и сигма-формулы.

Теория вычислимости и теорема Гёделя о неполноте

1. Примитивно рекурсивные и частично рекурсивные функции, вычислимые функции. Теорема о представимости в стандартной модели арифметики.
2. Теорема о представимости в аксиоматике Пеано.
3. Гёделевская нумерация термов и формул и ее свойства.
4. Примитивная рекурсивность и возвратная рекурсия. Примитивная рекурсивность основных операций и отношений над термами и формулами: множества формул, множества термов, операции подстановки, множества аксиом гильбертовского исчисления предикатов, правил вывода, доказательств. Вычислимая перечислимость доказуемых формул.
5. Вычислимо перечислимые множества и их свойства. Перечислимость вычислимо аксиоматизируемых теорий и вычислимая аксиоматизируемость вычислимо перечислимо аксиоматизируемых теорий. Теорема об универсальной функции и нормальной форме Клини.
6. Теорема о неразрешимости непротиворечивых расширений аксиоматики Пеано.
7. Теорема Гёделя о неполноте. Теорема Чёрча о неразрешимости исчисления предикатов

Семинары

2-й семестр

1. Теоретико-множественные отношения на множествах.
2. Частично-упорядоченные множества и отношения эквивалентности.
3. Мощности множеств.
4. Теоретико-множественная семантика высказываний и таблица истинности.

5–6. Исчисление высказываний секвенциальное. Нормальная форма.

7–8. Исчисление высказываний гильбертовского типа. Независимость аксиом.

9. *Контрольная работа*.
10. Модели, гомоморфизмы, подмодели, произведения моделей.
11. Язык исчисления предикатов и его семантика.
12. Формульные множества и аксиоматизируемые классы. Элементарные подмодели.
13. Квазитождества и тождества. Свободные системы, конгруэции и фактор-системы.
14. Теорема компактности Мальцева и ее применения.
15. Арифметика Пеано и ее модели.
16. *Контрольная работа.*

3-й семестр

1. Гильбертовское исчисление предикатов.
2. Истинность доказуемых формул.

3–4. Исчисление предикатов секвенциальное.

5. Приведение к пренексной и приведенной нормальной форме.
6. Устойчивость A-формул относительно подмоделей, E-формул относительно расширений и позитивных формул относительно гомоморфизмов. Аксоматика Пеано и типы индукции в арифметике.
7. Аксиоматическая теория множеств. Ординалы и их свойства.
8. *Контрольная работа*

9–10. Примитивно-рекурсивные и частично рекурсивные функции.

11–12. Арифметика Пеано ее модели и Sigma-формулы. Представимость рекурсивных функций в стандартной модели и теории арифметике Пеано.

13. Гёделевская нумерация термов и формул.

14–15. Неразрешимые проблемы. Теоремы неполноты расширений арифметики и разрешимости и неразрешимости теорий.

16. *Контрольная работа.*

Библиографический список

1. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. М.: Наука, 1979.
2. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1971.
3. Ершов Ю. Л. Определимость и вычислимость /НИИ МИОО НГУ. Новосибирск: Научная книга, 1996.
4. Новиков П. С. Элементы математической логики. М.: Наука, 1973.
5. Клини С. Математическая логика. М.: Мир, 1973.
6. Клини С. Введение в метаматематику. М.: ИЛ, 1957.
7. Максимова Л. Л., Лавров И. А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Физматлит, 2001.