В. Н. Желябин, И. Б. Кайгородов
«Записки лекций по теории йордановых алгебр»

Оглавление

Глава 1

Введение

1.1 Свободные алгебры. Многообразия алгебр.

Пусть Φ — ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей 1.

Определение. Модулем над кольцом Φ называется аддитивная абелева группа M с операцией умножения на элементы кольца Φ (т.е каждой паре элементов (a, x), где $a \in \Phi$, $x \in M$ ставится в соответствие элемент $ax \in M$), обладающей следующими свойствами:
1) $a(x + y) = ax + ay$, $(a + b)x = ax + bx$;
2) $(ab)x = a(bx)$;
3) $1x = x$ для любых $a, b \in \Phi$, $x, y \in M$.

В частности, модуль над полем — это векторное пространство, модуль на кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ — аддитивная абелева группа. Условие 3 в определение модуля может отсутствовать. Обычно модуль для которого выполняется условие 3 называется унитальным.

Определение. Гомоморфизмом Φ-модуля M в Φ-модуль N называется отображение $\phi : M \to N$ такое что

$$\phi(\alpha a + \beta b) = \alpha\phi(a) + \beta\phi(b),\ a, b \in M, \alpha, \beta \in \Phi.$$

Определение. Унитальный модуль A над кольцом Φ называется алгеброй над Φ или Φ-алгеброй, если на A определена и операция умножения, которая связана с модульными операциями следующими соотношениями:

$$(a + b)c = ac + bc,\ a(b + c) = ab + ac,\ \alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$$

для произвольных $a, b, c \in A, \alpha \in \Phi$

Пусть A и B — алгебры над кольцом Φ. Рассмотрим ϕ — отображение алгебры A в алгебру B.

Определение. Гомоморфизмом алгебры A в алгебру B называется отображение $\phi : A \to B$, которое является гомоморфизмом Φ-модулей такое, что

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b),\ a, b \in A.$$

Пусть C — некоторое подмножество в A и $\phi : A \to B$. Тогда через $\phi|_C$ мы будем обозначать ограничение отображения ϕ на множество C, а через $Ker(\phi)$ — ядро гомоморфизма ϕ. По определению

$$Ker(\phi) = \{a \in A | \phi(a) = 0\}.$$

Зафиксируем произвольное множество $X = \{x_\alpha\}$ и добавим к нему два символа (и). Рассмотрим всевозможные конечные последовательности элементов из полученного множества $X^* = X \cup \{(,)\}$. Две последовательности $a_1 a_2 \dots a_n$ и $b_1 b_2 \dots b_m$ считаются равными если $m = n$ и $a_i = b_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Определение. Конечная последовательность w элементов из X^* называется неассоциативным словом, если $w \in X$, либо w представимо в одном из следующих видов $(u)(v), (u)x, x(u), xy$, где $x, y \in X$, а элементы u и v — неассоциативные слова и $u, v \notin X$.

Под длиной неассоциативного слова w мы будем подразумевать количество вхождений в него элементов множества X и обозначать через $d(w)$. Множество $V[X]$ — множество всех неассоциативных слов из X^*. На множестве $V[X]$ определим бинарную операцию умножения $\cdot$ по следующему правилу. Пусть $x_1, x_2 \in X; u, v \in V[X] \setminus X$. Положим

$$x_1 \cdot x_2 = x_1 x_2, x_1 \cdot u = x_1(u), v \cdot x_2 = (v)x_2, u \cdot v = (u)(v).$$

Рассмотрим свободный унитальный Φ-модуль $\Phi[X]$ от множества свободных порождающих $V[X]$. Операцию умножения, определенную в $V[X]$, распространим на $\Phi[X]$. Для $\alpha_i, \beta_j \in \Phi, u_i, v_j \in V[X]$ положим:

$$(\sum_i \alpha_i u_i) \cdot (\sum_j \beta_j v_j) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j (u_i \cdot v_j).$$

Определение. Алгебра $\Phi[X]$ называется свободной алгеброй над кольцом Φ от множества порождающих X.

Свободные алгебры облагают несколькими универсальными свойствами, например

Теорема 1.1.1. Пусть A — произвольная алгебра и θ — некоторое отображение $\theta : X \to A$. Тогда θ единственным образом продолжается до гомоморфизма алгебры $\Phi[X]$ в A.

Доказательство. Заметим, что всякое неассоциативное слово w длины $d(w) > 1$ имеет единственное представление в виде произведения двух неассоциативных слов меньшей длины. Существование такого разложение вытекает из определения, а единственность из разбора возможных случаев разбиения. К примеру, если $w = (u)(v) = (u')(v')$ и $d(u) > d(u')$, то последовательность $u')$ является начальной подпоследовательностью слова u, что приводит к противоречию, ибо ясно, что в любом начальном подслове число левых скобок не может быть меньше числа правых скобок. Остальные случаи разбираются еще более просто.

Таким образом, если θ определено на множестве всех неассоциативных слов длины меньше n, то для w такого, что $d(w) = n$ и $w = u \cdot v$, мы можем определить $\theta(w) = \theta(u) \cdot \theta(v)$. Корректность отображения следует из однозначного определения u и v. В свою очередь, отображение θ растространяется на $\Phi[X]$ следующим образом

$$\theta(\sum_i \alpha_i u_i) = \sum \alpha_i \theta(u_i),$$

где $\alpha_i \in \Phi, u_i \in V[X]$. Ясно, что в силу определения, отображение θ является гомоморфизмом.

Покажем единственность θ. Пусть существует другой гомоморфизм χ, удовлетворяющий тем же свойствам такой, что для некоторого $a \in \Phi[X]$ верно $\theta(a) \neq \chi(a)$. Без ограничения общности, мы можем считать, что $a \in V[X]$. Пользуясь тем, что $\theta|_X = \chi|_X$ и θ, χ — гомоморфизмы, получаем $\theta(a) = \chi(a)$, что противоречит нашему продположению. Теорема доказана.

Зафиксируем счетное множество символов $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$. Пусть $f \in \Phi[X]$. Ясно, что запись элемента f входит лишь конечный набор элементов из X. Таким образом, можем считать, что $f = f(x_1, \ldots, x_n)$.

Определение. Тождеством алгебры A называется такой неассоциативный многочлен $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \Phi[X]$, что $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ для произвольных $a_1, \ldots, a_n \in A$.

Совокупность всех тождеств данной алгебры является идеалом алгебры $\Phi[X]$, который называется идеалом тождеств (T-идеалом) алгебры A и обозначается $T(A)$.

Упражнение. Пусть A — произвольная Φ — алгебра и $T(A)$ — ее идеал тождеств. Доказать, что $\phi(T(A)) \subseteq T(A)$ для любого гомоморфизма ϕ алгебры $\Phi[X]$ в себя.

Пусть I некоторое подмножество в $\Phi[X]$.

Определение. Многообразием алгебр, определенным множеством тождеств I, называется класс Σ всех алгебр, удовлетворяющих каждому тождеству из I.

В свою очередь, тождества из I называются определяющими для многообразия Σ. Наиболее популярными являются многообразия ассоциативных, альтернативных, лиевых и йордановых алгебр. Напомним тождества, определяющие данные многообразия.

Для ассоциативных алгебр: $f = (x_1x_2)x_3 - x_1(x_2x_3)$.

Для альтернативных алгебр: $f_1 = x_1^2x_2 - x_1(x_1x_2), f_2 = x_1x_2^2 - (x_1x_2)x_2$.

Для лиевых алгебр: $f_1 = x_1^2, f_2 = (x_1x_2)x_3 + (x_2x_3)x_1 + (x_3x_1)x_2$.

Для йордановых алгебр: $f_1 = x_1x_2 - x_2x_1, f_2 = (x_1^2x_2)x_1 - x_1^2(x_2x_1)$.

Понятно, что интерес могут представлять только многообразия состоящие не только из нулевой алгебры. Поэтому, многообразия состоящие только из нулевой алгебры мы будем называть тривиальными и рассматривать только нетривиальные многобразия.

1.2 Свободные алгебры в многообразии.

Определение. Алгебра F называется свободной в многообразии Σ с множеством свободных порождающих Y, если любое отображение множества Y в произвольную алгебру $A \in \Sigma$ единственным образом продолжается до гомоморфизма алгебры F в A.

Для множества многочленов $I \subseteq \Phi[X]$ через $I(A)$ будем обозначать идеал алгебры A, порожденный различными элементами вида $f(a_1, \ldots, a_n)$, где $f \in I; a_1, \ldots, a_n \in A$.

Теорема 1.2.1. Пусть Σ — нетривиальное многообразие алгебр с определяющей системой тождеств I. Тогда для любого множества Y ограничение канонического гомоморфизма $\sigma : \Phi[Y] \to \Phi[Y]/I(\Phi[Y])$ инъективно на множестве Y и алгебра $\Phi_\Sigma[\sigma(Y)] = \Phi[Y]/I(\Phi[Y])$ является свободной в многообразии Σ с множеством свободных порождающих $\sigma(Y)$.

Доказательство. Алгебра $\Phi_\Sigma[\sigma(Y)]$ порождается множеством $\sigma(Y)$ и принадлежит Σ, так как удовлетворяет всем тождествам из I. Докажем, что она свободна в Σ с множеством свободных порождающих $\sigma(Y)$. Пусть $A \in \Sigma$ и $\tau : \sigma(Y) \to A$ — некоторое отображение $\sigma(Y)$ в A. По теореме 1.1 отображение $\sigma \circ \tau : Y \to A$ продолжается до гомоморфизма $\nu : \Phi[Y] \to A$. Идеал $I(\Phi[Y])$ лежит в ядре любого гомоморфизма алгебры $\Phi[Y]$ в алгебру многообразия Σ и, в частности, $I(\Phi[Y]) \subseteq Ker(\nu)$. Таким образом, существует гомоморфизм $\phi : \Phi[Y]/I(\Phi[Y]) \to A$, такой что $\sigma \circ \phi = \nu$. Если $y \in Y$, то $\phi(\sigma(y)) = (\sigma \circ \phi)(y) = \nu(y) = (\sigma \circ \tau)(y) = \tau(\sigma(y))$ и, значит, ϕ продолжает отображение τ. Следовательно, ϕ — искомый гомоморфизм.

Мы показали, что $\Phi_\Sigma[\sigma(Y)]$ — свободная алгебры в многообразии Σ и $\sigma(Y)$ — множество ее свободных порождающих. Докажем, что ограничение σ на Y инъективно. Положим $x, y \in Y$, $x \neq y$, но $\sigma(x) = \sigma(y)$. Пусть A — ненулевая алгебра, $A \in \Sigma$ и $0 \neq a \in A$. Существует гомоморфизм $\tau : \Phi[Y] \to A$ такой, что $\tau(x) = a, \tau(y) = 0$. В силу того, что $I(\Phi[Y]) \subseteq Ker(\tau)$, существует гомоморфизм $\phi : \Phi_\Sigma[\sigma(Y)] \to A$ такой, что $\tau = \sigma \circ \phi$. Нам осталось заметить, что

$$a = \tau(x) = \phi(\sigma(x)) = \phi(\sigma(y)) = \tau(y) = 0.$$

Полученное противоречие влечет инъективность ограничения σ на Y.

Мы доказали, что $\sigma(Y)$ — множество свободных порождающих алгебры $\Phi_\Sigma[\sigma(Y)]$, равномощное Y. С помощью стандартной процедуры мы можем теперь построить свободную алгебру $\Phi_\Sigma[Y]$ с множеством свободных порождающих Y.

Лемма 1.2.1. Любые две свободные алгебры в Σ с равномощными множествами свободных порождающих изоморфны.

Доказательство. Пусть множества Y и Y' равномощны. Докажем, что $\Phi_\Sigma[Y]$ и $\Phi_\Sigma[Y']$ изоморфны. Рассмотрим биекцию $\sigma : Y \to Y'$. По доказанному в теореме 1.2.1, существует единственный гомоморфизм $\tau : \Phi_\Sigma[Y] \to \Phi_\Sigma[Y']$, продолжающий σ. Рассмотрим также биекцию $\sigma^{-1} : Y' \to Y$ и гомоморфизм $\tau' : \Phi_\Sigma[Y'] \to \Phi_\Sigma[Y]$, продолжающий σ^{-1}. Тогда $\tau \circ \tau'$ отображает гомоморфно алгебру $\Phi_\Sigma[Y]$ в себя, а сужение $(\tau \circ \tau')|_Y = id_Y$. По доказаному в теореме 1.2.1, мы имеем лишь единственный гомоморфизм алгебры $\Phi_\Sigma[Y]$ в себя, тождественный на Y, и этот гомоморфизм тождественный. Следовательно, $\tau \circ \tau' = id$. Аналогично имеем $\tau' \circ \tau = id$. Откуда заключаем, что τ — изоморфизм. Лемма доказана.

Заметим, что многообразия ассоциативных, альтернативных, йордановых и лиевых алгебр нетривиальны (все они содержат ненулевую алгебру) и поэтому обладают свободными алгебрами от любого множества свободных порождающих Y.

Следствие 1.2.1. Если I — система определяющих тождеств многообразия Σ, то $T(\Sigma) = I(\Phi[X])$.

Доказательство. Идеал $T(\Sigma)$ лежит в ядре любого горморфизма алгебры $\Phi[X]$ на алгебру из Σ и, в частности, в ядре канонического горморфизма $\sigma : \Phi[X] \to \Phi_\Sigma[X]$, которое равно $I(\Phi[X])$. Ввиду очевидности обратного включения, следствие доказано.

1.3 Однородные тождества и однородные многообразия.

Любой неассоциативный многочлен $f \in \Phi[X]$ однозначным способом может быть разложен в несократимую сумму одночленов. Будем говорить, что одночлен αv, где $\alpha \in \Phi, v \in V[X]$, имеет тип $[n_1, \ldots, n_k]$, если неассоциативное слово v содержит x_i ровно n_i раз, причем $n_k \neq 0$, но $n_j = 0$ при $j > k$. Например, одночлен $x_1(x_1x_4)(x_4x_1)$ имеет тип $[3, 0, 0, 2]$. Число n_i будем называть степенью одночлена αv по x_i. Многочлен f называется однородным по x_i степени n_i, если все одночлены многочлена f в несократимой записи имеют одну и ту же степень n_i по x_i.

Упражнение. Пусть $\Phi[x_1, ..., x_n]$ — свободная неассоциативная алгебра от множества порождающих $\{x_1, ..., x_n\}$. Показать, что число одночленов с коэффициентом 1 степени m равно $\frac{(2m-2)!}{m!(m-1)!}n^m$.

Определение. Одночлены, имеющие один и тот же тип, называются однотипными. Неассоциативный многочлен называется однородным, если все его одночлены в несократимой записи однотипны.

Так, например, однороднымы является многочлены $(x_1x_2)x_3 - x_1(x_2x_3)$, $(x_1x_2)x_3 + (x_2x_3)x_1 + (x_3x_1)x_2$ и $(x_1^2x_2)x_1 - x_1^2(x_2x_1)$. Которые, соответственно, имеют типы $[1, 1, 1]$, $[1, 1, 1]$ и $[3, 1]$. Отметим, что многочлен f является однородным если он однороден по каждой своей переменной. Таким образом, многочлен $x_1x_2 + x_2$ однороден по x_2 степени 1, однако однородным не является.

Определение. Однородный многочлен типа $[n_1, \ldots, n_k]$, где $n_i = 0, 1$, называется полилинейным.

Напомним, что свободная алгебра $\Phi[X]$ является свободным Φ-модулем с множеством $V[X]$ свободных порождающих, она обладает разложением в прямую сумму подмодулей $\Phi^{[n_1,\ldots,n_k]}[X]$, состоящих из однородных многочленов типа

$[n_1, \ldots, n_k]$:

$$\Phi[X] = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \left(\bigoplus_{[n_1,\ldots,n_k]} \Phi^{[n_1,\ldots,n_k]}[X] \right), \text{ где } [n_1, \ldots, n_k] \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^k \setminus \{[0, \ldots, 0]\}.$$

Степенью неассоциативного многочлена по x_i будем называть максимум степеней по x_i его одночленов.

Пусть $f \in \Phi[X]$ — произвольный неассоциативный многочлен. Сгруппируем однотипные одночлены многочлена f. Тогда f представится в виде суммы однородных многочленов. Эти однородные многочлены называются однородными компонентами многочлена f.

Теорема 1.3.1. Пусть $f \in \Phi[X]$ — тождество Φ-алгебры A степени k_i по x_i. Положим $k = max(k_i)$. Допустим, что в Φ имеется $k+1$ элемент $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1}$ таких, что для определителя Вандермонда

$$d = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^k \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_2^k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \alpha_{k+1} & \alpha_{k+1}^2 & \ldots & \alpha_{k+1}^k \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le k+1} (\alpha_j - \alpha_i)$$

равенство $d \cdot a = 0$ влечет $a = 0$ для любого $a \in A$. Тогда всякая однородная компонента тождества f является тождеством алгебры A.

Доказательство. Сначала мы представим f в виде $f = f_0 + f_1 + \ldots + f_{k_1}$, где f_i — сумма всех одночленов многочлена f, имеющих степень i по x_1. Пусть $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — произвольные элементы алгебры A. Будем сокращенно обозначать $f_i(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ через $f_i(a)$. Для $i = 1, 2, \ldots, k_1 + 1$ имеем соотношение

$$f_0(a) + \alpha_i f_1(a) + \alpha_i^2 f_2(\alpha) + \ldots + \alpha_i^{k_1} f_{k_1}(a) =$$
$$f(\alpha_i a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0,$$

откуда следует, что $d_1 f_j(a) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, k_1$, где

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^{k_1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_2^{k_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \alpha_{k_1+1} & \alpha_{k_1+1}^2 & \ldots & \alpha_{k_1+1}^{k_1} \end{vmatrix}.$$

Так как d_1 — делитель d, то из $d_1 f_j(a) = 0$ следует, что $f_j(a) = 0$. Ввиду произвольности $a_1, a_2, \ldots, a_n$ это означает, что $f_0, f_1, \ldots, f_{k_1}$ — тождества алгебры A. Проделав эту операцию с многочленами f_j, $j = 0, 1, 2, \ldots, k_1$, и переменной x_2 и т. д., в конце концов докажем теорему.

Условия теоремы заведомо выполнены в каждом из следующих случаев:
1) существуют $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1} \in \Phi$ такие, что определитель Вандермонда $d = \prod\limits_{i<j}(\alpha_j - \alpha_i)$ обратим в Φ;
2) алгебра A — свободный Φ-модуль и существуют элементы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1} \in \Phi$

такие, что $d = \prod_{i<j}(\alpha_j - \alpha_i) \neq 0$;
3) Φ — поле, содержащее более k элементов.

Следствие 1.3.1. Пусть f — тождество алгебры A степени k_i по x_i и $k = max(k_i)$. Тогда в любом из случаев 1)-3) всякая однородная компонента f является тождеством алгебры A.

Определение. Многообразие Σ называется однородным, если для всякого $f \in T(\Sigma)$ все однородные компоненты f также принадлежат $T(\Sigma)$.

Следствие 1.3.2. Всякое многообразие алгебр над бесконечным полем однородно.

Заметим, что для однородного многообразия Σ

$$T(\Sigma) = \bigoplus_{[n_1,\ldots,n_k]} (\Phi^{[n_1,\ldots,n_k]}[X] \cap T(\Sigma)),$$

поэтому разложение алгебры $\Phi[X]$ в прямую сумму подпространств $\Phi^{[n_1,\ldots,n_k]}[X]$ индуцирует аналогичное разложение и для свободной алгебры $\Phi_\Sigma[X]$ многообразия Σ, изоморфной фактор-алгебре $\Phi[X]/T(\Sigma)$:

$$\Phi_\Sigma[X] = \bigoplus_{[n_1,\ldots,n_k]} \Phi_\Sigma^{[n_1,\ldots,n_k]}[X],$$

где

$$\Phi_\Sigma^{[n_1,\ldots,n_k]}[X] = \Phi^{[n_1,\ldots,n_k]}[X]/(\Phi^{[n_1,\ldots,n_k]}[X] \cap T(\Sigma)).$$

Поэтому для элементов свободной алгебре $\Phi_\Sigma[X]$ многообразия Σ могут быть корректно определены понятия однородности, степени, степени по каждой из переменных.

Лемма 1.3.1. Для однородности многообразия Σ необходимо и достаточно, чтобы $T(\Sigma)$ как идеал алгебры $\Phi[X]$ обладал системой однородных порождающих элементов.

Доказательство. Если Σ однородно, то совокупность всех однородных компонент элементов $T(\Sigma)$ содержится в $T(\Sigma)$ и порождает этот идеал даже как Φ-модуль. Если $T(\Sigma)$ как идеал порождается множеством однородных многочленов $\{f_\alpha\}$, то $T(\Sigma)$ как Φ-модуль порождается однородными элементами вида

$$v(u_1, \ldots, u_k, f_\alpha, u_{k+1}, \ldots, u_m),$$

где $v, u_1, \ldots, u_m \in V[X]$. Наличие же в $T(\Sigma)$ системы однородных порождающих как Φ-модуля влечет однородность многообразия Σ. Лемма доказана.

1.4 Частичная и полная линеаризация тождеств.

Зафиксируем некоторой элемент $y \in \Phi[X]$ и определим семейство

$$\Delta(y) = \{\Delta_i^k(y) | i = 1, \ldots; k = 0, 1, \ldots\}$$

линейных отображений алгебры $\Phi[X]$ в себя, полагая
1) $\Delta_i^0(y) = id$ — тождественное отображение;
2) $x_s\Delta_i^k(y) = 0$, если $k > 1$, либо $k = 1, i \neq s$;
3) $x_i\Delta_i^1(y) = y$;
4) $(u \cdot v)\Delta_i^k(y) = \sum\limits_{r+s=k} (u\Delta_i^r(y)) \cdot (v\Delta_i^s(y))$,
где $x_j \in X, u, v$ — произвольные одночлены из $\Phi[X]$. Как легко видеть, условия 1) — 4) вместе с условием линейности однозначно определяют и действие отображений $\Delta_i^k(y)$ на алгебре $\Phi[X]$.

Лемма 1.4.1 Пусть $= v(x_1, \dots, x_n)$ — полилинейный одночлен. Тогда для любых $f_1, f_2, \dots, f_n \in \Phi[X]$ верно

$$v(f_1, \dots, f_n)\Delta_i^k(y) = \sum_{k_1+\ldots+k_n=k} v(f_1\Delta_i^{k_1}(y), \dots, f_n\Delta_i^{k_n}(y)).$$

Доказательство. Будем обозначать для краткости $\Delta_i^k(y)$ просто через Δ_i^k, а $v(f_1, \dots, f_n)$ через $v(f)$. Проведем индукцию по n. При $n = 1$ все очевидно. Пусть теперь $n > 1$, тогда $v = v_1 \cdot v_2$, где $d(v_1) = m < n, d(v_2) = l < n$. По определению оператора Δ_i^k и по предположению индукции получаем

$$v(f)\Delta_i^k = (v_1(f) \cdot v_2(f))\Delta_i^k = \sum_{r+s=k} (v_1(f)\Delta_i^r)(v_2(f)\Delta_i^s) =$$

$$\sum_{r+s=k} \left(\sum_{r_1+\ldots+r_m=r} v_1(f_1\Delta_i^{r_1}, \dots, f_m\Delta_i^{r_m})) \times (\sum_{s_1+\ldots+s_l=s} v_2(f_{m+1}\Delta_i^{s_1}, \dots, f_n\Delta_i^{s_l}) \right) =$$

$$\sum_{k_1+\ldots+k_n=k} v_1(f_1\Delta_i^{k_1}, \dots, f_m\Delta_m^{k_m}) \times v_2(f_{m+1}\Delta_i^{k_{m+1}}, \dots\ f_n\Delta_i^{k_n}) =$$

$$= \sum_{k_1+\ldots+k_n=k} v(f_1\Delta_i^{k_1}, \dots, f_n\Delta_i^{k_n}).$$

Лемма доказана.

Следствие 1.4.1. Пусть $u = u(x_1, \dots, x_n)$ — произвольный одночлен из $\Phi[X]$ степени m по x_i. Тогда при $k \leqslant m$ верно

$$u\Delta_i^k(y) = u_1 + u_2 + \ldots + u_{C_m^k},$$

где $u_1, u_2, \dots, u_{C_m^k}$ — всевозможные одночлены, получающиеся из u заменой k вхождений x_i на y, а при $k > m$ $u\Delta_i^k(y) = 0$.

Для доказательства достаточно рассмотреть полилинейный одночлен $v(x_{11}, \dots, x_{1k}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nk_n})$, для которого $u(x_1, \dots, x_n) = v(x_1, \dots, x_1, \dots, x_n, \dots, x_n)$, и воспользоваться леммой 1.4.1 и условием 2) в определении оператора $\Delta_i^k(y)$.

Приведем примеры:
$[(x_1^2x_2)x_1]\Delta_1^1(y) = (x_1^2x_2)y + [(x_1y)x_2]x_1 + [(yx_1)x_2]x_1$,

$[(x_1^2x_2)x_1]\Delta_1^2(y) = [(x_1y)x_2]y + [(yx_1)x_2]y + (y^2x_2)x_1,$
$[(x_1^2x_2)x_1]\Delta_1^3(y) = (y^2x_2)y,$
$[(x_1^2x_2)x_1]\Delta_1^4(y) = 0.$

Заметим, что символ i в обозначении $\Delta_i^k(y)$ нужен лишь для указания порождающего x_i, на котором оператор $\Delta_i^k(y)$ действует ненулевым образом. Если элементы множества X снабжены индексами, мы будем вместо индекса писать сам порождающий элемент. Например,

$$[(x^2z)t]\Delta_x^1(y) = [(xy)z]t + [(yx)z]t.$$

Лемма 1.4.2 Пусть $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ — многочлен из $\Phi[X]$ степени m по x_i. Тогда

$$f(x_1, \ldots, x_i + y, \ldots, x_n) = \sum_{k=0}^{m} f\Delta_i^k(y).$$

Доказательство. Ввиду следствия 1.4.1. и линейности оператора $\Delta_i^k(y)$ достаточно рассмотреть случай, когда f — одночлен. Проведем индукцию по степени f. Если $d(f) = 1$, то все ясно. Пусть теперь $d(f) > 1$, тогда $f = f_1 \cdot f_2$, где $d(f_i) < d(f)$, и пусть f_1 имеет степень m_1 по x_i, f_2 имеет степень m_2 по x_i. По предположению индукции и по определению оператора $\Delta_i^k(y)$ получаем

$$f(x_1, \ldots, x_i + y, \ldots, x_n) = f_1(x_1, \ldots, x_i + y, \ldots, x_n)f_2(x_1, \ldots, x_i + y, \ldots, x_n) =$$

$$\left[\sum_{k=0}^{m_1} f_1\Delta_i^k(y)\right]\left[\sum_{r=0}^{m_2} f_2\Delta_i^r(y)\right] = \sum_{j=0}^{m}\left[\sum_{k+r=j}(f_1\Delta_i^k(y))(f_2\Delta_i^r(y))\right] = \sum_{j=0}^{m} f\Delta_i^j(y).$$

Лемма доказана.

Рассмотрим некоторый неассоциативный многочлен $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \Phi[X]$, и пусть $x_j \in X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$. Многочлены $f_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_n; x_j) = f\Delta_i^k(x_j)$ мы будем называть *частичными линеаризациями* многочлена f по x_i степени k. Пусть многочлен f имеет степень s по x_i. Ввиду следствия 1.4.1. многочлен $f_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_n; x_j)$ однороден по x_j степени k при $k \leq s$ и равен нулю при $k > s$. Если f — однородный многочлен типа $[k_1, \ldots, k_i, \ldots, k_n]$, то многочлен $f_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_n; x_{n+1})$ также является однородным типа $[k_1, \ldots, k_i - k, \ldots, k_n, k]$ (при $k \leq k_i$). Заметим здесь же, что для любого $y \in \Phi[X]$ элемент $f\Delta_i^k(y)$ получается подстановкой элемента y в многочлен $f_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_n; x_j)$ вместо переменной x_j.

Предложение 1.4.1. Если многообразие Σ однородно, то для любых $f \in T(\Sigma)$ и для любого $y \in \Phi[X]$ справедливо включение

$$f\Delta(y) = \{f\Delta_i^k(y) | i = 1, 2, \ldots; k = 0, 1, 2, \ldots\} \subseteq T(\Sigma).$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что если $f(x_1, \ldots, x_n) \in T(\Sigma)$, то и $f(y_1, \ldots, y_n) \in T(\Sigma)$ для любых элементов $y_1, \ldots, y_n \in \Phi[X]$. Поэтому для доказательства включений $f\Delta_i^k(y) \in T(\Sigma)$ достаточно доказать, что $f_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_n; x_j) \in$

$T(\Sigma)$, где $x_j \in X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$. В силу леммы 1.4.2. мы имеем $\sum\limits_{k=0}^{n_i} f\Delta_i^k(x_j) = f(x_1, \ldots, x_i + x_j, \ldots, x_n) \in T(\Sigma)$, где n_i — степень f по x_i. Как было замечено выше, каждый из многочленов $f\Delta_i^k(x_j)$ однороден по x_j степени k. Ввиду однородности Σ отсюда следует, что

$$f\Delta_i^k(x_j) = f_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_n; x_j) \in T(\Sigma),$$

отсюда и

$$f\Delta_i^k(y) = f_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_n; y) \in T(\Sigma).$$

Предложение доказано.

Легко видеть, что справедливо и обратное утверждение: если $f\Delta(y) \subseteq T(\Sigma)$ для любых $f \in T(\Sigma)$ и $y \in \Phi[X]$, то многообразие Σ однородно. Сейчас мы покажем, что на самом деле для однородности многообразия Σ достаточно выполнения гораздо более слабого условия.

Пусть f — неассоциативный многочлен. Обозначим через $f\Delta$ множество всех многочленов из $\Phi[X]$, которые можно получить из f с помощью последовательных частичных линеаризаций:

$$f\Delta = \{g \in \Phi[X] | g = f\Delta_{i_1}^{j_1}(x_{k_1}) \cdot \ldots \cdot \Delta_{i_s}^{j_s}(x_{k_s})\}.$$

Теорема 1.4.1. Пусть многообразие Σ обладает такой системой I определяющих тождеств, что $f\Delta \subseteq T(\Sigma)$ для всех $f \in I$. Тогда Σ — однородно.

Доказательство. Заметим прежде всего, что мы можем считать без ограничения общности, что система I состоит из однородных многочленов. Действительно, пусть $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in I, f = f_1 + f_2$, где f_1 однороден по x_1 степени m, а f_2 имеет по x_1 степень меньше m. Пусть, далее, x_j — порождающий, не входящий в запись f. Тогда мы имеем

$$f\Delta_1^m(x_j) = f_1\Delta_1^m(x_j) + f_2\Delta_1^m(x_j) = f_1(x_j, x_2, \ldots, x_n) \in f\Delta$$

и далее

$$f_1(x_j, x_2, \ldots, x_n)\Delta_j^m(x_1) = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1 \in f\Delta \subseteq T(\Sigma),$$

т.е. $f_1, f_2 \in T(\Sigma)$. Покажем, что $f_1\Delta \cup f_2\Delta \subseteq T(\Sigma)$. Так как $f_1 \in f\Delta$, то ясно, что $f_1\Delta \subseteq f\Delta \subseteq T(\Sigma)$. Пусть теперь $g \in f_2\Delta$. Тогда $g = f_2\Delta_1 \ldots \Delta_k$, где $\Delta_i = \Delta_{t_i}^{r_i}(x_{s_i})$. Мы имеем $g = (f - f_1)\Delta_1 \ldots \Delta_k = f\Delta_1 \ldots \Delta_k - f_1\Delta_1 \ldots \Delta_k \in T(\Sigma)$. Итак, мы можем заменить в системе I многочлен f многочленами f_1 и f_2. Продолжая этот процесс, мы придем к однородной системе I', удовлетворяющей условию теоремы. Согласно лемме 1.3.1., однородность многообразия Σ эквивалентна тому, что идеал $T(\Sigma)$ обладает системой однородных порождающих. По следствию 1.2.1. этот идеал порождается элементами вида $f(g_1, g_2, \ldots, g_n)$, где $f \in I; g_1, \ldots, g_n \in \Phi[X]$. Разложим многочлены $g_1, \ldots, g_n$ на одночлены $g_i = \sum\limits_{k=1}^{s_i} g_{ik}$. Тогда по лемме 1.4.2. элемент $h = f(g_1, \ldots, g_n)$ представим в виде

$$h = \sum_m f_m(g_{11}, \ldots, g_{1s}, \ldots, g_{n1}, \ldots, g_{ns_n}),$$

где $f_m = f_m(x_{11}, \dots, x_{1s_1}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{ns_n}) \in f\Delta$. В силу однородности f все элементы f_m являются однородными; кроме того, по условию они лежат в $T(\Sigma)$. Но тогда и все элементы

$$f_m(g_{11}, \dots, g_{1s_1}, \dots, g_{n1}, \dots, g_{ns_n})$$

также являются однородными и лежат в $T(\Sigma)$. Следовательно, совокупность этих элементов и есть искомая система однородных порождающих для идеала $T(\Sigma)$. Теорема доказана.

Выясним теперь, при каких условиях частичные линеаризации некоторого тождества сами являются тождествами.

Теорема 1.4.2. Пусть $f \in \Phi[X]$ — тождество алгебры A, однородное по x_i степени k. Допустим, что в Φ имеются такие $k-1$ элементов $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$, что для определителя

$$d = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{k-1} \\ \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k-1} & \alpha_{k-1}^2 & \dots & \alpha_{k-1}^{k-1} \end{vmatrix} = \left(\prod_{s=1}^{k-1} \alpha_s\right) \left(\prod_{i<j} (\alpha_j - \alpha_i)\right)$$

равенство $d \cdot a = 0$ влечет $a = 0$ для любого $a \in A$. Тогда все частичные линеаризации многочлена f являются тождествами алгебры A.

Доказательство. Пусть $f = f(x_1, \dots, x_n)$ и $a_1, a_2, \dots, a_n, a_j$ — произвольные элементы алгебры A. Как и при доказательстве теоремы 1.3.1, элементы $f_i^{(m)}(a_1, \dots, a_n; a_j)$ для краткости обозначим $f_i^{(m)}(a)$. Имеем по лемме 1.4.2

$$0 = f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + a_j, a_{i+1}, \dots, a_n) = \sum_{s=0}^{k} f_i^{(s)}(a) = \sum_{s=1}^{k-1} f_i^{(s)}(a),$$

так как

$$f_i^{(0)}(a) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) = 0,$$
$$f_i^{(k)}(a) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \dots, a_n) = 0.$$

Подставляя в полученное равенство последовательно элементы $\alpha_1 a_j, \alpha_2 a_j, \dots, \alpha_{k-1} a_j$ вместо a_j, получим

$$\alpha_1 f_i^{(1)}(a) + \alpha_1^2 f_i^{(2)}(a) + \dots + \alpha_1^{k-1} f_i^{(k-1)}(a) = 0,$$
$$\alpha_2 f_i^{(1)}(a) + \alpha_2^2 f_i^{(2)}(a) + \dots + \alpha_2^{k-1} f_i^{(k-1)}(a) = 0,$$
$$\dots$$
$$\alpha_{k-1} f_i^{(1)}(a) + \alpha_{k-1}^2 f_i^{(2)}(a) + \dots + \alpha_1^{k-1} f_{k-1}^{(k-1)}(a) = 0,$$

откуда следует, что $d \cdot f_i^{(s)}(a) = 0$ для $1 \leqslant s \leqslant k-1$. Значит, $f_i^{(s)}(a) = 0$, что, ввиду произвольности элементов $a_1, \dots, a_n, a_j \in A$, доказывает справедливость в A тождества $f_i^{(s)}(x_1, x_2, \dots, x_n; x_j)$. Теорема доказана.

Следствие 1.4.1. Если многообразие алгебр Σ задано системой I однородных тождеств степени $\leqslant k$ по каждой из переменных и в Φ имеется $k-1$ элемент $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$ таких, что для $d = \left(\prod_{s=1}^{k-1} \alpha_s\right) \left(\prod_{i<j} (\alpha_j - \alpha_i)\right)$, любой алгебры $A \in \Sigma$ и $a \in A$ равенство $d \cdot a = 0$ влечет $a = 0$, то многообразие Σ однородно. В частности, всякое многообразие, заданное однородными тождествами степени $\leqslant 2$ по каждой из переменных, однородно.

Доказательство. Если в Φ найдутся нужные элементы $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$, то в силу теоремы 1.4.2. для всякого $f \in I$ мы будем иметь $f\Delta \subseteq T(\Sigma)$, откуда по теореме 1.4.1. многообразие Σ однородно. Если все элементы в I имеют степень не выше 2 по каждой из переменных, то мы можем взять в качестве α_1 единицу 1 и применить первую часть следствия.

Многообразия ассоциативных, альтернативных задаются однородными тождествами степени не более 2 и потому являются однородными. Определяющие тождества многообразия йордановых алгебр также однородны, но одно из них имеет степень 3 по x_1. Это является причиной того, что для некоторых колец операторов, например, поля $\mathbb{Z}_2$ из двух элементов, многообразие йордановых алгебр не является однородным. Однако, если в Φ разрешимо уравнение $2 \cdot x = 1$, то ситуация в корне меняется. В самом деле, если положить $\alpha_1 = 1$, а в качестве α_2 взять решение этого уравнения (обозначим его $1/2$), то для $d = 1 \cdot 1/2 \cdot (1 - 1/2) = (1/2)^2$ импликация $da = 0 \Rightarrow a = 0$ верна, так как $4da = a$. По следствию 1.4.1 заключаем, что в этом случае многообразие йордановых алгебр однородно.

Определение. Пусть A и B — алгебры над кольцом Φ. Рассмотрим прямую сумму $A \times B$. Тогда через P обозначим множество всех формальных сумм вида

$$\sum_{(a,b) \in A \times B, \lambda \in \Phi} \lambda(a, b).$$

Пусть K аддитивная подгруппа в P, порожденная элементами

$$(a_1 + a_2, b) - (a_1, b) - (a_2, b),$$

$$(a, b_1 + b_2) - (a, b_1) - (a, b_2),$$

$$(ra, b) - (a, rb), (ra, b) - r(a, b),$$

где $a, b, a_1, a_2, b_1, b_2 \in A, r \in \Phi$. Рассмотрим фактор-группу $F = P/K$. Полученную фактор-группу будем обозначать $F = A \otimes_\Phi B$, а ее элементы через $a \otimes b$. Зададим на F умножение следующим образом $(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2)$. Полученную алгебру $A \otimes_\Phi B$ мы будем называть тензорным произведений алгебр A и B.

Упражнение. Доказать изоморфизм $A \otimes_\Phi B \cong B \otimes_\Phi A$.

Теорема 1.4.3 Пусть A — алгебра над кольцом Φ, принадлежащая однородному многообразию Σ, и B — ассоциативно-коммутативная алгебра. Тогда алгебра $C = B \otimes_\Phi A$ также принадлежит многообразию Σ.

Доказательство. Достаточно показать, что C удовлетворяет всем однородным тождествам из $T(\Sigma)$. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — такое тождество. Тогда для любых $c_1, \dots, c_n \in C$ элемент $f(c_1, \dots, c_n)$ представляется в виде суммы элементов вида $g(b_1 \otimes a_1, \dots, b_s \otimes a_s), a_i \in A, b_i \in B$, где g — однородный многочлен из $f\Delta \subseteq T(\Sigma)$. Если многочлен $g(x_1, x_2, \dots, x_s)$ имеет тип $[i_1, i_2, \dots, i_s]$, то

$$g(b_1 \otimes a_1, \dots, b_s \otimes a_s) = b_1^{i_1} b_2^{i_2} \dots b_s^{i_s} \otimes g(a_1, a_2, \dots, a_s) = 0.$$

Но это значит, что и $f(c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$. Теорема доказана.

1.5 Полилинейные тождества и присоединение единицы.

Введем следующие обозначение: крышечка $\hat{}$ над x_i в сумме $x_1 + \ldots + \hat{x}_i + \ldots + x_n$ означает, что x_i в входит в сумму с нулевым коэффициентом, т.е.

$$x_1 + \ldots + \hat{x}_i + \ldots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k - x_i.$$

Например, $x_1 + \hat{x}_2 + x_3 + \hat{x}_4 + x_5 = x_1 + x_3 + x_5$.

Пусть $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — некоторый неассоциативный многочлен из $\Phi[X]$ и $y_1, y_2, \dots, y_k \in X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$. Для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ определим неассоциативный многочлен fL_i^k формулой

$$fL_i^k(x_1, \dots, x_{i-1}, y_1, y_2, \dots, y_k, x_{i+1}, \dots, x_n) =$$

$$= f(x_1, \dots, x_{i-1}, y_1 + y_2 + \dots + y_k, x_{i+1}, \dots, x_n) -$$

$$\sum_{q=1}^{k} f(x_1, \dots, x_{i-1}, y_1 + \ldots + \hat{y}_q + \ldots + y_k, x_{i+1}, \dots, x_n) +$$

$$+ \sum_{1 \leqslant q_1 < q_2 \leqslant k} f(x_1, \dots, x_{i-1}, y_1 + \ldots + \hat{y}_{q_1} + \ldots + \hat{y}_{q_2} + \ldots + y_k, x_{i+1}, \dots, x_n) -$$

$$- \ldots + (-1)^{k-1} \sum_{q=1}^{k} f(x_1, \dots, x_{i-1}, y_q, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Пусть $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — однородный многочлен типа $[k_1, k_2, \dots, k_n]$. Тогда полилинейный многочлен $fL_1^{k_1} \dots L_n^{k_n}$ будем называть полной линеаризацией многочлена f.

Лемма 1.5.1. Если алгебра A удовлетворяет некоторому тождеству, то она удовлетворяет и некоторому полилинейному тождеству.

Упражнение. Найти систему полилинейных тождеств многообразия альтернативных алгебр.

Пусть A — некоторая алгебра над кольцом Φ. Рассмотрим Φ как модуль над самим собой. Единица 1 кольца Φ является порождающим элементом этого модуля: $\Phi = \Phi \cdot 1$. Рассмотрим прямую сумму $A^{\#} = A \oplus \Phi \cdot 1$ двух Φ-модулей A и $\Phi \cdot 1$ и определим на ней умножение следующим образом:

$$(a + \alpha \cdot 1)(b + \beta \cdot 1) = (ab + \alpha b + \beta a) + \alpha\beta \cdot 1,$$

где $\alpha, \beta \in \Phi, a, b \in A$. Алгебру $A^{\#}$ будем называть алгеброй, полученной формальным присоединением единицы к алгебре A. Легко видеть, что 1 — единица алгебры $A^{\#}$, т.е. $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ для любого $a \in A^{\#}$ и A — подалгебра в $A^{\#}$.

Определение. Многообразие Σ называется унитарно замкнутым, если для любой алгебры $A \in \Sigma$ верно $A^{\#} \in \Sigma$.

Упражнение. Доказать, что многообразие лиевых алгебр (алгебр Ли) не является унитарно замкнутым.

Отметим, что многообразие алгебр, удовлетворяющих тождеству $(x^2y)x = x^2(yx)$ не является унитарно замкнутым. В тоже время, многообразие алгебр, удовлетворяющих тождествам

$$(x^2y)x = x^2(yx), (xy)x = x(yx)$$

является унитарно замкнутым. Алгебры из этого многообразия называются некоммутативными йордановыми алгебрами.

Глава 2

Композиционные алгебры и примеры йордановых алгебр

2.1 Композиционные алгебры

Пусть F — произвольное поле, A — векторное пространство ненулевой размерности над F. Отображение $f : A \times A \to F$ называется билинейной формой, если для любых $x, x'y, y' \in A, \alpha \in F$ выполняется
1) $f(x + x', y + y') = f(x, y) + f(x', y) + f(x, y') + f(x', y')$;
2) $f(\alpha x, y) = f(x, \alpha y) = \alpha f(x, y)$.

Билинейная форма f называется симметрической, если $f(x, y) = f(y, x)$ для любых $x, y \in A$. Симметрическая билинейная форма f называется невырожденной, если из того, что $f(a, x) = 0$ для все $x \in A$, следует, что $a = 0$.

Отображение $n : A \to F$ называется квадратичной формой, если
1) $n(\lambda x) = \lambda^2 n(x)$, где $x \in A, \lambda \in F$;
2) функция $f(x, y) = n(x + y) - n(x) - n(y)$ является билинейной формой на A.

Квадратичная форма $n(x)$ называется невырожденной, если невырождена соответствующая ей симметрическая билинейная форма $f(x, y)$, и строго невырожденной, если из того, что $n(a) = f(a, x) = 0$ для всех $x \in A$, следует, что $a = 0$. Всякая строго невырожденная квадратичная форма является невырожденной; обратное верно, если характеристика поля отличная от 2. Форма $n(x)$ называется допускающей композицию, если существует такая бинарная билинейная операция (композиция) xy в A, что

$$n(x)n(y) = n(xy). \tag{2.1}$$

Пример. Рассмотрим поле $\mathbb{R}$ — действительных чисел. Тогда квадратичная форма $n(x) = x^2$ допускает композицию. Пусть поле $\mathbb{C}$ — комплексных чисел. Тогда квадратичная форма $n(z) = z\overline{z}$, где $\overline{z}$ — комплексно сопряженное число к z, допускает композицию.

Примером квадратичной формы, допускающей композицию и отличной от суммы квадратов, может служить следующая форма от двух переменных:

$$n(x) = n(x_1, x_2) = x_1^2 + kx_1x_2 + tx_2^2, k, t \in F.$$

Упражнение. Показать, что

$$n(x_1, x_2)n(y_1, y_2) = n(x_1y_1 - tx_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1 + kx_2y_2).$$

Определение. Алгебра A над полем F с квадратичной формой $n(x)$ называется композиционной алгеброй, если
1) $n(xy) = n(x)n(y)$;
2) форма $n(x)$ строго невырождена;
3) в A есть единица 1.

Предложение 2.1.1. Пусть $n(x)$ — строго невырожденная квадратичная форма на конечномерном векторном пространстве A. Тогда если $n(x)$ допускает какую-либо композицию относительно умножения xy на A, то $n(x)$ допускает такую композицию $x \cdot y$, относительно которой A является композиционной алгеброй.

Доказательство. По предположению алгебра A с умножением xy и форма $n(x)$ удовлетворяет условиям 1) и 2). В силу условия 2) существует такой элемент $a \in A$, для которого $n(a) \neq 0$. Пусть $u = \frac{a^2}{n(a)}$. Тогда $n(u) = 1$; следовательно, $n(xu) = n(ux) = n(x)$. Отсюда следует, что $f(xu, yu) = f(ux, uy) = f(x, y)$. В силу условия 2) это означает, что линейные отображения

$$R_u : x \to xu \text{ и } L_u : x \to ux$$

невырождены. Ввиду конечномерности A отображения R_u и L_u обратимы. Определим теперь новое умножение в A, положив $x \cdot y = (xR_u^{-1})(yL_u^{-1})$. Тогда $u^2 \cdot x = (u^2R_u^{-1})(xL_u^{-1}) = x$. Аналогично $x \cdot u^2 = x$. Следовательно, u^2 является единицей относительно нового умножения. Далее,

$$n(x \cdot y) = n((xR_u^{-1})(yL_u^{-1})) = n(xR_u^{-1})n(yL_u^{-1}) = n(x)n(y).$$

Таким образом, мы можем заменить композицию xy на $x \cdot y$ и получить композиционную алгебру. Предложение доказано.

Лемма 2.1.1. Пусть A — композиционная алгебра. Тогда A — альтернативная и каждый элемент алгебры A удовлетворяет квадратному уравнению с коэффициентами из F.

Доказательство. Отождествим $F \cdot 1$ с F. Воспользовавшись (2.1), мы легко получаем $n(x)n(y + w) = n(xy + xw)$. Следовательно

$$n(x)f(y, w) = n(x)n(y + w) - n(x)n(y) - n(x)n(w) = n(xy + xw) - n(xy) - n(xw).$$

Поэтому

$$n(x)f(y, w) = f(xy, xw). \tag{2.2}$$

Проделав ту же процедуру с x, получим

$$f(x, z)f(y, w) = f(xy, zw) + f(xw, zy). \tag{2.3}$$

Подставим теперь в (2.3) $z = 1, y = xu$:

$$f(x,1)f(xu,w) = f(x(xu),w) + f(xw,xu). \tag{2.4}$$

Так как в силу (2.2) $f(xw,xu) = n(x)f(w,u)$, то (2.4) можно переписать в виде

$$f(x(xu) + n(x)u - f(x,1)xu, w) = 0.$$

Так как форма $f(x,y)$ невырождена, отсюда следует в силу произвольности w, что

$$x(xu) + n(x)u - f(x,1)xu = 0 \tag{2.5}$$

для любых $x, u \in A$. Положив теперь в (2.5) $u = 1$, получим

$$x^2 - f(x,1)x + n(x) = 0, \tag{2.6}$$

что доказывает вторую половину леммы. Остается доказать альтернативность алгебры A.

Умножив (2.6) на u и сравнив с (2.5), получим

$$x^2u = x(xu).$$

Аналогично доказывается, что $ux^2 = (ux)x$. Следовательно, алгебра A — альтернативна. Лемма доказана.

Определение. Эндоморфизм векторного пространства A называется инволюцией алгебры A, если для любых $a, b \in A$ выполнено

$$\phi(ab) = \phi(b)\phi(a) \text{ и } \phi(\phi(a)) = a.$$

Лемма 2.1.2. Отображение $a \to \overline{a} = f(1,a) - a$ является инволюцией алгебры A, оставляющей неподвижными элементы поля F, при этом элементы $t(a) = a + \overline{a}$ и $n(a) = a\overline{a}$ лежат в F для всех $a \in A$. Кроме того, a удовлетворяет равенству $a^2 - t(a)a + n(a) = 0$.

Доказательство. Будем проверять последовательно все свойства инволюции:
$a)$ $\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$. Имеем $\overline{a+b} = f(1, a+b) - (a+b) = f(1,a) - a + f(1,b) - b = \overline{a} + \overline{b}$.
$b)$ Пусть $\lambda \in F$. Тогда $\overline{\lambda a} = f(1, \lambda a) - \lambda a = \lambda(f(1,a) - a) = \lambda\overline{a}$.
$c)$ $\overline{\overline{a}} = a$. Имеем

$$\overline{\overline{a}} = f(1,\overline{a}) - \overline{a} = f(1, f(1,a) - a) - f(1,a) + a = f(1,1)f(1,a) - 2f(1,a) + a.$$

Далее, как легко видеть, $n(1) = 1$, поэтому $f(1,1) = n(2) - n(1) - n(1) = 2$, т.е. $\overline{\overline{a}} = a$.
$d)$ $\overline{ab} = \overline{b}\overline{a}$. Из тождества (2.6) получаем, подставляя вместо x последовательно $a + b, a, b$ и вычитая из первого получившегося тождества два других:

$$ab + ba - f(1,a)b - f(1,b)a + f(a,b) = 0. \tag{2.7}$$

Далее, из (2.3) получаем при $x = y = 1, z = a$ и $w = b$

$$f(1, a)f(1, b) = f(1, ab) + f(a, b). \tag{2.8}$$

Подставив это в (2.7), получим

$$ab + ba - f(1, a)b - f(1, b)a + f(1, a)f(1, b) - f(1, ab) = 0, \tag{2.9}$$

откуда

$$(f(1, a) - a)(f(1, b) - b) = ab - f(1, a)b - f(1, b)a + f(1, a)f(1, b) = f(1, ab) - ba.$$

Из (2.9) следует, что $f(1, ab) = f(1, ba)$. Следовательно, $\overline{a}\overline{b} = \overline{ba}$, что и требовалось доказать.

Далее, если $\lambda \in F$, то $\overline{\lambda} = f(1, \lambda) - \lambda = \lambda f(1, 1) - \lambda = \lambda$. Наконец, $a + \overline{a} = f(1, a) \in F$ и в силу (2.6) $a\overline{a} = f(1, a)a - a^2 = n(a) \in F$. Так как $t(a) = f(1, a)$, то последнее утверждение леммы следует также из (2.6). Лемма доказана.

Лемма 2.1.3. Пусть A — алгебра над полем F с единицей 1 и с инволюцией $x \to \overline{x}$, причем для всякого $x \in A$ элементы $x+\overline{x}, x\overline{x} \in F$. Тогда если квадратичная форма $n(x) = x\overline{x}$ строго невырожденна на A, то алгебра A либо проста, либо изоморфна прямой сумме $F \oplus F$ с инволюцией $\overline{(a, b)} = (b, a)$.

Доказательство. Докажем, что A — проста, как алгебра с инволюцией. Пусть $I \neq A$ — идеал алгебры A и $\overline{I} = I$. Так как $I \cap F = \{0\}$, то мы имеем $a+\overline{a} = 0, a\overline{a} = 0$ для любого $a \in I$. Далее, для любых элементов $a \in I, x \in A$ мы имеем $a\overline{x} \in I$, откуда по предыдущему $f(a, x) = a\overline{x} + x\overline{a} = a\overline{x} + \overline{a\overline{x}} = 0$. Ввиду невырожденности формы f, отсюда следует, что $I = (0)$.

Пусть теперь T — произвольный идеал алгебры A, $T \neq (0)$ и $T \neq A$. Положим $I = T + \overline{T}$, тогда $\overline{I} = I, I \neq (0)$, откуда по доказанному выше $I = A$. Далее, положим $J = T \cap \overline{T}$, тогда $\overline{J} = J, J \neq A$ и вновь по доказанному выше $J = (0)$. Следовательно, алгебра A есть прямая сумма идеалов T и $\overline{T}$. Остается доказать, что идеал T одномерен над полем F. Пусть $t, s \in T, t \neq 0; \lambda = t + \overline{t}, \mu = s + \overline{s}, \lambda, \mu \in F$. Заметим, что $\lambda \neq 0$, так как иначе $t = -\overline{t} \in T \cap \overline{T} = (0)$. Далее, имеем $T \cdot \overline{T} + \overline{T} \cdot T \subseteq T \cap \overline{T} = (0)$, откуда $\lambda s = (t + \overline{t})s = ts, \mu t = t(s + \overline{s}) = ts$. Следовательно, $\lambda s = \mu t$ и $s = (\lambda^{-1}\mu)t$, т.е. одномерность идеала T доказана.

Итак, если алгебра A не проста, то она является прямой суммой двух экземпляров поля F. Лемма доказана.

2.2 Процесс Кэли—Диксона.

Далее считаем, что A — алгебра над полем F, которая обладает единицей 1 и инволюцией $a \to \overline{a}$, причем $a + \overline{a}, a\overline{a} \in F$. С помощью так называемого процесса Кэли—Диксона мы построим новую алгебру с инволюцией, содержащую A в качестве подалгебры. При этом размерность полученной алгебры будет в два раза больше, чем размерность исходной алгебры.

Зафиксируем $0 \neq \alpha \in F$ и обозначим через (A, α) совокупность всех упорядоченных пар $(a_1, a_2), a_i \in A$, с операциями покомпонентного сложения и умножения на скаляр и операцией умножения, определенной следующим правилом

$$(a_1, a_2)(a_3, a_4) = (a_1 a_3 + \alpha a_4 \overline{a_2}, \overline{a_1} a_4 + a_3 a_2).$$

Как легко видеть, (A, α) является алгеброй над F. Элемент $(1, 0)$ является единицей алгебры (A, α); множество $A' = \{(a, 0) | a \in A\}$ есть подалгебра алгебры (A, α), изоморфная исходной алгебре A. Пусть $v = (0, 1)$, тогда $v^2 = \alpha(1, 0)$ и (A, α) является прямой суммой векторных пространств A' и vA'. Если мы отождествим A' с A, элементы алгебры (A, α) представятся в виде $x = a_1 + v a_2$, где $a_i \in A$ однозначно определены элементами $x_,$ и уножение в (A, α) будет задаваться следующим образом:

$$(a_1 + v a_2)(a_3 + v a_4) = (a_1 a_3 + \alpha a_4 \overline{a_2}) + v(\overline{a_1} a_4 + a_3 a_2).$$

Для произвольного элемента $x = a_1 + v a_2 \in (A, \alpha)$ мы положим $\overline{x} = \overline{a_1} - v a_2$.

Лемма 2.2.1. Отображение $x \to \overline{x}$ есть инволюция алгебры (A, α); при этом $x + \overline{x}, x\overline{x} \in F$ для любого $x \in (A, \alpha)$. Если квадратичная форма $n(a) = a\overline{a}$ строго невырожденая на A, то квадратичная форма $n(x) = x\overline{x}$ строго невырождена на (A, α).

Доказательство. Ясно, что отображение $x \to \overline{x}$ линейно и что $\overline{\overline{x}} = x$ для любого $x \in (A, \alpha)$. Пусть $x = a_1 + v a_2, y = a_3 + v a_4$, где $a_i \in A$. Тогда мы имеем

$$\overline{y} \cdot \overline{x} = (\overline{a_3} - v a_4)(\overline{a_1} - v a_2) = (\overline{a_3} \cdot \overline{a_1} + \alpha a_2 \overline{a_4}) - v(a_3 a_2 + \overline{a_1} a_4).$$

С другой стороны

$$\overline{xy} = (\overline{a_3} \cdot \overline{a_1} + \alpha a_2 \overline{a_4}) - v(\overline{a_1} a_4 + a_3 a_2) = \overline{y} \cdot \overline{x}.$$

Следовательно, отображение $x \to \overline{x}$ есть инволюция алгебры (A, α). Далее, $x + \overline{x} = a_1 + \overline{a_1} \in F$ и $x\overline{x} = a_1 \overline{a_1} - \alpha a_2 \overline{a_2} \in F$.

Пусть теперь квадратичная форма $n(a)$ строго невырождена на A. Квадратичной форме $n(x) = x\overline{x}$ соответствует билинейная форма

$$f(x, y) = x\overline{y} + y\overline{x} = (a_1 \overline{a_3} + a_3 \overline{a_1}) - \alpha(a_2 \overline{a_4} + a_4 \overline{a_2}),$$

где $x = a_1 + v a_2, y = a_3 + v a_4, a_i \in A$. Пусть $f(x, y) = 0$ для произвольного $y \in (A, \alpha)$. Полагая $y = a_3 \in A$, мы получим $a_1 \overline{a_3} + a_3 \overline{a_1} = 0$ для всех $a_3 \in A$, откуда, ввиду строгой невырожденности формы $n(a) = a\overline{a}$, следует $a_1 = 0$. Так как $\alpha \neq 0$, то аналогично мы получаем $a_2 = 0$, откуда $x = 0$. Значит, квадратичная форма $n(x) = x\overline{x}$ строго невырождена. Лемма доказана.

Пусть теперь A — композиционная алгебра с квадратичной формой $n(a)$. По лемме 2.1.2 в A существует инволюция $a \to \overline{a}$ такая, что $n(a) = a\overline{a}, t(a) = a + \overline{a} \in F$ для произвольного $a \in A$. Значит, мы можем применить к A процесс Кэли—Диксона. Найдем условия, при которых получающая алгебра (A, α) с квадратичной формой $n(x)$ также является композиционной.

Лемма 2.2.2. Если A — композиционная алгебра, то алгебра (A, α) является композиционной тогда и только тогда, когда алгебра A ассоциативна.

Доказательство. Выше показано, что алгебра (A, α) обладает единицей. Кроме того, по лемме 2.2.1 квадратичная форма $n(x) = x\overline{x}$ строго невырождена на (A, α). Значит, алгебра (A, α) является композиционной тогда и только тогда, когда форма $n(x)$ допускает композицию. Заметим, что если $x = a_1 + va_2$, то $n(x) = n(a_1) - \alpha n(a_2)$. Пусть $y = a_3 + va_4$, тогда мы имеем

$$n(xy) - n(x)n(y) = n(a_1a_3 + \alpha a_4\overline{a_2}) - \alpha n(\overline{a_1}a_4 + a_3a_2) - (n(a_1) - \alpha n(a_2))(n(a_3) - \alpha n(a_4)) =$$

$$= n(a_1a_3) + \alpha^2 n(a_4\overline{a_2}) + \alpha f(a_1a_3, a_4\overline{a_2}) - \alpha n(\overline{a_1}a_4) -$$

$$\alpha n(a_3a_2) - \alpha f(\overline{a_1}a_4, a_3a_2) - n(a_1)n(a_3) + \alpha n(a_1)n(a_4) + \alpha n(a_2)n(a_3) - \alpha^2 n(a_2)n(a_4).$$

Так как $n(ab) = n(a)n(b)$ и $n(\overline{a}) = n(a)$ для любых $a, b \in A$, то мы получаем

$$n(xy) - n(x)n(y) = \alpha f(a_1a_3, a_4\overline{a_2}) - \alpha f(\overline{a_1}a_4, a_3a_2).$$

Ввиду (2.3) мы имеем

$$f(a_1a_3, a_4\overline{a_2}) = f(a_1a_3 \cdot 1, a_4\overline{a_2}) =$$

$$-f((a_1a_3)\overline{a_2}, a_4) + f(a_1a_3, a_4)f(1, \overline{a_2}) = f((a_1a_3)(f(1, \overline{a_2}) - \overline{a_2}), a_4) = f((a_1a_3)a_2, a_4)$$

и аналогично

$$f(\overline{a_1}a_4, a_3a_2) = f(a_4, a_1(a_3a_2)).$$

Следовательно,

$$n(xy) - n(x)n(y) = \alpha f((a_1a_3)a_2 - a_1(a_3a_2), a_4).$$

Так как $\alpha \neq 0$ и билинейная форма f невырождена, отсюда следует, что квадратичная форма $n(x)$ допускает композицию тогда и только тогда. когда алгебра A ассоциативна. Лемма доказана.

Мы можем теперь привести следующие примеры композиционных алгебр:

I. F — поле характеристики отличной от 2, $n(\alpha) = \alpha^2$ для всех $\alpha \in F$.

Упражнение. Доказать, что в случае характеристики 2 поле F не является композиционной алгеброй.

II. $\mathbf{K}(\mu) = F + Fv_1$, где $v_1^2 = v_1 + \mu, 4\mu + 1 \neq 0$; поле F произвольно; инволюция: $\overline{\alpha + \beta v_1} = (\alpha + \beta) - \beta v_1$; квадратичная форма $n(a) = a\overline{a}$. Если многочлен $x^2 - x - \mu$ неприводим в $F[x]$, то алгебра $\mathbf{K}(\mu)$ является полем; в противном случае, $\mathbf{K}(\mu) = F \oplus F$.

Упражнение. Если характеристика поля $\neq 2$, то показать, что $\mathbf{K}(\mu) = (F, \alpha)$.

III. $\mathbf{Q}(\mu, \beta) = (\mathbf{K}(\mu), \beta), \beta \neq 0,$ — алгебра обобщенных кватернионов.

Упражнение. Показать, что $\mathbf{Q}(\mu, \beta)$ — ассоциативна, но не коммутативна.

IV. $\mathbf{C}(\mu, \beta, \gamma) = (\mathbf{Q}(\mu, \beta), \gamma), \gamma \neq 0,$ — алгебра Кэли—Диксона.

Упражнение. Показать, что $\mathbf{C}(\mu, \beta, \gamma)$ — альтернативна, но не ассоциативна.

В силу того, что алгебра $\mathbf{C}(\mu, \beta, \gamma)$ является неассоциативной, поэтому, используя лемму 2.2.2 мы не можем продолжать наш процесс построения композиционных алгебр.

Основным результатом данной части служит следующая теорема.

Теорема 2.2.1. Пусть A — композиционная алгебра. Тогда A — изоморфна одной из приведенных выше алгебр типов $I - IV$.

Упражнение. Доказать, что в алгебре Кэли—Диксона $\mathbf{C}(\mu, \beta, \gamma)$ над полем F характеристики отличной от 2 можно выбрать базис $e_0 = 1$ — единица алгебры $\mathbf{C}(\mu, \beta, \gamma)$:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	α	e_3	αe_2	e_5	αe_4	$-e_7$	$-\alpha e_6$
e_2	$-e_3$	β	$-\beta e_1$	e_6	e_7	βe_4	βe_5
e_3	$-\alpha e_2$	βe_1	$-\alpha\beta$	e_7	αe_6	$-\beta e_5$	$-\alpha\beta e_4$
e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	γ	$-\gamma e_1$	$-\gamma e_2$	$-\gamma e_3$
e_5	$-\alpha e_4$	$-e_7$	$-\alpha e_6$	γe_1	$-\alpha\gamma$	γe_3	$\alpha\gamma e_2$
e_6	e_7	$-\beta e_4$	βe_5	γe_2	$-\gamma e_3$	$-\beta\gamma$	$-\beta\gamma e_1$
e_7	αe_6	$-\beta e_5$	$\alpha\beta e_4$	γe_3	$-\alpha\gamma e_2$	$\beta\gamma e_1$	$\alpha\beta\gamma$

где $\alpha = \frac{4\mu+1}{4} \neq 0$. Если $\alpha = \beta = \gamma = -1$ и F — поле вещественных чисел, то мы получим классическую алгебру Кэли.

Упражнение. Рассмотрим алгебру A с умножением xy. На вектором пространстве алгебры A введем новое умножение $[x, y]$, полагая, что $[x, y] = xy - yx$. Полученную алгебру будем обозначать $A^{(-)}$. Показать, что алгебра $\mathbf{C}(\mu, \beta, \gamma)^{(-)}$ является алгеброй Мальцева, т.е. антикоммутативная алгебра, которая для $J(x, y, z) = (xy)z + (yz)x + (zx)y$ удовлетворяет тождеству

$$J(x, y, xz) = J(x, y, z)x.$$

2.3 Основные примеры йордановых алгебр.

Напомним, что алгебра называется йордановой, если она удовлетворяет тождествам

$$xy = yx, (x^2 y)x = x^2(yx).$$

Йорданова алгебра, ассоциированная с ассоциативной алгеброй. Пусть A — ассоциативная алгебра. Определим на аддитивном Ф-модуле алгебры A новую операцию умножения $\odot$, связанную со старым умножением формулой

$$a \odot b = \frac{1}{2}(ab + ba).$$

После замены старого умножения на новое получается новая алгебра, которая обозначается через $A^{(+)}$.

Упражнение. Показать, что алгебра $A^{(+)}$ — йорданова.

Если J — подмодуль алгебры A, замкнутый относительно операции $a \odot b$, то J вместе с этой операцией является подалгеброй в $A^{(+)}$ и, следовательно, йордановой алгеброй. Такая йорданова алгебра J называется специальной. Подалгебра A_0 в A, порожденная множеством J, называется обертывающей для J. Неспециальные йордановы алгебры называются исключительными.

Упражнение. Показать, что алгебра $A^{(+)}$ — йорданова, где A — альтернативная алгебра. Показать, что алгебра $A^{(+)}$ — специальна.

Йорданова алгебра симметрической билинейной формы. Пусть V — векторное пространство над полем F с заданной на нем симметрической билинейной формой $f = f(x, y)$. Рассмотрим прямую сумму $B = F \cdot 1 + V$ векторного пространства V и одномерного векторного пространства $F \cdot 1$ с базисом 1 и зададим на B умножение следующим правилом:

$$(\alpha \cdot 1 + x)(\beta \cdot 1 + y) = (\alpha\beta + f(x, y)) \cdot 1 + (\beta x + \alpha y),$$

где $\alpha, \beta \in F, x, y \in V$. Полученная алгебра обозначается $J(V, f)$ и называется йордановой алгеброй симметрической билинейной формы f.

Упражнение. Показать, что алгебра $J(V, f)$ — йорданова.

Йорданова алгебра симметрических элементов. Пусть U — некоторая (не обязательно ассоциативная алгебра и * — ее инволюция. Множества $H(U,^*) = \{u \in U | u = u^*\}$ симметрических относительно * переменных замкнуто относительно операции

$$a \odot b = \frac{1}{2}(ab + ba)$$

и является подалгеброй алгебры $U^{(+)}$.

Упражнение. Показать, что если U — ассоциативна, то $H(U,^*)$ — йорданова.

2.4 Йорданова алгебра Алберта.

Йорданова алгебра $H(C_3)$. Пусть D — композиционная алгебра с инволюцией $d \to \overline{d}$ и D_n — алгебра матриц n-го порядка над D. Отображение $S : X \to \overline{X^T}$, где $\overline{X^T}$ — матрица, получаемая из X путем транспонирования и применением инволюции к каждому компоненту, является инволюцией алгебры D_n. Если D — ассоциативна, то $H(D_n, S)$ — специальная йорданова алгебра. Если же D — алгебра Кэли-Диксона, то алгебра $H(D_n, S)$ — йорданова алгебра только при $n \leqslant 3$.

Итак, пусть C — алгебра Кэли-Диксона над полем F. Через e_{ij} мы будем обозначать матрицу из C_3, у которой на пересечении i-ой строки и j-го столбца стоит 1, а остальные элементы — нули. Элементы e_{ij} и e_{kl} перемножаются по правилу

$e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$, где δ_{jk} — символ Кронекера. Очевидно, что элемент $\sum\limits_{i=1}^{3} e_{ii}$ — единица алгебры C_3, который мы будем обозначать через 1. Отображение

$$c \to \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

алгебры C в C_3 есть мономорфизм. Диагональную матрицу, в которую переходит элемент c, будем обозначать через c. Тогда матрицу $X = (x_{ij})$ можно записать в виде $X = \sum x_{ij}e_{ij}$. Легко проверить, что

$$(ae_{ij})(be_{kl}) = \delta_{jk}(ab)e_{il}.$$

Пусть A — произвольная алгебра и $a, b, c \in A$. Тогда элемент

$$(a, b, c) = (ab)c - a(bc)$$

называется ассоциатором элементов a, b, c.

Упражнение. Пусть A — произвольная алгебра и $a, b, c \in A$. Тогда, если $(a, b, c)^+$ — ассоциатор элементов a, b, c в алгебре $A^{(+)}$, то

$$4(a, b, c)^+ = (a, b, c) - (c, b, a) + (b, a, c) - (c, a, b) + (a, c, b) - (b, c, a) + [b, [a, c]] \quad (2.10)$$

Лемма 2.4.1. В произвольной альтернативной алгебре A справедливо тождество

$$[(a, b, c), d] = (ab, c, d) + (bc, a, d) + (ca, b, d). \qquad (2.11)$$

Доказательство. Напомним, что альтернативные алгебры удовлетворяют следующим тождествам

$$(x, x, y) = 0, (x, y, y) = 0.$$

Линеаризуя данные тождества, мы, соответственно, получаем

$$(x, z, y) + (z, x, y) = 0, (x, y, z) + (x, z, y) = 0.$$

Из чего следует, что в альтернативной алгебре ассоциатор является кососимметрической функцией своих аргументов. В частности, во всякой альтернативной алгебре справедливо тождество эластичности:

$$(x, y, x) = 0.$$

В силу тождеств эластичности и левой альтернартивности имеем

$$(x^2y)x = (x(xy))x = x(xyx) = x^2(yx), \text{ то есть } (x^2, y, x) = 0.$$

Откуда легко получаем

$$xy^3 = (xy^2)y - (x, y^2, y) = (xy^2)y = ((xy)y)y.$$

Ввиду следствия 1.4.1 многообразие альтернативных алгебр однородно, поэтому по предложению 1.4.1 в алгебре A верно тождество

$$0 = \{xy^3 - ((xy)y)y\}\Delta_y^1(z) = x(yzy) + x(y^2 \circ z) - ((xy)z)y - (xy^2)z - (xz)y^2 =$$

$$x(yzy) - ((xy)z)y - (x, y^2, z) - (x, z, y^2) = x(yzy) - ((xy)z)y.$$

Полученное тождество

$$x(yzy) - ((xy)z)y = 0$$

называется правым тождеством Муфанг.

Аналогично доказывается левое тождество Муфанг

$$(yzy)x = y(z(yx)).$$

Теперь легко заметим, что выполняется следующая цепочка соотношений

$$(xy)(zx) - x(yz)x = -(xy, z, x) + (x, y, z)x = (z, xy, x) + (z, x, y)x =$$

$$(z(xy))x - z(xyx) + ((zx)y)x - (z(xy))x = 0.$$

Полученное тождество

$$(xy)(zx) = x(yz)x$$

называется центральным тождеством Муфанг. Линеаризовав его, мы получим

$$(ca)(bd) + (da)(bc) = (c(ab))d + (d(ab))c.$$

Теперь имеем

$$d(a, b, c) = d((ab)c) - d(a(bc)) = -(d, ab, c) + (d(ab))c - d(a(bc)) =$$

$$-(d, ab, c) + (d(ab))c + (d, a, bc) - (da)(bc) =$$

$$-(ab, c, d) - (bc, a, d) - (c(ab))d + (ca)(bd) =$$

$$-(ab, c, d) - (bc, a, d) + (c, a, b)d - ((ca)b)d + (ca)(bd) =$$

$$-(ab, c, d) - (bc, a, d) + (c, a, b)d - (ca, b, d),$$

что и требовалось доказать.

Упражнение. Показать, что произвольная альтернативная алгебра является некоммутативной йордановой алгеброй.

Рассмотрим алгебру $H(C_3)$. Тогда призвольный элемент из $H(C_3)$ имеет следующий вид

$$\begin{pmatrix} \alpha & a & b \\ \overline{a} & \beta & c \\ \overline{b} & \overline{c} & \gamma \end{pmatrix}, \text{ где } \alpha, \beta, \gamma \in F, a, b, c \in C.$$

Лемма 2.4.2. Пусть $A = (a_{ij}) \in H(C_3)$. Тогда

$$[A^2, A] = 2a, \text{ где } a = (a_{12}, a_{23}, a_{31}).$$

Доказательство. Легко проверить, что для произвольных $a, b, c \in C$ в алгебре C_3 выполняется соотношение

$$(ae_{ij}, be_{kl}, ce_{pq}) = (a, b, c)e_{ij}e_{kl}e_{pq}. \tag{2.12}$$

Согласно этому и правилу перемножения матричных единиц, мы имеем

$$[A^2, A] = (A, A, A) = \sum (a_{ij}, a_{jk}, a_{kl})e_{il},$$

если $i = j, j = k$ или $k = l$, то $(a_{ij}, a_{jk}, a_{kl}) = 0$, в силу того, что один из элементов ассоциатора лежит в F. Если $i = k$, то

$$a_{jk} = \overline{a_{ij}} \text{ и } (a_{ij}, \overline{a_{ij}}, a_{kl}) = -(a_{ij}, a_{ij}, a_{kl}) = 0.$$

Аналогично, если $j = l$, то $(a_{ij}, a_{jk}, a_{kl}) = 0$. Проанализировав все вышеизложенное, мы приходим к выводу, что ассоциатор (a_{ij}, a_{jk}, a_{kl}) может быть ненулевым только в случае i, j, k — все различны и $i = l$. Следовательно,

$$[A^2, A] = \sum_{i,j,k,\neq} (a_{ij}, a_{jk}, a_{ki})e_{ii}.$$

Отметим, что

$$(a_{ij}, a_{jk}, a_{ki}) = (a_{jk}, a_{ki}, a_{ij}),$$
$$(a_{ik}, a_{kj}, a_{ji}) = (\overline{a_{ki}}, \overline{a_{jk}}, \overline{a_{ij}}) = -(a_{ki}, a_{jk}, a_{ij}) = (a_{ij}, a_{jk}, a_{ki}).$$

Следовательно,

$$(a_{ij}, a_{jk}, a_{ki}) = (a_{12}, a_{23}, a_{31}) = a \text{ и } [A^2, A] = 2a(\sum e_{ii}) = 2a.$$

Лемма доказана.

Упражнение. Показать, что для элементов алгебры Кэли-Диксона C верны следующие соотношениями

$$(a, b, c) = -(\overline{a}, b, c) = -(a, \overline{b}, c) = -(a, b, \overline{c}) \tag{2.13}$$

$$\overline{(a, b, c)} = -(a, b, c). \tag{2.14}$$

Теорема 2.4.1. [K. McCrimmon] $H(C_3)$ — йорданова алгебра.

Доказательство. В силу того, что коммутативность алгебры $H(C_3)$ очевидна, то проверим

$$(A^2 \odot B) \odot A = A^2 \odot (B \odot A), \text{ где } A, B \in H(C_3).$$

Это эквивалентно тому, что $(A, B, C)^+ = 0$ при $C = A^2$. Достаточно показать, что коэффициенты при e_{11} и e_{12} у элемента $(A, B, C)^+ = 0$ являются нулями; те же доказательства с заменой индексов будут годиться и для других коэффициентов.

Согласно (2.10), (2.11), (2.12) и лемме 2.4.2 коэффициент при e_{11} у элемента $(A, B, C)^+$ — есть сумма ассоциаторов и согласно (2.14) является кососимметричным. С другой стороны, коэффициент при e_{11} должен быть симметричен, в силу того, что $(A, B, C)^+ \in H(C_3)$. Следовательно, он равен нулю.

Рассмотрим коэффициент при e_{12}. Ассоциатор $(A, B, C)^+$ линеен по B, то достаточно рассмотреть следующие случаи:

1) $B = b_{ii}e_{ii}$;
2) $B = b_{13}e_{13} + b_{31}e_{31}$;
3) $B = b_{23}e_{23} + b_{32}e_{32}$;
4) $B = b_{12}e_{12} + b_{21}e_{21}$.

В первом случае $b_{ii} \in F$ и, следовательно, нужный коэффициент равен нулю.

Второй случай дает, что коэффициент при e_{12} равен

$$\sum_{k,l}(a_{1k}, b_{kl}, c_{l2}) = (a_{11}, b_{13}, c_{32}) + (a_{13}, b_{31}, c_{12}).$$

Аналогично, коэффициенты при e_{12} элементов

$$-(C, B, A), (B, A, C), -(C, A, B), (A, C, B), -(B, C, A)$$

соответственно равны:

$$-(c_{13}, b_{31}, a_{12}), (b_{13}, a_{31}, c_{12}), 0, 0, -(b_{13}, c_{31}, a_{12}).$$

Отметим, что коэффициент при e_{12} элемента $[B, [A, C]] = -2[b_{13}e_{13} + b_{31}e_{31}, a]$ равен нулю. Суммируя полученное, имеем, что коэффициент при e_{12} элемента $4(A, B, C)^+$ равен

$$(a_{13}, b_{31}, c_{12}) - (c_{13}, b_{13}, a_{12}) + (b_{13}, a_{31}, c_{12}) - (b_{13}, c_{31}, a_{12}) =$$

$$(a_{13}, b_{31}, c_{12}) + (\overline{b_{31}}, \overline{a_{13}}, c_{12}) - (c_{13}, b_{31}, a_{12}) - (\overline{b_{31}}, \overline{c_{13}}, a_{12}).$$

Последнее, в силу (2.13) и кососимметричности ассоциатора, равно нулю.

Используя аналогичные аргументы, мы можем рассмотреть третий случай.

Пусть $B = b_{12}e_{12} + b_{21}e_{21}$. Воспользуемся (2.10) и получим, что коэффициент при e_{12} элемента $4(A, B, C)^+$ равен

$$(a_{12}, b_{21}, c_{12}) - (c_{12}, b_{21}, a_{12}) + (b_{12}, a_{21}, c_{12}) + (b_{12}, a_{23}, c_{32}) -$$

$$(c_{12}, a_{21}, b_{12}) - (c_{13}, a_{31}, b_{12}) + (a_{12}, c_{21}, b_{12}) +$$

$$(a_{13}, c_{31}, b_{12}) - (b_{12}, c_{21}, a_{12}) - (b_{12}, c_{23}, a_{32}) - 2[b_{12}, a].$$

В силу (2.13) и кососимметричности ассоциатора его можно записать так

$$-2(c_{32}, a_{23}, b_{12}) - 2(c_{21}, a_{12}, b_{12}) - 2(c_{13}, a_{31}, b_{12}) - 2[b_{12}, (a_{12}, a_{23}, a_{31})].$$

Теперь $c_{ij} = \sum a_{ik}a_{kj}$, поэтому

$$(c_{ij}, a_{ji}, b_{12}) = (a_{ii}a_{ij}, a_{ji}, b_{12}) + (a_{ij}a_{jj}, a_{ji}, b_{12}) + (a_{ik}a_{kj}, a_{ji}, b_{12}),$$

где i, j, k — различные. Так как $a_{ii} \in F$, то согласно (2.13)

$$(a_{ii}a_{ij}, a_{ji}, b_{12}) = a_{ii}(a_{ij}, a_{ji}, b_{12}) = a_{ii}(a_{ij}, \overline{a_{ij}}, b_{12}) = 0.$$

Аналогично, $(a_{ij}a_{jj}, a_{ji}, b_{12}) = 0$. Следовательно, коэффициент при e_{12} элемента $4(A, B, C)^+$ равен

$$-2(a_{31}a_{12}, a_{23}, b_{12}) - 2(a_{23}a_{31}, a_{12}, b_{12}) - 2(a_{12}a_{23}, a_{31}, b_{12}) - 2[b_{12}, (a_{12}, a_{23}, a_{31})].$$

Однако это выражение равно нулю в силу леммы 2.4.1. Теорема доказана.

Глава 3

Специальные и исключительные йордановы алгебры

3.1 Специальные и исключительные йордановы алгебры

Если J — подмодуль алгебры A, замкнутый относительно операции $a \odot b$, то J вместе с этой операцией является подалгеброй в $A^{(+)}$ и, следовательно, йордановой алгеброй. Такая йорданова алгебра J называется специальной. Подалгебра A_0 в A, порожденная множеством J, называется обертывающей для J. Неспециальные йордановы алгебры называются исключительными.

3.2 Теорема Алберта

Теорема 3.2.1. $H(C_3)$ — исключительная алгебра.

Доказательство. Допустим, что существует ассоциативная алгебра A такая, что $H(C_3)$ является подалгеброй алгебры $A^{(+)}$. Умножение в алгебре C будем обозначать точкой $\cdot$, умножение в алгебре $H(C_3)$ — кружком с точкой внутри $\odot$; умножая элементы в алгебре A мы между ними ничего не будем ставить.

Пусть $X, Y \in H(C_3)$. Тогда $X \odot Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$. Это соотношение связывает умножение в A с умножением в C. Используя его, най Введем новые обозначения для элементов алгебры $H(C_3)$:

$$x_{ii} = xe_{ii}, x \in F,$$

$$x_{ij} = xe_{ij} + \overline{x}e_{ji}, x \in C, i \neq j,$$

$$\epsilon_{ii} = e_{ii}, \epsilon_{ij} = e_{ij} + e_{ji}, i \neq j.$$

Отыщем в алгебре A нужные соотношения:

$$\epsilon_{ii}^2 = \epsilon_{ii}, \epsilon_{ij}^2 = \epsilon_{ii} + \epsilon_{jj}, \tag{3.1}$$

$$\epsilon_{ii}x_{ij} + x_{ij}\epsilon_{ii} = \epsilon_{jj}x_{ij} + x_{ij}\epsilon_{jj} = x_{ij}, \tag{3.2}$$

$$\epsilon_{kk}x_{ij} + x_{ij}\epsilon_{kk} = 0, k \neq i, j, \tag{3.3}$$

$$x_{12}y_{23} + y_{23}x_{12} = (x \cdot y)_{13}. \tag{3.4}$$

Первые три соотношения очевидны. Покажем последнее соотношение. Имеем

$$x_{12}y_{23}+y_{23}x_{12} = 2x_{12}\odot y_{23} = 2\begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ \overline{x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y \\ 0 & \overline{y} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \cdot y \\ 0 & 0 & y \\ \overline{x \cdot y} & 0 & 0 \end{pmatrix} = (x \cdot y)_{13}.$$

Аналогично получаем соотношения

$$x_{12}y_{13} + y_{13}x_{12} = (\overline{x} \cdot y)_{23}, \tag{3.5}$$

$$x_{13}y_{23} + y_{23}x_{13} = (x \cdot \overline{y})_{12}. \tag{3.6}$$

В силу (3.3) для $k \neq i, j$ имеем

$$0 = \epsilon_{kk}(\epsilon_{kk}x_{ij} + x_{ij}\epsilon_{kk}) = \epsilon_{kk}x_{ij} + \epsilon_{kk}x_{ij}\epsilon_{kk},$$

однако в силу (3.1) и (3.3) получаем

$$2\epsilon_{kk}x_{ij}\epsilon_{kk} = (\epsilon_{kk}x_{ij} + x_{ij}\epsilon_{kk})\epsilon_{kk} + \epsilon_{kk}(\epsilon_{kk}x_{ij} + x_{ij}\epsilon_{kk}) - (\epsilon_{kk}^2 x_{ij} + x_{ij}\epsilon_{kk}^2) = 0,$$

и поэтому

$$\epsilon_{kk}x_{ij} = x_{ij}\epsilon_{kk} = 0, k \neq i, j. \tag{3.7}$$

Отобразим теперь C в A следующим образом:

$$\sigma : x \to \epsilon_{11}x_{12}\epsilon_{12}.$$

Ясно, что это отображение — гомоморфизм векторных пространств. Покажем, что $\sigma(x \cdot y) = \sigma(x)\sigma(y)$. В силу (3.6) и (3.7) имеем

$$\sigma(x \cdot y) = \epsilon_{11}(x \cdot y)_{12}\epsilon_{12} = \epsilon_{11}(x_{13}\overline{y}_{23} + \overline{y}_{23}x_{13})\epsilon_{12} = \epsilon_{11}x_{13}\overline{y}_{23}\epsilon_{12}.$$

Преобразуем полученное выражение с помощью (3.3) и (3.7):

$$\epsilon_{11}x_{13}\overline{y}_{23}\epsilon_{12} = \epsilon_{11}(x_{12}\epsilon_{23} + \epsilon_{23}x_{12})\overline{y}_{23}\epsilon_{12} = \epsilon_{11}x_{12}\epsilon_{23}\overline{y}_{23}\epsilon_{12},$$

а затем с помощью (3.5):

$$\epsilon_{11}x_{12}\epsilon_{23}\overline{y}_{23}\epsilon_{12} = \epsilon_{11}x_{12}\epsilon_{23}(y_{12}\epsilon_{13} + \epsilon_{13}y_{12})\epsilon_{12} = \epsilon_{11}x_{12}\epsilon_{23}\epsilon_{13}y_{12}\epsilon_{12},$$

так как в силу (3.2) и (3.7)

$$y_{12}\epsilon_{13}\epsilon_{12} = y_{12}(\epsilon_{33}\epsilon_{13} + \epsilon_{13}\epsilon_{33})\epsilon_{12} = 0.$$

Отметим, что

$$\epsilon_{23}\epsilon_{13}y_{12} = \epsilon_{23}(\epsilon_{13}\epsilon_{11} + \epsilon_{11}\epsilon_{13})y_{12} = \epsilon_{23}\epsilon_{13}\epsilon_{11}y_{12} = (\epsilon_{12} - \epsilon_{13}\epsilon_{23})\epsilon_{11}y_{12} = \epsilon_{12}\epsilon_{11}y_{12}.$$

Итак,

$$\sigma(x \cdot y) = \epsilon_{11}x_{12}\epsilon_{12}\epsilon_{11}y_{12}\epsilon_{12} = \sigma(x)\sigma(y),$$

что доказывает гомоморфность введенного отображения. Однако, по лемме 2.3.1, алгебра Кэли—Диксона проста, поэтому наш гоморфизм есть либо изоморфизм, либо отображает алгебру C в нуль. Последнее неверно: в силу (3.1) и (3.7) верно

$$\sigma(1) = \epsilon_{11}\epsilon_{12}\epsilon_{12} = \epsilon_{11}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) = \epsilon_{11} \neq 0.$$

Мы получили противоречие, так как алгебра C неассоциативна и ее нельзя изоморфно отобразить в ассоциативную алгебру. Теорема доказана.

3.3 Свободные специальные алгебры

Рассмотрим свободную ассоциативную алгебру $Ass[X]$ от множества свободных порождающих $X = \{x_\alpha\}$. Подалгебру алгебры $Ass[X]^{(+)}$, порожденную множеством X, назовем свободной специальной йордановой алгеброй от множества свободных порождающих X и обозначим $SJ[X]$.

Предложение 3.3.1. Пусть J — специальная йорданова алгебра. Тогда всякое отображение X в J единственным образом продолжается до гомоморфизма $SJ[X]$ в J.

Доказательства. Пусть $\sigma : X \to J$ — некоторое отображение и A — ассоциативная обертывающая алгебра для J. Тогда отображение σ продолжается до гомоморфизма $\overline{\sigma} : Ass[X] \to A$. Ясно теперь, что ограничение $\overline{\sigma}$ на $SJ[X]$ есть гомоморфизм $SJ[X]$ в J, продолжающий σ. Предложение доказано.

Элемент свободной ассоциативной алгебры $Ass[X]$ называется йордановым многочленом (j-многочленом), если он принадлежит $SJ[X]$, т.е. выражается через элементы множества X при помощи операций $+$ и $\odot$.

Упражнение. Показать, что для любых элементов a, b, c ассоциативной алгебры верно

$$\frac{1}{2}(abc + cba) = (a \odot b) \odot c + (b \odot c) \odot a - (c \odot a) \odot b. \tag{3.8}$$

Например, многочлены $x_1x_2x_1$ и $x_1x_2x_3 + x_3x_2x_1$ являются j-многочленами в силу упражнения выше.

Свяжем со свободной ассоциативной алгеброй $Ass[X]$ еще одну йорданову алгебру. Для этого определим на $Ass[X]$ инволюцию *, которая на одночленах задается правилом

$$(x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k})^* = x_{i_k}\dots x_{i_2}x_{i_1}$$

и на многочлены распространим по линейности: если $f = \sum \alpha_s u_s$, где $\alpha_s \in \Phi$, u_s — одночлены, то $f^* = \sum \alpha_s u_s^*$. Через $H[X]$ обозначим йорданову алгебру $H(Ass[X], *)$ симметричных элементов алгебры $Ass[X]$ относительно *.

Теорема 3.3.1. [Cohn] Для любого множества X справедливо включение $H[X] \supseteq SJ[X]$, причем при $|X| > 3$ — строгое включение.

Доказательство. Порождающие $x_\alpha \in X$ симметричны относительно * и лежат в $H[X]$. Кроме того, если $a, b \in H[X]$, то $a \odot b \in H[X]$, так как

$$(a \odot b)^* = \frac{1}{2}[(ab)^* + (ba)^*] = \frac{1}{2}(b^*a^* + a^*b^*) = \frac{1}{2}(ab + ba) = a \odot b.$$

Поэтому $H[X] \supseteq SJ[X]$.

Пусть $|X| = 3$, т.е. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. Для доказательства того, что $H[X] = SJ[X]$, достаточно показать, что элементы из $H[X]$ вида $u + u^*$, где u — одночлен, являются j-многочленами. В самом деле, если $f = \sum u_i$ симметричен относительно *, то

$$f = \frac{1}{2}(f + f^*) = \frac{1}{2}\sum(u_i + u_i^*).$$

Пусть $u = x_{i_1}^{l_1} x_{i_2}^{l_2} \ldots x_{i_h}^{l_h}$, причем $i_r \neq i_{r+1}$ для $r = 1, 2, \ldots, h-1$. Число h назовем высотой одночлена u.

Доказательство того, что $u + u^* \in SJ[X]$, мы проведем двойной индукцией. Первая индукция – по длине одночлена u, основание очевидно. Пусть для одночленов длины $< k$ утверждение доказано. Рассмотрим множество одночленов длины k. Среди них всего три одночлена высоты 1 — это x_1^k, x_2^k, x_3^k. Для них наше утверждение очевидно, и мы имеем основание для второй индукции. Предположим, что для всех одночленов длины k и высоты $< h$ утверждение справедливо. Допустим, что одночлен u имеет длину k и высоту h. Рассмотрим сначала случай, когда одночлен u начинается и кончается на один и тот же порождающий элемент, а именно $u = a^p v a^q$, где $a \in \{x_1, x_2, x_3\}$, v — одночлен. В этом случае

$$u + u^* = a^p v a^q + a^q v^* a^p = a^p(va^q + a^q v^*) + (a^q v^* + va^q)a^p - (a^{p+q}v^* + va^{p+q}).$$

Заметим, что сумма первых двух слагаемых является j-многочленом в силу первого индуктивного предположения, а последнее — в силу второго, так как одночлен $a^{p+q}v^*$ имеет высоту $h - 1$.

Второй случай, который надо рассмотреть, — следующий: $u = a^p b^r a^q v$, где $a, b \in \{x_1, x_2, x_3\}, a \neq b$ и v — одночлен. Имеем

$$u + u^* = a^p b^r a^q v + v^* a^q b^r a^p = a^p b^r (a^q v + v^* a^q) + (v^* a^q + a^q v) b^r a^p - (a^p b^r v^* a^q + a^q v b^r a^p),$$

и сумма первых двух слагаемых есть йорданов многочлен ввиду упражнения, а в последней скобке имеем первый случай.

Третий случай: $u = a^p v a^q b^r$, где $a, b \in \{x_1, x_2, x_3\}$, $a \neq b$ и v — одночлен. В этом случае

$$u + u^* = a^p v a^q b^r + b^r a^q v^* a^p =$$

$$a^p(va^q + a^q v^*)b^r + b^r(a^q v^* + va^q)a^p - (a^{p+q}v^* b^r + b^r va^{p+q}).$$

Ввиду упражнения и первого индуктивного предположения сумма первых двух членов есть j-многочлен, а вычитаемая скобка находится в условиях второго индуктивного предположения.

Четвертый случай. Осталось рассмореть для одночлена u лишь две возможности: $u = a^p b^r c^s$ и $u = a^p c^q b^t v a^l c^r b^s$, для v — одночлен, возможно, отсутствующий, $a, b, c \in \{x_1, x_2, x_3\}$ и попарно различны. Если $u = a^p b^r c^s$, то в силу упражнения

$$u + u^* = a^p b^r c^s + c^s b^r a^p \in SJ[X].$$

Пусть теперь $u = a^p c^q b^t v a^l c^r b^s$. Тогда

$$u + u^* = a^p c^q b^t v a^l c^r b^s + b^s c^r a^l v^* b^t c^q a^p =$$

$$a^p(c^q b^t v a^l c^r + c^r a^l v^* b^t c^q) b^s + b^s(c^r a^l v^* b^t c^q + c^q b^t v a^l c^r) a^p - (a^p c^r a^l v^* b^t c^q b^s + b^s c^q b^t v a^l c^r a^p).$$

Сумма первых двух членов является j-многочленом ввиду упражнения и первого индуктивного предположения, а третий член — также j-многочлен солгласно уже разобранному второму случаю.

Итак, равенство $H[X] = SJ[X]$ в случае, когда $|X| = 3$, доказано. Отсюда, конечно, следует справедливость этого равенства и при $|X| = 2$. Доказательство, приведенное нами принадлежит А. И. Ширшову. Оно конструктивно и дает алгоритм, позволяющий по записи симметричного многочлена от трех переменных найти его представление в виде j-многочлена.

Докажем, что $H[X] \neq SJ[X]$ при $|X| > 3$. Для этого достаточно показать, что элемент

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 x_3 x_4 + x_4 x_3 x_2 x_1$$

не является йордановым многочленом от x_1, x_2, x_3, x_4.

Рассмотрим алгебру E от порождающих e_1, e_2, e_3, e_4 с определяющими соотношениями $e_i \odot e_j = 0$. Алгебра E — гомоморфный образ свободной ассоциативной алгебры $Ass[\{e_1, e_2, e_3, e_4\}]$ по идеалу порожденному элементами $e_i e_j + e_j e_i$, $i, j = 1, ..., 4$. Тогда элементы

$$e_i,\ e_i e_j,\ e_i e_j e_k,\ e_i e_j e_k e_l,\ i < j < k < l, i, j, k, l = 1, 2, 3, 4$$

являются базисом алгебры E. Пусть $\sigma : Ass[X] \to E$ — гомоморфизм такой, что $\sigma(x_i) = e_i, i = 1, 2, 3, 4$, и $\sigma(x_i) = 0, i > 4$. Все йордановы многочлены при этом гомоморфизме переходят в нуль, однако

$$\sigma(f(x_1, x_2, x_3, x_4)) = 2e_1 e_2 e_3 e_4 \neq 0.$$

Значит, $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ не является йордановым многочленом, и теорема полностью доказана.

Теорема 3.3.2. Если $|X| > 1$, то свободная йорданова алгебра $SJ[X]$ не изоморфна алгебре $A^{(+)}$ ни для какой ассоциативной алгебры A.

Доказательство. Допустим, что $SJ[X]$ изоморфна алгебре $A^{(+)}$, где A — ассоциативная алгебра. Мы можем тогда считать, что на множестве $SJ[X]$ задана дистрибутивная со сложением ассоциативная операция (обозначаемая точкой) такая, что для любых $a, b \in SJ[X]$ выполняется

$$a \odot b = \frac{1}{2}(a \cdot b + b \cdot a) \tag{3.9}$$

и что $A = \langle SJ[X], +, \cdot \rangle$. В силу (3.9) множество X есть множество порождающих и для A. Пусть $\sigma : Ass[X] \to A$ — гоморфизм такой, что $\sigma(x_\alpha) = x_\alpha$ для всех $x_\alpha \in X$. Рассмотрим ядро I этого гомоморфизма. В силу (3.9) ограничение σ на $SJ[X]$ является тождественным отображением. Поэтому

$$I \cap SJ[X] = (0).$$

Кроме того, для любого $f(x) \in Ass[X]$ найдется $j(x) \in SJ[X]$ такой, что $f(x) - j(x) \in I$. В частности, это верно для многочлена $f(x) = x_1x_2$. Но тогда в силу (3.8) верно

$$[x_1x_2 - j(x)][x_2x_1 - j(x)] = x_1x_2^2x_1 - (x_1x_2j(x) + j(x)x_2x_1) + j(x)^2 \in I \cap SJ[X].$$

Значит, в силу (3.9) выполнено

$$[x_1x_2 - j(x)][x_2x_1 - j(x)] = 0,$$

и получаем, что либо $j(x) = x_2x_1$ либо $j(x) = x_1x_2$. Но ни того, ни другого быть не может. Теорема доказана.

3.4 Гомоморфные образы свободных специальных йордановых алгебр.

Упражнение. Пусть B — подалгебра алгебры A, I — двухсторонний идеал алгебры A. Тогда $B + I$ — подалгебра алгебры A, $B \cap I$ — двусторонний идеал алгебры B, причем имеется изоморфизм фактор-алгебр

$$B/(B \cap I) \to (B + I)/I; b + B \cap I \to b + I(b \in B).$$

Упражнение. Доказать, что для любого идеала B ассоциативной алгебры A верен следующий изоморфизм

$$(A/B)^{(+)} \approxeq A^{(+)}/B^{(+)}.$$

Лемма 3.4.1. Пусть I — идеал специальной йордановой алгебры J с ассоциативной обертывающей алгеброй A и $\hat{I}$ — идеал алгебры A, порожденный множеством I, причем $\hat{I} \cap J = I$. Тогда фактор-алгебра J/I — специальна.

Доказательство. Следуя упражнениям, предшествующим лемме, мы получаем

$$J/(J \cap \hat{I}^{(+)}) \approxeq (J + \hat{I}^{(+)})/\hat{I}^{(+)} \text{ и } (A/\hat{I})^{(+)} \approxeq A^{(+)}/\hat{I}^{(+)}$$

Из полученного легко вытекает

$$J/I = J/(J \cap \hat{I}^{(+)}) \approxeq (J + \hat{I}^{(+)})/\hat{I}^{(+)} \subseteq A^{(+)}/\hat{I}^{(+)} \approxeq (A/\hat{I})^{(+)}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.4.2. [Cohn] Пусть I — идеал свободной йордановой алгебры $SJ[X]$ и $\hat{I}$ — идеал в $Ass[X]$, порожденный множеством I. Фактор-алгебра $SJ[X]/I$ специальна тогда и только тогда, когда $\hat{I} \cap SJ[X] = I$.

Доказательство. Если условие $\hat{I} \cap SJ[X] = I$ выполнимо, то фактор-алгебра $SJ[X]/I$ специальна в силу леммы 3.4.1.

Допустим теперь, что фактор-алгебра $SJ[X]/I$ специальна и A — ее ассоциативная обертывающая алгебра. Обозначим через τ канонический гомоморфизм алгебры $SJ[X]$ на $SJ[X]/I$. Алгебра A порождается элементами $a_\alpha = \tau(x_\alpha)$, где $x_\alpha \in X$. Пусть σ — гомоморфизм алгебры $Ass[X]$ на A такой, что $\sigma(x_\alpha) = a_\alpha$. Тогда ограничение σ на $SJ[X]$ есть гомоморфизм $SJ[X]$ в $SJ[X]/I$, совпадающий с τ на порождающих и, следовательно, равный τ. Но тогда $Ker(\sigma) \cap SJ[X] = Ker(\tau)$. Заметим теперь, что $\hat{I} \subseteq Ker(\sigma)$ и $Ker(\tau) = I$. Следовательно,

$$\hat{I} \cap SJ[X] \subseteq Ker(\sigma) \cap SJ[X] = Ker(\tau) = I$$

и, ввиду очевидности обратного включения, имеем $\hat{I} \cap SJ[X] = I$. Теорема доказана.

Теорема 3.4.1. [Cohn] Пусть $SJ[x, y, z]$ — свободная специальная йорданова алгебра от порождающих x, y, z и I – ее идеал, порожденный элементом $k = x^2 - y^2$. Тогда фактор-алгебра $SJ[x, y, z]/I$ исключительна.

Доказательство. Элемент $v = kxyz + zyxk$ лежит в $\hat{I} \cap SJ[x, y, z]$, где $\hat{I}$ — идеал алгебры $Ass[x, y, z]$, порожденный множеством I. Покажем, что $v \notin I$, и все будет доказано в силу леммы 3.4.2. Допустим, что $v \in I$. Тогда существует йорданов многочлен $j(x, y, z, t)$, каждый одночлен которого содержит t такой, что $v = j(x, y, z, k)$. Ясно, что мы можем считать, что все одночлены в $j(x, y, z, t)$ имеют степень 4 и линейны по z. Сравнивая степени элементов v и $j(x, y, z, x^2 - y^2)$ по отдельным переменным, заключаем, что $j(x, y, z, t)$ линеен по t и, следовательно, по остальным переменным тоже. Многочлен $j(x, y, z, t)$ симметричен и лежит в $H[x, y, z, t]$. Поэтому он является линейной комбинацией 24 четверок вида

$$\{xyzt\} = xyzt + tzyx$$

по всем перестановкам элементов x, y, z, t. Однако вид элемента v говорит о том, что в этой линейной комбинации ненулевые коэффициенты могут быть лишь у тех четверок, на конце (или в начале) которых находятся z:

$$j(x, y, z, t) =$$

$$\alpha_1\{txyz\} + \alpha_2\{xtyz\} + \alpha_3\{tyxz\} + \alpha_4\{ytxz\} + \alpha_5\{xytz\} + \alpha_6\{yxtz\}.$$

Заменяя в в этом равенстве t на $x^2 - y^2$, получаем соотношение

$$\{x^3yz\} - \{y^2xyz\} =$$

$$\alpha_1\{x^3yz\} - \alpha_1\{y^2xyz\} + \alpha_2\{x^3yz\} - \alpha_2\{xy^3z\} + \alpha_3\{x^2yxz\} - \alpha_3\{y^3xz\}+$$
$$\alpha_4\{yx^3z\} - \alpha_4\{y^3xz\} + \alpha_5\{xyx^2z\} - \alpha_5\{xy^3z\} + \alpha_6\{yx^3z\} - \alpha\{yxy^2z\}.$$

Сравнивая коэффициенты при $\{y^2xyz\}$, заключаем, что $\alpha_1 = 1$. Затем сравним коэффициенты при $\{x^3yz\}$ и получим $\alpha_2 = 0$. Сравнение коэффициентов при $\{x^2yxz\}$ дает нам $\alpha_3 = 0$. Отсюда следует, что $\alpha_4 = 0$, как коэффициент при $\{y^3xz\}$. Далее, сравнивая коэффициенты при $\{xyx^2z\}$ и $\{yxy^2z\}$, получаем, что $\alpha_5 = \alpha_6 = 0$. Но это значит, что

$$j(x, y, z, t) = \{xyzt\}.$$

Однако, как мы видели в доказательстве теоремы 3.3.1, многочлен $\{xyzt\}$ не является йордановым многочленом. Теорема доказана.

Теорема 3.4.2. Все гомоморфные образы свободной специальной йордановой алгебры $SJ[x, y]$ от двух порождающих специальны.

Доказательство. Пусть I — произвольный идеал алгебры $SJ[x, y]$ и $\hat{I}$ — идеал $Ass[x, y]$, порожденный множеством $\hat{I}$. В силу леммы 3.4.2 достаточно показать, что $\hat{I} \cap SJ[x, y] = I$. Пусть $u \in \hat{I}$. Тогда $u = \sum v_i k_i w_i$, где $k_i \in I$, v_i и w_i — одночлены. Допустим, что $u \in SJ[x, y]$. Для доказательства того, что $u \in I$ достаточно показать справедливость включения

$$vkw + w^*kv^* \in I$$

для всех $k \in I$ и любых одночленов v, w. Но это включение действительно справедливо, так как по теореме 3.3.1

$$vzw + w^*zv^*$$

— йорданов многочлен от x, y, z. Теорема доказана.

Лемма 3.4.3. В свободной ассоциативной алгебре $Ass[x, y]$ элемент принадлежит подалгебре $\langle Z\rangle$, порожденной множеством $Z = \{z_i = xy^ix; i = 1, 2, \ldots\}$, тогда и только тогда, когда он является линейной комбинацией одночленов вида

$$xy^{j_1}x^2y^{j_2}x^2 \ldots x^2y^{j_n}x, j_k \geq 1. \tag{3.10}$$

Эта подалгебра является свободной ассоциативной алгеброй с множеством Z свободных порождающих.

Доказательство. Первое утверждение леммы очевидно. Для доказательства второго утверждения рассмотрим гомоморфизм

$$\phi : Ass[x_1, \ldots, x_n, \ldots] \to \langle Z\rangle,$$

переводящий x_i в z_i. Легко видеть, что ϕ — изоморфизм, так как $f(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0$ влечет $f = 0$. Будем обозначать теперь алгебру $\langle Z\rangle$ через $Ass[Z]$.

Лемма 3.4.4. Пусть I — идеал алгебры $Ass[Z]$ и $\widetilde{I}$ — идеал в $Ass[x,y]$, порожденный множеством I. Тогда $\widetilde{I} \cap Ass[Z] = I$.

Доказательство. Всякий элемент $u \in \widetilde{I}$ представим в виде

$$u = \sum_i v_i k_i w_i, \tag{3.11}$$

где $k_i \in I, v_i, w_i$ — одночлены. Если $u \in Ass[Z]$, то u есть линейная комбинация одночленов вида (3.10). Аналогично представляются и элементы k_i. Заметим, что если u и vkw — одночлены указанного вида, то и одночлены v, w имеют тот же вид. Поэтому, если $u \in Ass[Z]$, то в правой части равенства (3.11) все слагаемые $v_i k_i w_i$, у которых либо v_i, либо w_i не лежит в $Ass[Z]$, должны взаимно сократиться. Но в этом случае $u \in I$. Лемма доказана.

Теорема 3.4.3. [Ширшов] Всякая специальная йорданова алгебра, имеющая не более счетного числа порождающих, вложима в специальную йорданову алгебру с двумя порождающими.

Доказательство. Пусть J — специальная алгебра, имеющая не более счетного числа порождающих. Тогда J — изоморфна некоторой фактор-алгебре $SJ[Z]/I$ алгебры $SJ[Z]$. Отметим, что в силу леммы 3.4.2 для идеала $\hat{I}$ алгебры $Ass[Z]$, порожденного множеством I, верно соотношение

$$\hat{I} \cap SJ[Z] = I.$$

Рассмотрим теперь идеал $\widetilde{\hat{I}}$ алгебры $Ass[x,y]$, порожденный множеством $\hat{I}$. Ввиду леммы 3.4.4 верно

$$\widetilde{\hat{I}} \cap Ass[Z] = \hat{I},$$

откуда

$$SJ[Z] \cap \widetilde{\hat{I}} = SJ[Z] \cap (Ass[Z] \cap \widetilde{\hat{I}}) = SJ[Z] \cap \hat{I} = I.$$

Образ алгебры $SJ[Z]$ в фактор-алгебре $\overline{A} = Ass[x,y]/\widetilde{\hat{I}}$ — это подалгебра $SJ[Z]/(SJ[Z] \cap \widetilde{\hat{I}}) = SJ[Z]/I$, изоморфная J. Так как

$$xy^i x = 2(y^i \odot x) \odot x - y^i \odot x^2,$$

эта подалгебра лежит в подалгебре алгебры $\overline{A^{(+)}}$, порожденной элементами $\overline{x} = x + I$ и $\overline{y} = y + I$. Теорема доказана.

3.5 Теорема Ширшова

В предыдущих параграфах мы установили, что аналог теоремы Пуанкаре — Биркгофа — Витта для йордановых алгебр несправедлив и не каждая йорданова алгебра имеет ассоциативную обертывающую алгебру. Мы видели, что исключительными могут быть даже йордановы алгебры, порожденные тремя элементами. Для

2-порожденных йордановых алгебр ситуация в корне отлична: в 1956 г. Ширшов показал, что всякая йорданова алгебра от двух порождающих является специальной.

Пусть A — произвольная алгебра. Для всякого элемента $a \in A$ определим два отображения алгебры A в себя: $R_a : x \to xa, L_a : x \to ax$. Эти отображения являются эндоморфизмами Ф-модуля A. Первый эндоморфизм называется оператором правого умножения на элемент a, второй оператором левого умножения на элемент a. Подалгебра алгебры эндоморфизмов Ф-модуля A, порожденная всевозможными операторами $R_a, L_a, a \in A$, называется алгеброй умножений алгебры A и обозначается $M(A)$. Подалгебра алгебры $M(A)$, порожденная множеством всех правых (левых) умножений, называется алгеброй правых (левых) умножений и обозначается $R(A)$ $(L(A))$. Если алгебра A является коммутативной или антикоммутативной, то $M(A) = R(A) = L(A)$. Пусть A — подалгебра алгебры B. Подалгебру, порожденную в $R(B)$ операторами $R_a, a \in A$, будем обозначать $R^B(A)$. Аналогично определим $M^B(A), L^B(A)$.

Рассмотрим алгебры умножений йордановых алгебр. Тождества, которыми удовлетворяют йордановы алгебры, влекут ряд соотношений для операторов умножений. Так, основное йорданово тождество в силу коммутативности эквивалентно тождеству $(yx)x^2 = (yx^2)x$, которое в свою очередь эквивалентно операторному соотношению

$$[R_x, R_{x^2}] = 0.$$

Проведем полную линеаризацию тождества $(x^2y)x = x^2(yx)$. Переобозначив неизвестные и воспользовавшись коммутативностью, получим тождеством

$$((xy)z)t + ((xt)z)y + x((yt)z) = (xy)(zt) + (xz)(yt) + (xt)(yz). \tag{3.12}$$

Заметим теперь, что в правую часть этого равенства все переменные входят симметрично, поэтому левая часть не должна измениться от переменны x и z местами. Учитывая это обстоятельство, мы получаем еще тождества

$$((xy)z)t + ((xt)z)y + x((yt)z) = (x(yz))t + (x(yt))z + (x(zt))y, \tag{3.13}$$

$$(x(yz))t + (x(yt))z + (x(zt))y = (xy)(zt) + (xz)(yt) + (xt)(yz). \tag{3.14}$$

Полученные тождества эквиваленты следующим операторным соотношениям:

$$R_yR_zR_t + R_tR_zR_y + R_{(yt)z} = R_yR_{zt} + R_zR_{yt} + R_tR_{yz}, \tag{3.15}$$

$$R_yR_zR_t + R_tR_zR_y + R_{(yt)z} = R_{yz}R_t + R_{yt}R_z + R_{zt}R_y, \tag{3.16}$$

$$[R_{yz}, R_t] + [R_{yt}, R_z] + [R_{zt}, R_y] = 0. \tag{3.17}$$

Положим, что $D_{x,y}$ — линейное отображение йордановой алгебры A, заданное условием $D_{x,y}(z) = (x, z, y)$. Тогда, в силу (3.13) мы можем заключить, что выполняется

$$D_{x,z}(y)t + yD_{x,z}(t) = (x, y, z)t + y(x, t, z) = (x, yt, z) = D_{x,z}(yt),$$

то есть отображение $D_{x,y}$ является дифференцированием йордановой алгебры.

Лемма 3.5.1. Если подалгебра A йордановой алгебры B порождается множеством A_0, то алгебра $R^B(A)$ порождается множеством операторов $\{R_a, R_{ab} | a, b \in A_0\}$.

Доказательство. Очевидно, что алгебра $R^B(A)$ порождается операторами вида $R_{\overline{v}}$, где $v = v(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторый неассоциативный одночлен и $\overline{v} = v(a_1, \ldots, a_n), a_i \in A_0$. Достаточно показать, что для любого одночлена v оператор $R_{\overline{v}}$ лежит в подалгебре A_0^*, порожденной множеством

$$\{R_a, R_{ab} | a, b \in A_0\}.$$

Проведем индукцию по степени одночлена v. Если $d(v) \leq 2$, то очевидно, $R_{\overline{v}} \in A_0^*$. Если же $d(v) \geq 3$, то $v = (v_1 v_2) v_3$, где v_i — одночлены меньшей длины. В силу (3.15),

$$R_{\overline{v}} = -R_{\overline{v_1}} R_{\overline{v_3}} R_{\overline{v_2}} - R_{\overline{v_2}} R_{\overline{v_3}} R_{\overline{v_1}} + R_{\overline{v_1}} R_{\overline{v_2} \cdot \overline{v_3}} + R_{\overline{v_2}} R_{\overline{v_1} \cdot \overline{v_3}} + R_{\overline{v_3}} R_{\overline{v_1} \cdot \overline{v_2}}.$$

По предположению индукции $R_{\overline{v_i}}, R_{\overline{v_i} \cdot \overline{v_j}} \in A_0^*$, поэтому и $R_{\overline{v}} \in A_0^*$. Лемма доказана.

Подалгебра A йордановой алгебры B называется сильно ассоциативной, если для любых элементов $a, a' \in A, b \in B$ имеет место равенство $(a, b, a') = 0$. В силу соотношения $(a, b, a') = b[R_a, R_{a'}]$ условие сильной ассоциативности подалгебры A в алгебре B эквивалентно коммутативности алгебры $R^B(A)$.

Теорема 3.5.1. Всякая однопорожденная подалгебра йордановой алгебры является сильно ассоциативной.

Доказательство. Пусть подалгебра A йордановой алгебры B порождена элементом a. Тогда алгебра $R^B(A)$ порождается элементами R_a, R_{a^2}, которые коммутируют в силу операторного аналога йорданова тождества. Следовательно, алгебра $R^B(A)$ коммутативна. Теорема доказана.

Лемма 3.5.2. Всякая йорданова алгебра является алгеброй с ассоциативными степенями.

Доказательство. Следует из теоремы 3.5.1.

Из теоремы 3.5.1 следует также, что во всякой йордановой алгебре справедливо тождество

$$(x^n y) x^m = x^n (y x^m). \tag{3.18}$$

Наряду с обычным умножением определим во всякой йордановой алгебре тройное йорданово произведение:

$$\{xyz\} = (xy)z + (zy)x - (xz)y.$$

Если йорданова алгебра A специальна и вложена в алгебру $P^{(+)}$ для некоторой ассоциативной алгебры P, то, как нетрудно проверить, для любых $a, b, c \in A$ выполняется

$$\{abc\} = \frac{1}{2}(abc + cba),$$

где через xy мы обозначаем ассоциативное умножение элементов x и y в алгебре A. В частности, тройное йорданово произведение $\{aba\}$ в $P^{(+)}$ равно ассоциативному произведению aba.

Определим теперь для любых элементов a, b йордановой алгебры A отображение $U_{a,b} : x \to \{axb\}$ и положим $U_a = U_{a,a}$. Ясно, что $U_{a,b}$ и U_a являются элементами алгебры $R(A)$ правых умножений:

$$U_{a,b} = R_aR_b + R_bR_a - R_{ab}, U_a = 2R_a^2 - R_{a^2}. \tag{3.19}$$

Иногда мы будем писать также $U(a, b)$ и $U(a)$.

Лемма 3.5.3. Пусть A — сильно ассоциативная подалгебра йордановой алгебры B. Тогда для любых $a, a' \in A$ и $b \in B$ справедливы соотношения

$$U_aU_{a',b} = 2R_aU_{aa',b} - U_{a^2a',b},$$

$$U_{a',b}U_a = 2U_{aa',b}R_a - U_{a^2a',b}.$$

Доказательство. Заметим сначала, что для любых $x, y \in B$ выполненно

$$U_{x^2,y} = 2U_{x,y}R_x - R_yU_x = 2R_xU_{x,y} - U_xR_y. \tag{3.20}$$

Для доказательства этого соотношения надо расписать операторы $U_x, U_{x,y}, U_{x^2,y}$ по формулам (3.19, 3.19) и воспользовавшись тождествами (3.15-3.17).

Линеаризуя равенства (3.20) по x, получаем

$$U_{xz,y} = U_{x,y}R_z + U_{z,y}R_x - R_yU_{x,z} = R_zU_{x,y} + R_xU_{z,y} - U_{x,z}R_y. \tag{3.21}$$

Заменим теперь во втором из равенств (3.21) x на x^2. Полученное соотношение

$$U_{x^2z,y} = R_zU_{x^2,y} + R_{x^2}U_{z,y} - U_{x^2,z}R_y.$$

В силу (3.20) и по определению оператора U_x это соотношение можно преобразовать следующим образом:

$$U_{x^2z,y} = 2R_zR_xU_{x,y} - R_zU_xR_y + (2R_x^2 - U_x)U_{z,y} - 2U_{x,z}R_xR_y + R_zU_xR_y =$$

$$2[R_z, R_x]U_{x,y} + 2R_xR_zU_{x,y} + 2R_x^2U_{z,y} - U_xU_{z,y} + 2[R_x, RU_{x,z}]R_y - 2R_xU_{x,z}R_y.$$

Следовательно, по (3.21)

$$U_{x^2z,y} = 2[R_z, R_x]U_{x,y} + 2R_xU_{xz,y} + 2[R_x, U_{x,z}]R_y - U_xU_{z,y}.$$

Полагая здесь $x = a, z = a', y = b$, и пользуясь тем, что алгебра $R^B(A)$ — коммутативна (т.е. $[R'_a, R_a] = [R_a, U_{a,a'}] = 0$), мы получим первое искомое соотношение. Аналогично мы получаем и второе искомое соотношение. Лемма доказана.

Лемма 3.5.4. Во всякой йордановой алгебре справедливы тождествам

$$\{x^k\{x^nyx^n\}z\} = 2\{x^{n+k}(yx^n)z\} - \{x^{2n+k}yz\},$$

$$\{xty\}z + \{zty\}x = \{(xz)ty\} + \{x(ty)z\},$$
$$\{xtz\}y + \{(xz)ty\} = \{x(tz)y\} + \{z(tx)y\},$$
$$\{x^n y x^n\}x^k = \{x^n y x^{n+k}\}.$$

Доказательство. Справедливость тождества первого тождества следует из первого тождества леммы 3.5.3 в силу теоремы 3.5.1. Операторные соотношения (3.21) дают нам второе и третье тождества. Для доказательства последнего тождества положим в первом тождестве $z = 1$, предварительно формально присоединив, если необходим, к йордановой алгебре единицу 1. Получим в силу (3.18)

$$\{x^n y x^n\}x^k = 2x^{n+k}(yx^n) - x^{2n+k}y = \{x^n y x^{n+k}\}.$$

Лемма доказана.

Теорема Ширшова. Всякая йорданова алгебра от двух порождающих специальна.

В силу объемности доказательства и обилия технических выкладок, доказательство данной теоремы мы опускаем. Полный текст доказательства доступен в [2, стр. 84–100].

Следствие (Ширшова — Макдональда). Если неассоциативный многочлен $f(x_1, x_2, x_3)$ спепени ≤ 1 по x_3 является тождеством во всех специальных йордановых алгебрах, то $f(x_1, x_2, x_3)$ — тождество во всех йордановых алгебрах.

Отсюда получаем два полезных тождества

$$\{xyx\}^2 = \{x\{yx^2y\}x\}, \text{ в операторной форме } (yU_x)^2 = x^2 U_y U_x \tag{3.22}$$

$$\{\{xyx\}z\{xyx\}\} = \{x\{y\{xzx\}y\}x\}, \text{ в операторной форме } zU_{(xU_y)} = zU_x U_y U_x \tag{3.23}$$

Последнее тождество носит название тождества Макдональда.

Определение. Неассоциативный многочлен $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ от n переменных называется $s-$тождеством, если $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ является тождеством во всех специальных йордановых алгебрах, но не является тождеством во всех йордановых алгебрах.

Упражнение Доказать, что следующие элементы йордановой алгебры $J[x, y, z]$ являются $s-$тождествами:

$$2\{\{y\{xzx\}y\}z(xy)\} - \{\{y\{x\{z(xy)z\}x\}y\} - 2\{(xy)z\{x\{yzy\}x\}\} + \{\{x\{y\{z(xy)z\}y\}x\},$$

$$2\{xzx\}\{\{y\{zy^2z\}x\} - 2\{yzy\}\{x\{zx^2z\}y\} - \{x\{z\{x\{yzy\}y\}z\}x\} + \{y\{z\{y\{xzx\}x\}z\}y\}.$$

Глава 4

Нильпотентные, разрешимые и ниль-алгебры.

4.1 Основные определения и предварительные результаты

Неассоциативная алгебра A называется нильпотентной, если существует такое натуральное число n, что произведение любых n элементов алгебры A с любой расстановкой скобок равно нулю. Наименьшее такое число называется индексом нильпотентности алгебры A. Алгебра A называется правонильпотентной, если существует натуральное число n такое, что $a_1 R_{a_2} R_{a_3} \ldots R_{a_n} = 0$, и левонильпотентной, если $a_1 L_{a_1} L_{a_2} \ldots L_{a_n} = 0$ для любых элементов $a_1, \ldots, a_n$. Минимальное такое число n называется индексом правонильпотентности или соответственно левонильпотентности алгебры A.

Определим индуктивно в алгебре A ряд подмножеств. Положим $A^1 = A^{\langle 1 \rangle} = A$, $A^n = A^{n-1}A + A^{n-2}A^2 + \ldots + AA^{n-1}$, $A^{\langle n \rangle} = A^{\langle n-1 \rangle}A$. Подмножество A^n называется n-й степенью алгебры A. Цепочка подмножеств

$$\ldots \subseteq A^n \subseteq \ldots \subseteq A^2 \subseteq A^1$$

есть цепочка идеалов алгебры A. Легко видать также, что цепочка

$$\ldots \subseteq A^{\langle n \rangle} \subseteq \ldots \subseteq A^{\langle 2 \rangle} \subseteq A^{\langle 1 \rangle}$$

есть цепочка правых идеалов этой алгебры, а если A коммутативна или антикоммутативна, то эта цепочка состоит из идеалов. Алгебра A нильпотентна, если $A^n = 0$ для некоторого n, и правонильпотентна, если $A^{\langle n \rangle} = 0$.

Говорят, что алгебра локально обладает некоторым свойством, если этим свойством обладают все ее конечнопорожденные подалгебры. Таким образом, вводятся понятие локальной нильпотентности и др.

Лемма 4.1.1. Пусть A — коммутативная (антикоммутативная) алгебра. Тогда $A^{2^n} \subseteq A^{\langle n \rangle}$ для любого $n \geqslant 1$. Другими словами, если алгебра A правонильпотентна индекса n, то она нильпотентна индекса не выше 2^n.

Доказательство. В силу коммутативности (антикоммутативности) алгебры A можно получить

$$A^{2^n} = \sum_{i+j=2^n, i\geqslant j} A^i A^j \subseteq A^{2^{n-1}} A.$$

Тривиальная индукция дает $A^{2^n} \subseteq A^{\langle n\rangle}$, что доказывает лемму.

Упражнение. Пусть A — йорданова алгебра. Доказать, что $A^{2(n-1)} \subseteq A^{\langle n\rangle}$.

Определим еще одну цепочку включений подмножеств в алгебре A. Полагая $A^{(1)} = A^2$ и $A^{(n)} = (A^{(n-1)})^2$. Назовем алгебру A разрешимой, если существует некое натуральное число n, что $A^{(n)} = 0$. Минимальное такое n будем называть индексом разрешимости алгебры A. Отметим, что члены цепочки

$$\ldots \subseteq A^{(n)} \subseteq \ldots \subseteq A^{(2)} \subseteq A^{(1)},$$

начиная с $A^{(2)}$, не являются, вообще говоря, идеалами в A.

Пусть $J = J[X]$ — свободная йорданова алгебры от счетного множества $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ свободных порождающих. Степень одночлена $u \in J$ будем обозначать через $d(u)$. Всякое отображение вида $w = R_{a_1} R_{a_2} \ldots R_{a_n}$, где все a_i являются одночленами алгебры J, будем называть словом в алгебре правых умножений $R(J)$. Число n назовем длиной слова w, а число $\sum_{i=1}^{n} d(a_i)$ — его степенью. Последовательность $(l_1, \ldots, l_n, \ldots)$, где l_i — суммарная степень одночленов $a_1, \ldots, a_n$ по x_i, назовем составом слова w.

Допустим, что множество всех одночленов алгебры J некоторым образом упорядочено. В этом случае слова вида

$$R_{b_1} R_{c_1} R_{b_2} R_{c_2} \ldots R_{b_n} \widehat{R_{c_1}},$$

где $\widehat{R_{c_1}}$ может присутствовать или отсутствовать и

$$b_1 < b_2 < \ldots < b_n, c_1 < c_2 < \ldots < c_n,$$

назовем нормальными.

Упражнение. Показать, что всякое слово $w \in R(J)$ представимо в виде линейной комбинации нормальных слов того же состава, что и w.

Пусть $J_n = J[x_1, \ldots, x_n]$ — свободная йорданова алгебра от порождающих $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Она естественным образом вкладывается в свободную йорданову алгебру J от счетного множества порождающих $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$. Мы можем считать, что J_n является подалгеброй J.

Лемма 4.1.2. Для всякого натурального числа $k \geqslant 1$ существует такое число $h(n, k)$, что любое слово $w \in R^J(J_n)$ степени $h(n, k)$ представляется в виде линейной комбинации слов того же состава, каждое из которых содержит оператор правого умножения на одночлен степени $\geq k$.

Доказательство. Положим по определению

$$h(n,k) = 1 + 2\sum_{j=1}^{k-1} jP_{n,j},$$

где $P_{n,j}$ — число различных одночленов из J_n степени j. Докажем, что число $h(n,k)$ удовлетворяет условиям леммы. Пусть $w \in R^J(J_n)$ имеет степень $h(n,k)$. Упорядочим одночлены из J так, чтобы одночлены большей степени были больше, и представим w в виде линейной комбинации нормальных слов: $w = \sum \alpha_l w_l$. Покажем, что всякое нормальное слово w_l в этом разложении содержит оператор умножения на одночлен степени $\geq k$. Предположим противное: пусть

$$w_l = R_{b_1}R_{c_1}R_{b_2}R_{c_2}\ldots R_{b_m}\widehat{R_{c_m}}$$

и степени всех одночленов b_i и c_i строго меньшt k. Ввиду того, что $b_1 < b_2 < \ldots < b_m$, все одночлены b_i различны. Поэтому

$$m \leqslant \sum_{j=1}^{k-1} P_{n,j},$$

и суммарная степень одночленов b_i не превосходит числа $\sum\limits_{j=1}^{k-1} jP_{n,j}$. Аналогичные рассуждения справедливы и для одночленов c_i. Следовательно, степень слова w_l не превосходит числа $2\sum\limits_{j=1}^{k-1} jP_{n,j}$. Но это число строго меньше $h(n,k)$. Противоречие доказывает лемму.

Теорема 4.1.1. Пусть B — йорданова алгебра и A — ее локально нильпотентная подалгебра. Тогда алгебра $R^B(A)$ локально нильпотентна.

Доказательство. Пусть $\{w_1,\ldots,w_k\}$ — произвольное конечное подмножество в $R^B(A)$. В запись $w_1, w_2, \ldots, w_k$ входит лишь конечное число операторов $R_{a_1},\ldots,R_{a_n}, a_i \in A$. Достаточно показать, что эти операторы порождают нильпотентную подалгебру. Рассмотрим подалгебру $A_0 \subseteq A$, порожденную элементами $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Она нильпотентна некоторого индекса N. Покажем, что любое произведение $h = h(n,N)$ операторов множества $\{R_{a_1}, R_{a_2}, \ldots, R_{a_n}\}$ равно нулю. Пусть $R_{a_{i_1}}R_{a_{i_2}}\ldots R_{a_{i_h}}$ — такое произведение. Рассмотрим слово $w = R_{x_{i_1}}R_{x_{i_2}}\ldots R_{x_{i_h}}$ из $R^J(J_n)$. В силу леммы 4.1.2 слово w представляется в виде линейной комбинации слов, каждое из которых содержит оператор правого умножения на одночлен степени $\geq N$:

$$w = \sum \alpha_j w'_j R_{u_j(x_1,\ldots,x_n)} w''_j, d(u_j) \geq N.$$

В частности, действие правой и левой части равенства на элемент x_{n+1} одинаково:

$$x_{n+1}w = x_{n+1}\sum \alpha_j w'_j R_{u_j(x_1,\ldots,x_n)} w''_j.$$

Это равенство выполняется в свободной йордановой алгебре J. Оно сохраняется, если вместо порождающих $x_1, x_2, \dots x_n$ подставить элементы $a_1, a_2, \dots, a_n$, а вместо x_{n+1} — произвольный элемент $b \in B$. Ввиду

$$bR_{a_{i_1}} R_{a_{i_2}} \dots R_{a_{i_n}} = 0,$$

т.е. $R_{a_{i_1}} R_{a_{i_2}} \dots R_{a_{i_n}} = 0$ в алгебре $R(B)$. Теорема доказана.

4.2 Теорема Жевлакова

Для некоторых целей в йордановое алгебре A вместо цепочки подмножеств $A^{(i)}$ удобно рассматривать цепочку

$$\dots \subseteq A^{[n]} \subseteq \dots \subseteq A^{[2]} \subseteq A^{[1]} \subseteq A,$$

где $A^{[1]} = A^3, A^{[n+1]} = (A^{[n]})^3$. Эта цепочка является в йордановой алгебре A цепочкой идеалов , так как справедливо следующее утверждение

Лемма 4.2.1. Пусть B и C — идеалы йордановой алгебры A. Тогда $(BC)C + BC^2$ — также идеал в A. В частности, если I — идеал, то I^3 — также идеал.

Доказательство. Пусть $b \in B, c, d \in C, a \in A$. Тогда по тождеству (3.13)

$$((bc)d)a = -((ba)d)c - b((ac)d) + (bc)(ad) + (bd)(ac) + (ba)(cd) \in (BC)C + BC^2,$$

и, далее, в силу (3.14)

$$(b(cd))a = -(b(ac))d - (b(ad))c + (bc)(ad) + (bd)(ac) + (ba)(cd) \in (BC)C + BC^2.$$

Мы видим, что $(BC)C + BC^2$ — идеал в A, и лемма доказана.

Лемма 4.2.2. В произвольной алгебре A справедливы включения

$$A^{(2i)} \subseteq A^{[i]} \subseteq A^{(i)},$$

так что кубическая разрешимость эквивалентна обычной разрешимости. В йордановой алгебре A всякий ненулевой разрешимый идеал I содержит ненулевой нильпотентный идеал алгебры A.

Доказательство. Первое утверждение леммы доказывается очевидной индукцией. Допустим теперь, что в йордановой алгебре A имеется разрешимый идеал I. Если n — индекс его разрешимости, то в силу первого утверждения леммы $I^{[n]} = 0$. Однако в цепочке

$$0 = I^{[n]} \subseteq \dots \subseteq I^{[1]} \subseteq I$$

Все члены являются идеалами и для некоторого члена Q этой цепочки $Q^3 = 0$, но $Q \neq 0$. Лемма доказана.

Лемма 4.2.3. Для любых двух натуральных числе m и n существует число $f(n,m)$ такое, что для всякой йордановой алгебры A с n порождающими

$$A^{f(n,m)} \subseteq A^{[m]}.$$

Доказательство. Достаточно доказать лемму в случае, когда $A = J_n$ — свободная йорданова алгебра с n порождающими; это же число $f(n,m)$ будет годиться и в общем случае. Ввиду того, что $A^3 = A^{[1]}$, имеем $f(n,1) = 3$, что дает нам основание для индукции по m.

Допустим, что число $f(n,m-1)$ найдено. Пусть $M = \sum\limits_{j=1}^{f(n,m-1)} P_j$ есть число различных одночленов степени $\leqslant f(n,m-1)$ в J_n и h — функция из леммы 4.1.2. Докажем, что в качестве $f(n,m)$ можно взять число 2^N, где

$$N = f(n,m-1) + (M+2)h(n, f(n,m-1)).$$

В силу леммы 4.1.1 нам достаточно доказать, что $A^{\langle N \rangle} \subseteq A^{[m]}$. Рассмотрим произвольный элемент из $A^{\langle N \rangle}$, он является суммой одночленов вида aw, где $a \in A$ и w — слово из $R(A)$ длины $N-1$. Разобьем слово w на подслова:

$$w = w_0 w_1 \dots w_{M+2}$$

так, чтобы длина слова w_0 была равна $f(n,m-1)-1$, а длины остальных равнялись числу $h(n, f(n,m-1))$. Применяя к словам $w_1, w_2, \dots, w_{M+2}$ лемму 4.1.2, можем считать, что слово $w_1 w_2 \dots w_{M+2}$ содержит $M+2$ оператора $R_{u_1}, R_{u_2}, \dots, R_{u_{M+2}}$, где $d(u_i) \geq f(n,m-1)$ и, следовательно, $u_i \in A^{[m-1]}$. Заметим, что $u_0 = aw \in A^{[m-1]}$, так как $d(aw_0) = f(n,m-1)$. Нам предстоит теперь доказать, что всякий одночлен вида

$$b = u_0 w_0' R_{u_1} w_1' R_{u_2} \dots w_{M+1}' R_{u_{M+2}} w_{M+2}'$$

лежит в $A^{[m]}$, где $w_s' = R_{a_{s1}} R_{a_{s2}} \dots R_{a_{sk_s}}, a_{ij} \in A$, причем без ограничения общности можем считать, что $a_{ij} \notin A^{[m-1]}$ и, в частности, $d(a_{ij}) < f(n,m-1)$.

Покажем, что все w_s', где $s = 1, 2, \dots, M+1$, можно считать либо пустыми, либо состоящими из одного оператора. Действительно, если $w_1' = w_1'' R_{a1} R_{a2}$, то согласно (3.16) подслово $R_{a_1} R_{a_2} R_{u_2}$ можно заменить на сумммy

$$-R_{u_2} R_{a_2} R_{a_1} - R_{(a_1 u_2) a_2} + R_{a_1 a_2} R_{u_2} + R_{a_1 u_2} R_{a_2} + R_{a_2 u_2} R_{a_1},$$

в результате чего слово $w_0' R_{u_1} w_1' R_{u_2} \dots R_{u_{M+2}} w_{M+2}'$ представится в виде линейной комбинации слов такого же вида, но с меньшей длиной подслова, стоящего между первым и вторым операторами вида R_u, где $u \in A^{[m-1]}$. Последовательное применение таких преобразований позволяет сократить длину этого подслова до нужной величины. Те же операции проделаем со словами $w_2', \dots, w_{M+1}'$.

Рассмотрим случай, когда одно слово из $w_1', \dots, w_{M+1}'$ является пустым, например, w_s'. Тогда, так как $A^{[m-1]}$ и $A^{[m]}$ — идеалы в A, имеем

$$b = u_0 w_0' R_{u_1} w_1' \dots w_{s-1}' R_{u_s} R_{u_{s+1}} \dots \in (A^{[m-1]})^3 = A^{[m]}.$$

Осталось рассмотреть случай, когда слова $w'_1, w'_2, \dots, w'_{M+1}$ состоят из одного оператора: $w'_i = R_{a_i}, i = 1, 2, \dots, M+1$, и $d(a_i) < f(n, m-1)$. Имеем

$$b = u_0 w'_0 R_{u_1} R_{a_1} \dots R_{u_{M+1}} R_{a_{M+1}} R_{u_{M+2}} w'_{M+2}.$$

Преобразуем b по тождеству (3.15). Тогда в силу доказанного выше получим

$$b = u_0 w'_0 \dots R_{u_i} R_{a_i} R_{u_{i+1}} R_{a_{i+1}} R_{u_{i+2}} \dots w'_{M+2} =$$

$$-u_0 w'_0 \dots R_{u_i} R_{a_{i+1}} R_{u_{i+1}} R_{a_i} R_{u_{i+2}} \dots w'_{M+2} + b',$$

где $b' \in A^{[m]}$. Значит, перемена мест операторов R_{a_i} и $R_{a_{i+1}}$ с точностью до слагаемых из $A^{[m]}$ меняет знак элемента b. Заметим теперь, что среди одночленов $a_1, a_2, \dots, a_{M+1}$ найдутся два одинаковых. Действительно, $d(a_i) < f(n, m-1)$, а M — число различных одночленов из J_n степени $< f(n, m-1)$. Наличие двух одинаковых одночленов влечет теперь, что $2b \in A^{[m]}$, откуда следует, что $b \in A^{[m]}$. На этом доказательство леммы заканчивается.

Теорема Жевлакова. Всякая разрешимая конечнопорожденная йорданова алгебра нильпотентна.

Доказательство. Пусть йорданова алгебра A разрешима индекса m и имеет n порождающих. В силу леммы 4.2.2 имеем $A^{[m]} = 0$, а в силу леммы 4.2.3 отсюда вытекает, что $A^{f(n,m)} = 0$. Теорема доказана.

4.3 Йордановы ниль-алгебры

Определение. Алгебра называется ниль-алгеброй, если каждый элемент ее нильпотентен.

Теорема 4.3.1. Пусть A — йорданова ниль-алгебра над кольцом, содержащим элемент $\frac{1}{2}$. Тогда если A удовлетворяет условию максимальности для подалгебр, то она нильпотентна.

Доказательство. Все однопорожденные подалгебры A нильпотентны, поэтому в силу условия максимальности в A найдется максимальная нильпотентная подалгебра B. Во всяком случае в алгебре с условием максимальности для подалгебр все подалгебры конечнопорождены, следовательно, B конечнопорождена. Более того, так как B нильпотентна, она является конечнопорожденным модулем: $B = \Phi e_1 + \ldots + \Phi e_n$. Отсюда следует, что в алгебре $R(A)$ правых умножений алгебры A подалгебра $R^A(B)$ порождается операторами $R_{e_1}, \dots, R_{e_n}$ и по теореме 4.1.1 является нильпотентной некоторого индекса m.

Допустим, что $aB \subseteq B$. Возьмем произвольный элемент $a_0 \in A \setminus B$. Если он не является искомым, то существует элемент $b_1 \in B$ такой, что $a_1 = a_0 b_1 \notin B$. Если и a_1 не является искомым, то существует $b_2 \in B$ такой, что $a_2 = a_1 b_2 \notin B$ элемент $a_0 R_{b_1} \dots R_{b_m}$ равен нулю и, следовательно, принадлежит B, среди элементов $a_1, \dots, a_{m-1}$ обязательно должен найтись искомый элемент a.

Возможны два случая:

1. $a^2B \subseteq B$. В силу леммы 3.5.1 оператор R_{a^t} для любого $t \geqslant 1$ лежит в подалгебре, порожденной операторами R_a, R_{a^2}, поэтому в этом случае $a^tB \subseteq B$ для любого $t \geqslant 1$. Ввиду нильпотентности элемента a, найдется такое $p \geqslant 1$, что $a^p \notin B$, но $(a^p)^2 \in B$. Обозначим элемент $a^p = s$. Элемент s обладает следующими свойствами:

$$s \notin B, s^2 \in B, sB \subseteq B.$$

2. Существует элемент $c \in B$ такой, что $a^2c \notin B$. В этом случае, мы покажем, что элемент a^2c удовлетворяет свойствам 1 и его можно взять в качестве s. В силу тождеств (3.13) для любого элемента $b \in B$

$$(a^2c)b = -2((ab)c)a + (a(ac))b + (a(ab))c + (a(bc))a \in B. \tag{4.1}$$

Кроме того, (3.13) дает

$$(a^2c)^2 = -2((a(a^2c))c)a + (a(ac))(a^2c) + (a((a^2c)a))c + (a((a^2c)c))a.$$

Второе и четвертое слагаемые правой части этого равенства лежат в B согласно (4.1). Рассмотрим первое. В силу (4.1) верно

$$((a(a^2c))c)a = (((a^2c)a)c)a = ((a^2(ca))c)a \in B.$$

Аналогично имеем

$$(a((a^2c)a))c = (a(a^2(ca)))c = (a^2((ca)a)))c \in B.$$

Итак, $(a^2c)^2 \in B$ и элемент a^2c удовлетворяет свойствам из случая 1. Обозначим его через s. Рассмотрим множество $B_1 = B + \Phi s$. В силу свойств элемента sB_1 — подалгебра алгебры A, строго содержащая B. Ввиду того, что $B_1^2 \subseteq B$, она является разрешимой конечнопорожденной алгеброй. По теореме Жевлакова B_1 нильпотентна, что противоречит максимальности B. Теорема доказана.

Лемма 4.3.1. Всякая конечномерная йорданова ниль-алгебра над полем характеристики отличной от 2 нильпотентна.

Доказательство. Следует из теоремы 4.3.1.

Глава 5

Структурная теория йордановых алгебр

5.1 Квадратичные идеалы

Пусть J — йорданова алгебра. Подмодуль Q в J называется квадратичным идеалом, если $JU_q \subseteq Q$ для всех $q \in Q$. Ясно, что всякий идеал в J является квадратичным идеалом, но, в тоже время, обратное неверно. Если $J = A^{(+)}$ для некоторой ассоциативной алгебры A, то квадратичные идеалы алгебры J — это такие Ф-подмодули Q в A, что $qAq \subseteq Q$ для всех $q \in Q$. В частности, все односторонние идеалы алгебры A являются в $A^{(+)}$ квадратичными идеалами.

Пусть Q — квадратичный идеал в J и $q_1, q_2 \in Q$. Тогда для любого $a \in J$ имеем

$$aU_{q_1,q_2} = \frac{1}{2}(aU_{q_1+q_2} - aU_{q_1} - aU_{q_2}) \in Q.$$

Это значит, что $JU_{q_1,q_2} \subseteq Q$. Если в алгебре есть единица, то Q является подалгеброй, так как $q_1q_2 = \{q_1 1 q_2\} \in Q$. В общем случае это не так. Однако в силу соотношения

$$(q_1q_2)q_3 = \frac{1}{2}\{q_1q_2q_3\} + \frac{1}{2}\{q_2q_1q_3\}$$

можно утверждать, что $Q^3 \subseteq Q$.

Пусть Q — квадратичный идеал алгебры J и $a \in J$. Тогда в силу тождества Макдональда (3.23) для любого $q \in Q$ выполняется

$$JU_{(qU_a)} = JU_aU_qU_a \subseteq QU_a.$$

Это значит, что множество QU_a является квадратичным идеалом. В частности, JU_a является главным квадратичным идеалом, порожденным элементом a. В силу линеаризованного тождества (3.22) имеем

$$\{axa\}\{aya\} = \{a\{xa^2y\}a\}.$$

Отсюда можно заключить, что главный квадратичный идеал всегда является подалгеброй.

Определение. Элемент z йордановой алгебры J называется абсолютным делителем нуля, если $JU_z = 0$.

Заметим, что если z — абсолютный делитель нуля в J, то подмодуль $\Phi \cdot z$ является квадратичным идеалом.

Лемма 5.1.1. Пусть Q — ненулевой квадратичный идеал йордановой алгебры J, $a \in Q$ и $QU_a = Q$. Тогда Q содержит идемпотент.

Доказательство. Пусть $c \in Q$ такой, что $cU_a = a$. Тогда в силу тождества (3.22) мы имеем

$$a^2 = (cU_a)^2 = a^2U_cU_a \in Q.$$

Обозначим для $q \in Q$ через $\overline{U}_q$ ограничение оператора U_q на Q. Тогда в силу тождества Макдональда (3.23) $U_a = U_aU_cU_a$, откуда следует, что $\overline{U}_c\overline{U}_a = E$. Поэтому для $f = a^2U_c$ имеем

$$f^3 = fU_f = a^2U_cU_cU_aU_aU_c = a^2U_c = f.$$

Но тогда $f^4 = f^2$, и мы имеем две возможности:

1) f^2 — идемпотент,

2) $f^2 = 0$.

Во втором случае $f = f^3 = 0$, откуда $0 = U_f = U_cU_aU_aU_c$, что дает нам $\overline{U}_a\overline{U}_c = 0$. Но тогда $(\overline{U}_c\overline{U}_a)^2 = 0$. Это противоречие показывает, что второй случай невозможен. Лемма доказана.

5.2 Полупростые йордановы алгебры с условием минимальности

Лемма 5.2.1. Пусть Q — квадратичный идеал йордановой алгебры J с условием минимальности для квадратичных идеалов. Тогда либо каждый элемент в Q нильпотентен, либо Q содержит идемпотент.

Доказательство. Пусть x — ненильпотентный элемент в Q. Рассмотрим цепочку квадратичных идеалов

$$QU_x \supseteq QU_{x^2} \supseteq \ldots \supseteq QU_{x^n} \supseteq \ldots$$

В силу условия минимальности $QU_{x^k} = QU_{x^{k+1}} = \ldots$ для некоторого числа k. Квадратичный идеал QU_{x^k} отличен от нуля, так как $x^{2k+1} = xU_{x^k} \in QU_{x^k}$ и, кроме того,

$$QU_{x^k}U_{x^{2k+1}} = QU_{x^{3k+1}} = QU_{x^k}.$$

По лемме 5.1.1 в квадратичном идеале QU_{x^k} имеется идемпотент. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь йорданову алгебру J с идемпотентом e. Присоединим, если необходимо, к алгебре J формальную единицу 1. Тогда элементы e и $1-e$ удовлетворяют соотношениям

$$e + (1-e) = 1, e(1-e) = 0. \tag{5.1}$$

Поэтому $U_e + 2U_{e,1-e} + U_{1-e} = U_{e+(1-e)} = E$ — тождественное отображение алгебры $J^\#$ и для любого элемента $x \in J$ верно

$$x = xU_e + 2xU_{e,1-e} + xU_{1-e}. \tag{5.2}$$

Введем обозначения:

$$x_1 = xU_e, x_{1/2} = 2xU_{e,1-e}, x_0 = xU_{1-e}.$$

Элементы $x_1, x_{1/2}, x_0$ лежат в алгебре J. Определим также подпространства

$$J_1 = JU_e, J_{1/2} = JU_{e,1-e}, J_0 = JU_{1-e}.$$

Ясно, что в силу (5.2) верно

$$J = J_0 + J_{1/2} + J_1.$$

Если фигурирует несколько идемпотентов, то вместо x_i и J_i можно писать $x_i(e)$ и $J_i(e)$.

Заметим теперь, что

$$U_e = R_e(2R_e - E), U_{e,1-e} = 2R_e(E - R_e), U_{1-e} = (R_e - E)(2R_e - E)$$

и что, в силу тождества (3.15)

$$R_e(R_e - E)(2R_e - E) = 0. \tag{5.3}$$

Поэтому

$$U_eR_e = U_e, U_{e,1-e}R_e = \frac{1}{2}U_{e,1-e}, U_{1-e}R_e = 0.$$

Отсюда следует, что $x_iR_e = ix_i, i = 0, \frac{1}{2}, 1$. Легко видеть теперь, что сумма подпространств J_i — прямая:

$$J = J_0 \oplus J_{1/2} \oplus J_1. \tag{5.4}$$

Это разложение в сумму подпространств называется пирсовским разложением, а подпространства J_i — пирсовскими компонентами.

Теорема 5.2.1 Пусть J — йорданова алгебра с идемпотентом e. Тогда J раскладывается в прямую сумму пирсовских компонент

$$J = J_1 \oplus J_{1/2} \oplus J_0,$$

где

$$J_i = \{x \in J | xe = ix\}, i = 0, \frac{1}{2}, 1,$$

причем

$$J_1 = JU_e, J_{1/2} = JU_{e,1-e}, J_0 = JU_{1-e}$$

(в данном случае, единица из алгебры $J^{\#}$). Компоненты J_0 и J_1 являются в J квадратичными идеалами. Таблица умножения для пирсовских копонент такова:

$$J_1^2 \subseteq J_1, J_1 J_0 = 0, J_0^2 \subseteq J_0, J_0 J_{1/2} \subseteq J_{1/2}, J_1 J_{1/2} \subseteq J_{1/2}, J_{1/2}^2 \subseteq J_0 + J_1. \tag{5.5}$$

Доказательство. Осталось установить только правила умножения для пирсовских компонент. В силу тождества (3.13) для любых $x, y \in J$ верно

$$(xy)e = (xy)e^2 = -2(xe)(ye) + 2((xe)y)e + x(ye).$$

Если $x \in J_i, y \in J_j$, это соотношение влечет

$$(2i-1)(xy)e = j(2i-1)xy. \tag{5.6}$$

При $i = 1$ мы получаем, что $J_1 J_j \subseteq J_j$, а при $i = 0$ имеем $J_0 J_j \subseteq J_j$. Отсюда следуют все соотношения из (5.5), кроме второго и последнего. Но

$$J_1 J_0 = J_0 J_1 \subseteq J_1 \cap J_0 = 0,$$

поэтому остается доказать последнее соотношение. В силу (3.13) для любых $x, y \in J_{1/2}$ верно

$$((xy)e)e = -((xe)e)y - x((ye)e) + (xy)e + 2(xe)(ye) = (xy)e.$$

Это значит, что

$$(xy)_1 + \frac{1}{4}(xy)_{1/2} = (xy)_1 + \frac{1}{2}(xy)_{1/2}.$$

Следовательно,

$$(xy)_{1/2} = 0 \text{ и } xy = (xy)_1 + (xy)_0.$$

Таким образом, и последнее из равенств (5.5) доказано.

Упражнение. Пусть I — идеал в J_1. Показать, что $I + (IJ_{1/2})J_{1/2} \trianglelefteq J_1$.

Определение. Ниль-радика — это максимальный идеал у которого все элементы нильпотентны.

Упражнение. Пусть I и J — ниль-иделы алгебры A. Тогда $I + J$ — ниль-идеал.

Теорема 5.2.2. Пусть J — йорданова алгебра с условием минимальности для квадратичных идеалов и $N(J)$ — ее ниль-радикал, тогда $N(J)$ — нильпотентен.

Напомним, что идемпотенты e и f называются ортогональными, если $ef = 0$. Идемпотент e алгебры J называется главным, если в J нет идемпотентов, ортогональных к e. Это равносильно тому, что компонента $J_0(e)$ не содержит идемпотентов.

Лемма 5.2.2 Всякий ненильпотентный идеал H йордановой алгебры J с условием минимальности для квадратичных идеалов содержит главный идемпотент e, для которого $H_0(e)$ — ниль-алгебра.

Доказательство. В силу леммы 5.2.1 в идеале H имеется идемпотент; обозначим его через e_1. Рассмотрим компоненту $H_0(e_1)$, которая, как нетрудно видеть, является в J квадратичным идеалом. Если все элементы в $H_0(e_1)$ нильпотентны, то идемпотент e — главный и все доказано. Если же в $H_0(e)$ есть ненильпотентный элемент, то в $H_0(e_1)$ есть также идемпотент e_2. Рассмотрим теперь компоненту $H_0(e_1+e_2)$. Так как $1-e_1-e_2 \in J_0^{\#}(e_1)$, то

$$H_0(e_1+e_2) = HU_{1-e_1-e_2} \subseteq H_0(e_1).$$

Это включение является строгим, так как $e_2 \notin H_0(e_1+e_2)$. Проделаем с $H_0(e_1+e_2)$ те же процедуры, что и с $H_0(e_1)$, и т. д. Так как цепочка квадратичных идеалов

$$\ldots \subseteq H_0(e_1+e_2) \subseteq H_0(e_1)$$

не может быть бесконечной, отсюда следует, что в H есть главный идемпотент e, для которого $H_0(e)$ — ниль-алгебра. Лемма доказана.

Через $\Xi(J)$ будем обозначать идеал йордановой алгебры J, порожденный всеми ее абсолютными делителями нуля. Очевидно, что алгебра J невырождена тогда и только тогда, когда $\Xi(J)=0$.

Пусть I — тривиальный идеал алгебры J. Тогда для любых элементов $x \in J, z \in I$ имеем

$$xU_z = 2(xz)z - xz^2 = 0,$$

т.е. каждый элемент идеала I является абсолютным делителем нуля в J и, в частности, $I \subseteq \Xi(J)$.

Лемма 5.2.3. Пусть J — йорданова алгебра $J^{\#}$ — алгебра, полученная формальным присоединением к J единицы 1. Тогда если z — абсолютный делитель нуля в J и $x \in J^{\#}$, то zU_x — также абсолютный делитель нуля.

Доказательство. Так как $J^{\#}$ — йорданова алгебра, тождество Макдональда (3.23) в ней справедливо. Поэтому для любого элемента $a \in J$ верно

$$aU_{zU_x} = aU_xU_zU_x = 0,$$

так как $aU_x \in J$. Лемма доказана.

Лемма 5.2.4. Идеал $\Xi(J)$ порождается абсолютными делителями нуля как Φ-модуль.

Доказательство. Доастаточно заметить, что для любого абсолютного делителя нуля z и любого элемента $x \in J$ верно

$$2zx = zU_{1+x} - zU_x - z,$$

т.е. элементы zx есть сумма трех абсолютных делителей нуля и, следовательно, лежит в подмодуле, порожденном абсолютными делителями нуля. Это означает, что указанный подмодуль является идеалом. Лемма доказана.

Для произвольной йордановой алгебры J положим по определению $M_1(J) = \Xi(J)$, и пусть идеал $M_\alpha(J)$ уже определен для всех ординалов α таких, что $\alpha < \beta$. Если β — предельный ординал, положим

$$M_\beta(J) = \bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha(J).$$

Если ординал β не является предельным, определим $M_\beta(J)$ как такой идеал, что

$$M_\beta(J)/M_{\beta-1}(J) = \Xi(J/M_{\beta-1}(J)).$$

Цепочка идеалов

$$M_1(J) \subseteq M_2(J) \subseteq \ldots \subseteq M_\alpha(J) \subseteq$$

стабилизируется на некотором ординале γ. Положим

$$M(J) = M_\gamma(J).$$

Определение. Радикал $M(J)$ называется радикалом Маккриммона.

Теорема 5.2.3. Во всякой йордановой алгебре J справедливо включение

$$M(J) \subseteq N(J).$$

Доказательство. Достаточно показать, что $\Xi(J)$ — ниль-идеал; в этом случае очевидной индукцией доказывается, что все идеалы $M_\beta(J)$ — ниль-идеалы. Так как всякий элемент из $\Xi(J)$ имеет вид $z_1 + z_2 + \ldots + z_n$, где z_i — абсолютные делители нуля, утверждение можно доказывать индукцией по n. Основание индукции очевидно: $z_1^3 = z_1 U_{z_1} = 0$. Для доказательства индуктивного перехода достаточно показать, что для любого нильпотентного элемента $y \in J$ и любого абсолютного делителя нуля z элемент $y + z$ также нильпотентен. Рассмотрим подалгебру J_0 в J, порожденную элементами y и z. По теореме Ширшова она специальна и имеет ассоциативную обертывающую алгебру A_0. Вычисляя в алгебре A_0, имеем

$$(y+z)^k = y^k + \sum_{i=0}^{k-1} y^i z y^{k-i-1} + \sum_{i=0}^{k-2} y^i z^2 y^{k-i-2},$$

поэтому, если m — индекс нильпотентности элемента y, то $(y+z)^{2m+1} = 0$. Теорема доказана.

Теорема 5.2.4. Полупростая йорданова алгебра J с условием минимальности для квадратичных идеалов обладает единицей и разлагается в конечную прямую сумму простых йордановых алгебр с единицей, удовлетворяющих условию минимальности.

Доказательство. Пусть H — минимальный идеал алгебры J и e — главный идемпотент в H, который существует в силу леммы 5.2.2. По той же лемме $H_0(e)$ — ниль-алгебра и по теореме 5.2.2 имеем, что $N(H) \supseteq H_0(e)$.

Ввиду полупростоты алгебры J, мы имеем, что ниль-радикал нулевой и, следовательно, $H_0(e) = 0$.

Рассмотрим произвольный элемент $h_{1/2} = \{eh(1-e)\} \in H_{1/2}(e)$. Так как подалгебра, порожденная элементами e и h, специальна, вычисляя в обертывающей алгебре, имеем

$$h_{1/2}^2 = \frac{1}{4}(eh(1-e)eh(1-e) + (1-e)he(1-e)he + (1-e)he^2h(1-e) + eh(1-e)^2he) =$$

$$\frac{1}{4}eh(1-e)he = \frac{1}{4}\{e\{h(1-e)h\}e\}.$$

Поэтому для любого элемента $x \in J$ верно

$$xU_{h_{1/2}^2} = \frac{1}{16}xU_eU_hU_{1-e}U_hU_e \subseteq H_0U_hU_e = 0,$$

т.е. $h_{1/2}^2$ — абсолютный делитель нуля в J.

Таким образом, легко заключить, пользуясь теоремой 5.2.3, что $h_{1/2}^2 = 0$ для любого $h \in H$ и, следовательно, $[H_{1/2}(e)]^2 = 0$. Легко заметить, что для $x \in J_{1/2}(e)$ имеем, что $ex = \frac{1}{2}x$, то есть $x \in H$ и, следовательно, $x \in H_{1/2}(e)$. Таким образом, $J_{1/2}(e) = H_{1/2}(e)$. Из соотношений (5.5) теперь вытекает, что $H_{1/2}(e)$ — тривиальный идеал в J. Поэтому он равен нулю и $H = H_1(e) = J_1(e)$. Идемпотент e является единицей в H и алгебра J разлагается в прямую сумму идеалов

$$J = H \oplus K,$$

где $K = J_0(e)$. Каждый идеал алгебры H является идеалом в J, поэтому H — простая алгебра. Очевидно, что H и K удовлетворяют условию минимальности для квадратичных идеалов.

Обозначим H через H_1 и K через K_1. Рассмотрим, далее, минимальный идеал H_2 алгебры K_1. Те же рассуждения, что и выше, дают нам разложение

$$J = H_1 \oplus H_2 \oplus K_2$$

и т. д. Так как цепочка идеалов $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \ldots$ не может убывать бесконечно, для некоторого числа s мы будем иметь $K_s = 0$, т.е.

$$J = H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_s.$$

Теорема доказана.

Определение. J — йорданова алгебра с делением, если для любого ее ненулевого элемента a оператор U_a — обратим.

Теорема 5.2.5. Всякая специальная йорданова алгебра с делением изоморфна одной из следующих алгебр:

1) йордановой алгебре $H(D,*)$ симметрических элементов ассоциативной алгебры с делением D относительно инволюции $*$;

2) алгебре $D^{(+)}$, где D — ассоциативная алгебра с делением;

3) алгебре симметрической билинейной формы на некотором векторном пространстве.

Доказательство. Хорошо изложено в [11, Теорема 2.2].

Теорема 5.2.6. Всякая исключительная йорданова алгебра с делением 27-мерна над своим центром.

Доказательство. Хорошо изложено в [11, Теорема 3.2].

Теорема 5.2.7. Пусть J — простая йорданова алегбра с условием минимальности для квадратичных идеалов. Тогда она — одна из следующих алгебр:

1) J — алгебра с делением;

2) J — алгебра невырожденной симметрической билинейной формы, определенной на векторном пространстве V над некоторым расширением K основного поля, таким, что $dim_K(V) > 1$;

3) $J = H(D_n, S_A)$, где $n \geqslant 2$, и (D, j) есть либо $\Delta \oplus \Delta^0$, где Δ — ассоциативная алгебра с делением, j — инволюция, переставляющая компоненты, либо D — ассоциативная алгебра с делением, j — ее инволюция, либо D — расщепляемая алгебра кватернионов над некоторым расширением основного поля, j — стандартная инволюция, либо D — алгебра Кэли-Диксона над некоторым расширением основного поля, j — стандартная инволюция и $n = 3$.

Доказательство. В силу громоздкости и хорошоизложенности в книге [1], мы опускаем.

В случае алгебраически замкнутого поля, простые конечномерные йордановы алгебры устроены еще проще. Это иллюстрирует следующая теорема.

Теорема 5.2.8. Всякая простая конечномерная йорданова алгебра над алгебраически замкнутым полем F характеристики отличной от 2, изоморфна дной из следующих алгебр:

1) $F \cdot 1$ — основному полю;

2) $F \cdot 1 + V$ — алгебре симметрической невырожденной билинейной формы на векторном пространстве V;

3) йордановой матричной алгебре $H(D_n)$, где $n \geqslant 3$, D — композиционная алгебра, ассоциативная при $n > 3$.

Глава 6

Супералгебры и контрпримеры.

6.1 Супералгебры

Пусть F — поле характеристики $p \neq 2$. Пусть G — алгебра Грассмана над F, заданная образующими $1, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ и определяющими соотношениями: $\xi_i^2 = 0, \xi_i\xi_j = -\xi_j\xi_i$. Единица 1 и произведения $\xi_{i_1}\xi_{i_2}\ldots\xi_{i_k}, i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, образуют базис алгебры G над F. Обозначим через G_0 и G_1 подпространства, порожденные соответственно произведениями четной и нечетной длины; тогда G представляется в виде прямой суммы этих подпространств: $G = G_0 \oplus G_1$, при этом справедливы соотношения $G_iG_j \subseteq G_{i+j(mod2)}, i, j = 0, 1$. Иначе говоря, G является $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгеброй (или супералгеброй) над F.

Пусть теперь $A = A_0 \oplus A_1$ — произвольная супералгебра над F. Рассмотрим тензорное произведение F-алгебр $G \otimes A$. Его подалгебра

$$G(A) \quad = \quad G_0 \otimes A_0 + G_1 \otimes A_1$$

называется грассмановой оболочкой супералгебры A.

Пусть Ω — некоторое многообразие алгебр над F. Супералгебра $A = A_0 \oplus A_1$ называется Ω-супералгеброй, если ее грассманова оболочка $G(A) \in \Omega$.

В частности, $J = J_0 \oplus J_1$ называется йордановой супералгеброй, если ее грассманова оболочка $G(J)$ является йордановой алгеброй. Далее для однородного элемента x супералгебры $J = J_0 \oplus J_1$ будем считать $p(x) = i$, если $x \in J_i$.

С другой стороны, над полем характеристики отличной от 3, йордановы супералгебры определяются тождествами

$$ab = (-1)^{p(a)p(b)}ba,$$
$$((da)b)c + (-1)^{p(a)p(b)+p(a)p(c)+p(b)p(c)}((dc)b)a + (-1)^{p(b)p(c)}d((ac)b) =$$
$$(da)(bc) + (-1)^{p(a)p(b)}(db)(ac) + (-1)^{p(a)p(c)+p(b)p(c)}(dc)(ab).$$

В случае же характеристики поля равной 3, необходимо дополнительно требовать, чтобы четная часть супералгебры являлась йордановой алгеброй.

Отметим, что умножение в каждой йордановой супералгебре является коммутативным на четных элементах и антикоммутативным на нечетных элементах супералгебры.

Пусть $A = A_0 \oplus A_1$ — ассоциативная супералгебра. Определим на векторном пространстве A суперсимметрическое произведение $\circ$ по правилу

$$a \circ b = \frac{1}{2}(ab + (-1)^{p(a)p(b)}ba).$$

Полученную супералгебру обозначим через $A^{(+)}$. Йорданова супералгебра B называется специальной, если она изоморфно вкладывается в супералгебру $A^{(+)}$ для подходящей ассоциативной супералгебры A.

Приведем некоторые примеры йордановых супералгебр.

Супералгебры $M_{m,n}^{(+)}$ и $Q(n)^{(+)}$. В работе [9] было показано, что каждая простая конечномерная ассоциативная супералгебра над алгебраически замкнутым полем F либо изоморфна супералгебре $A = M_{m,n}$, которая является матричной алгеброй M_{m+n}, либо изоморфна $B = Q(n)$, которая является подалгеброй в M_{2n}. Градуировки супералгебр A и B выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} : A \in M_m, D \in M_n \right\}, \\
A_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} : B \in M_{m,n}, C \in M_{n,m} \right\}, \\
B_0 &= \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} : A \in M_n \right\}, \\
B_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{pmatrix} : B \in M_n \right\}.
\end{aligned}$$

Пусть $A = A_0 + A_1$ — ассоциативная супералгебра. На векторном пространстве супералгебры A можно определить структуру йордановой супералгебры $A^{(+)}$, задав новое умножение следующим образом

$$a \circ b = \frac{1}{2}(ab + (-1)^{p(a)p(b)}ba).$$

Используя описанную конструкцию, мы получаем следующие супералгебры

$$\begin{aligned}
&M_{m,n}^{(+)},\ m \geq 1, n \geq 1, \\
&Q(n)^{(+)},\ n \geq 2.
\end{aligned}$$

Определим суперинволюцию $j : A \to A$. По определению градуированный эндоморфизм $j : A \to A$ называется суперинволюцией, если выполнены соотношения

$$j(j(a)) = a \text{ и } j(ab) = (-1)^{p(a)p(b)} j(b) j(a).$$

Пусть $H(A, j) = \{a \in A : j(a) = a\}$. Тогда $H(A, j) = H(A_0, j) + H(A_1, j)$ является подсупералгеброй в $A^{(+)}$. Теперь перечислим супералгебры, получаемые из $M_{n,m}(F)$ с помощью подходящей суперинволюции.

Супералгебра $\mathbf{osp(n,m)}$. Супералгебра состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, где

$$A^T = A \in M_n(F), C = Q^{-1}B^T, D = Q^{-1}D^TQ \in M_{2m}(F), Q = \begin{pmatrix} 0 & E_m \\ -E_m & 0 \end{pmatrix}.$$

Супералгебра $\mathbf{P(n)}$. Супералгебра состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, где

$$B^T = -B, C^T = C, D = A^T; A, B, C, D \in M_n(F).$$

Супералгебра суперсимметрической билинейной суперформы $J(V,f)$. Пусть $V = V_0 + V_1$ — $\mathbb{Z}_2$-градуированное векторное пространство с невырожденной суперформой $f(.,.) : V \times V \to F$, которая симметрична на $V_{\overline{0}}$ и кососимметрична на V_1. Кроме того, $f(V_1, V_0) = f(V_0, V_1) = 0$. Рассмотрим прямую сумму векторных пространств $J = F \oplus V$. Пусть e — единица поля F. Определим умножение на супералгебре $J(V,f)$ по формуле

$$(\alpha + v)(\beta + w) = (\alpha\beta + f(v,w))e + (\alpha w + \beta v).$$

Данная супералгебра имеет градуировку $J_0 = F + V_0,\ J_1 = V_1$.

Супералгебра Грассмановых скобок $J(\Gamma_n)$. Рассмотрим алгебру Грассмана Γ от (нечетных) антикоммутирующих порождающих $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$. Для определения нового умножения, называемого грассмановой скобкой, используем операцию

$$\frac{\partial}{\partial e_j}(e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_n}) = \begin{cases} (-1)^{k-1}e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_{k-1}}e_{i_{k+1}}\ldots e_{i_n}, \text{при } j = i_k, \\ 0, \text{при } j \neq i_l,\ l = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Грассманово умножение, для $f, g \in \Gamma_{\overline{0}} \cup \Gamma_{\overline{1}}$, определяется следующим образом

$$\{f, g\} = (-1)^{p(f)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial e_j}\frac{\partial g}{\partial e_j}.$$

Пусть $\overline{\Gamma}$ — изоморфная копия Γ. На прямой сумме векторных пространств $J(\Gamma) = \Gamma + \overline{\Gamma}$ зададим структуру йордановой супералгебры с умножением $\bullet$:

$$a \bullet b = ab, \overline{a} \bullet b = (-1)^{p(b)}\overline{ab}, a \bullet \overline{b} = \overline{ab}, \overline{a} \bullet \overline{b} = (-1)^{p(b)}\{a, b\},$$

где $a, b \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ и ab — произведение в Γ. Пусть Γ_n — подалгебра алгебры Γ, порожденная элементами $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Через $J(\Gamma_n)$ обозначим подсупералгебру $\Gamma_n + \overline{\Gamma_n}$ супералгебры $J(\Gamma)$. Если $n \geqslant 2$, то $J(\Gamma_n)$ — проста.

Супералгебра Капланского K_3. Рассмотрим трехмерную супералгебру K_3 с градуировкой $(K_3)_0 = Fe, (K_3)_1 = Fz + Fw$ и следующим законом умножения

$$e^2 = e, ez = \frac{1}{2}z, ew = \frac{1}{2}w, [z, w] = e,$$

где через $[,]$ обозначается антикоммутативное умножение на нечетной части.

Супералгебры D_t. Однопараметрическое семейство четырехмерных супералгебр D_t для фиксированного $t \in F$ определяется следующим образом:

$$D_t = (D_t)_0 + (D_t)_1, \text{ где } (D_t)_0 = Fe_1 + Fe_2, (D_t)_1 = Fx + Fy,$$
$$\text{где } e_i^2 = e_i, e_1e_2 = 0, e_ix = \tfrac{1}{2}x, e_iy = \tfrac{1}{2}y, [x, y] = e_1 + te_2, i = 1, 2,$$

где через $[,]$ обозначается антикоммутативное умножение на нечетной части.

Супералгебры Каца K_{10} и K_9. Градуировка на десятимерной супералгебре Каца выглядит следующим образом

$$(K_{10})_0 = A, (K_{10})_1 = M, \text{ где } A = A_1 \oplus A_2,$$

$$A_1 = Fe_1 + Fuz + Fuw + Fvz + Fvw,$$
$$A_2 = Fe_2, M = Fz + Fw + Fu + Fv.$$

Умножение задано следующими условиями:

$$e_i^2 = e_i, e_1 \text{ — единица алгебры } A_1, e_im = \tfrac{1}{2}m, \text{ для любого } m \in M,$$
$$[u, z] = uz, [u, w] = uw, [v, z] = vz, [v, w] = vw,$$
$$[z, w] = e_1 - 3e_2, [u, z]w = -u, [v, z]w = -v, [u, z][v, w] = 2e_1,$$

где через $[,]$ обозначается антикоммутативное умножение на нечетной части. Все остальные ненулевые произведения получаются из приведенных либо применением одной из кососимметрий $z \leftrightarrow w, u \leftrightarrow v$, либо применением одновременной подстановки $z \leftrightarrow u, w \leftrightarrow v$.

Отметим, что супералгебра K_{10} является простой над полями характеристики $p \neq 2, 3$. Над полем характеристики 3 она имеет простую подсупералгебру K_9. В случае супералгебры K_9, ее градуировка выглядит следующим образом

$$(K_9)_0 = Fe_1 + Fuz + Fuw + Fvz + Fvw, (K_9)_1 = Fz + Fw + Fu + Fv.$$

Умножение супералгебры K_9 определяется аналогично умножению в супералгебре K_{10}, с учетом характеристики поля равной 3.

Супералгебра дубль Кантора [12]. Пусть $\Gamma = \Gamma_0 \oplus \Gamma_1$ — ассоциативная суперкоммутативная супералгебра с единицей 1 и $\{\ ,\ \} : \Gamma \times \Gamma \to \Gamma$ — суперкососимметрическое билинейное отображение, которое мы будем называть скобкой. По супералгебре Γ и скобке $\{,\}$ можно построить супералгебру $J(\Gamma, \{,\})$. Рассмотрим $J(\Gamma, \{,\}) = \Gamma \oplus \Gamma x$ — прямую сумму пространств, где Γx — изоморфная копия пространства Γ. Пусть a, b — однородные элементы из Γ. Тогда операция нового умножения $\cdot$ на $J(\Gamma, \{,\})$ определяется формулами

$$a \cdot b = ab,\ a \cdot bx = (ab)x,\ ax \cdot b = (-1)^{p(b)}(ab)x,\ ax \cdot bx = (-1)^{p(b)}\{a, b\}.$$

Положим $A = \Gamma_0 \oplus \Gamma_1 x, M = \Gamma_1 \oplus \Gamma_0 x$. Тогда $J(\Gamma, \{,\}) = A \oplus M$ — $\mathbb{Z}_2$-градуированная алгебра.

Если основное поле характеристики отличной от 2, 3, то супералгебра, построенная по процессу Кантора будет йордановой, если скобка $\{,\}$ для однородных элементов удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\{a, bc\} = \{a, b\}c + (-1)^{p(a)p(b)}b\{a, c\} - \{a, 1\}bc,$$

$$\{a, \{b, c\}\} = \{\{a, b\}, c\} + (-1)^{p(a)p(b)}\{b, \{a, c\}\} + \{a, 1\}\{b, c\}$$
$$+(-1)^{p(a)(p(b)+p(c))}\{b, 1\}\{c, a\} + (-1)^{p(c)(p(a)+p(b))}\{c, 1\}\{a, b\}.$$

В случае поля характеристики 3, необходимо дополнительно требовать выполнения условия $\{d, d\}\{d, 1\} = \{d, \{d, d\}\}$.

Хорошо известно [6], что йорданова супералгебра $J = \Gamma \oplus \Gamma x$, полученная с помощью процесса удвоения Кантора, будет являться простой тогда и только тогда, когда Γ не имеет ненулевых идеалов B с условием $\{\Gamma, B\} \subseteq B$.

Супералгебра векторного типа $J(\Gamma, D)$**.** Пусть $\Gamma = \Gamma_0 \oplus \Gamma_1$ — ассоциативная суперкоммутативная супералгебра с ненулевым четным дифференцированием D. Определим на Γ скобку $\{,\}$ полагая

$$\{a, b\} = D(a)b - aD(b).$$

Тогда скобка $\{,\}$ — йорданова скобка. Полученную супералгебру $J(\Gamma, \{,\})$ будем обозначать как $J(\Gamma, D)$. Операция умножения $\cdot$ в $J(\Gamma, D)$ определяется по правилам

$$a \cdot b = ab,\ a \cdot bx = (ab)x,\ ax \cdot b = (-1)^{p(b)}(ab)x,\ ax \cdot bx = (-1)^{p(b)}(D(a)b - aD(b)),$$

где a, b однородные элемены из Γ и ab — произведение в Γ. Супералгебра $J(\Gamma, D)$ называется супералгеброй векторного типа. Если супералгебра $J(\Gamma, D)$ — проста, то известно, что $\Gamma_1 = 0$.

Супералгебра Ченга—Каца $CK(B(m, n), d)$ **[4].** Пусть F — алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 2$. Положим $B(m) = F[a_1, \ldots, a_m | a_i^p = 0]$ — алгебра усеченных многочленов от m четных переменных. Пусть $G(n)$ — супералгебра Грассмана с порождающими $1, \xi_1, \ldots, \xi_n$. Тогда $B(m, n) = B(m) \otimes G(n)$ — ассоциативно-суперкоммутативная супералгебра.

Пусть $Z = B(m, n)$ с ненулевым дифференцированием $d : Z \to Z$. Рассмотрим два свободных Z-модуля ранга 4

$$A = Z + \sum_{i=1}^{3} w_i Z,\ M = xZ + \sum_{i=1}^{3} x_i Z.$$

Умножение на A будет Z-линейным, $w_i w_j = 0, i \neq j, w_i^2 = -1$. Определим

$$x_{i\times i} = 0,\ x_{1\times 2} = -x_{2\times 1} = x_3,\ x_{1\times 3} = -x_{3\times 1} = x_2,\ x_{2\times 3} = -x_{3\times 2} = x_1.$$

Умножение $A \times M \to M$ определено следующим образом

$$(xf)g = x(fg),\ (x_i f)g = x_i(fg), (xf)(w_j g) = x_j(fd(g)),\ (x_i f)(w_j g) = x_{i\times j}(fg).$$

Умножение $M \times M \to A$ зададим по правилам

$$(xf)(xg) = d(f)g - fd(g),\ (xf)(x_jg) = -w_j(fg),\ (x_if)(xg) = w_i(fg),\ (x_if)(x_jg) = 0.$$

Супералгебра $H_3(B(1,2))$ **[14].** Для начала определим альтернативную супералгебру $B(1,2)$. Пусть F — поле характеристики 3 и $B(1,2) = C + M$ — суперкоммутативная супералгебра над F, у которой $C = F \cdot 1$, $M = F \cdot x + F \cdot y$, где 1 — единица B, и $xy = -yx = 1$. Заметим, что супералгебра $B(1,2)$ есть в точности простая йорданова супералгебра суперсимметрической билинейной формы $f(s,r) = sr$ на нечетном векторном пространстве M.

Как известно, $B(1,2)$ — простая альтернативная супералгебры с суперинволюцией $(a+m)^* = a - m$. Ей соответствует простая йорданова супералгебра $H_3(B(1,2))$.

Супералгебра $H_3(B(2,4))$ **[14].** Для начала определим альтернативную супералгебру $B(2,4)$. Пусть F — поле характеристики 3 и $C = M_2(F)$ — алгебра 2×2 матриц над $F, M = F\cdot m_1 + F \cdot m_2$ — 2-мерный неприводимый бимодуль Кэли над C, т.е. C действует на M следующим образом

$$\begin{aligned} e_{ij} \cdot m_k &= \delta_{ik} m_j, i, j, k \in \{1,2\}, \\ m \cdot a &= \overline{a} \cdot m, \end{aligned}$$

где $a \in C, m \in M, a \mapsto \overline{a}$ — симплектическая инволюция в $C = M_2(F)$. Нечетное умножение на M определено равенствами

$$m_1^2 = -e_{21}, m_2^2 = e_{12}, \qquad m_1m_2 = e_{11}, m_2m_1 = -e_{22}.$$

Как известно, $B(2,4)$ — простая альтернативная супералгебра с суперинволюцией $(a+m)^* = \overline{a} - m$. Ей соответствует простая йорданова супералгебра $H_3(B(2,4))$.

Супералгебра $V_{1/2}(Z,D)$**.** Пусть Z — ассоциативно-коммутативная F-алгебра с единицей e и дифференцированием $D : Z \to Z$, удовлетворяющая двум условиям

i) Z не имеет собственных D-инвариантных идеалов,

ii) D обнуляет только элементы вида Fe.

Рассмотрим Zx как изоморфную копию алгебры Z. Определим на векторном пространстве $V(Z,D) = Z + Zx$ структуру супералгебры. Положим $(V_{1/2}(Z,D))_0 = Z$ и $(V_{1/2}(Z,D))_1 = Zx$ — четная и нечетная части супералгебры $V_{1/2}(Z,D)$. Умножение $\cdot$ зададим следующим образом

$$a \cdot b = ab, a \cdot bx = \frac{1}{2}(ab)x, ax \cdot bx = D(a)b - aD(b),$$

для произвольных элементов $a, b \in Z$.

Классификация простых конечномерных йордановых супералгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики ноль была приведена в работах [5, 12].

В [7, 8] были описаны простые конечномерные йордановы супералгебры над алгебраически замкнутым полем произвольной характеристики отличной от 2. Основной результат по классификации простых конечномерных унитальных йордановых супералгебр над алгебраически замкнутыми полями характеристики $p > 2$ был получен в работе К. Мартинез и Е. Зельманова [7]:

Теорема. Простая конечномерная йорданова супералгебра над алгебраически замкнутым полем характеристики отличной от 2 изоморфна некоторой супералгебре из числа рассмотренных в данном параграфе.

6.2 Контрпримеры

Пример 1 [Жевлаков]. Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ — счетное множество символов. Рассмотрим множество слов в алфавите X и назовем слово $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}$ правильным, если $x_{i_1} < x_{i_2} < \ldots < x_{i_n}$. Множество правильных слов линейно упорядочим лексикографически, полагая $x_i > x_j$, если $i < j$, и если $u = vv_1$, то считаем $u < v$.

Рассмотрим поле F характеристики отличной от 2,3, и алгебру A над F с базисом из правльных слов алфавита X и умножением на базисе, определенным правилом: если u, v — правильные слова, то:

1) $u * v = v * u$;

2) $u * v = 0$, если $min(d(u), d(v)) > 1$;

3) $u * x_i = 0$, если x_i входит в запись u;

4) $u * x_i = 0$, если $d(u) > 1$ и $x_i > u$;

5) $x_i * x_j = x_i x_j$, если $x_i < x_j$;

6) $u * x_i = (-1)^\sigma < ux_i >$, если не применимы 1)-5). Здесь $< ux_i >$ — правильное слово, образованное всеми буквами слова u и буквой x_i, и если $u = x_{j_1}x_{j_2}\ldots x_{j_n}$, то σ — число инверсий в перестановке $(j_1, j_2, \ldots, j_n, i)$.

В алгебре A справедливо тождество Якоби:

$$(a * b) * c + (b * c) * a + (c * a) * b = 0 \tag{6.1}$$

для любых $a, b, c \in A$. Докажем это. Ясно, что если из трех слов a, b, c два имеют длину строго больше 1 или имеют общий символ из X, то (6.1) справедливо. Аналогично. если $d(a) > 1$ и $d(b) = d(c) = 1$, но либо $b > a$, либо $c > a$, то (6.1) также верно. Оставшиеся два случая:

a) $a = x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}, b = x_j, c = x_k$ и $a > b > c$;

b) $a = x_i, b = x_j, c = x_k$ и $a > b > c$

проверяются непосредственно вычислениями.

Докажем теперь, что A — специальная йорданова алгебра. Ввиду (6.1), в алгебре умножений $R(A)$ для любых $a, b \in A$ справедливо соотношение

$$R_{a*b} = -R_aR_b - R_bR_a.$$

Определим теперь на векторном пространстве алебры $R(A)$ другое умножение :

$$w_1 \cdot w_2 = -2w_1w_2.$$

Легко видеть, что полученная таким образом новая алгебры $\overline{R(A)}$ также ассоциативна. Кроме того, для любых $a, b \in A$ в $\overline{R(A)}$ справедливо соотношение

$$R_{a*b} = \frac{1}{2}(R_a \cdot R_b + R_b \cdot R_a),$$

которое показывает, что отображение $\phi : A \to \overline{R(A)}$, переводящее $a \in A$ в $R_a \in \overline{R(A)}$, является гомоморфизмом алгебры A в $\overline{R(A)}^{(+)}$. Легко видеть, что ядро ϕ равно нулю, т.е. ϕ — изоморфизм. Это доказывает специальность и йордановость алгебры A.

Как видно из таблицы умножения, алгебра A разрешима индекса 2: $A^{(2)} = 0$ и, кроме того, в A справедливо тождество $x^3 = 0$, однако A не является нильпотентной, так как произведение

$$(\ldots((x_1 * x_2) * x_3)\ldots) * x_n$$

не равно нулю не для какого n.

Упражнение. Пусть A — коммутативная алгебра с тождеством $x^3 = 0$. Доказать, что алгебра A — йорданова.

Упражнение. Пусть A — альтернативная коммутативная алгебра с тождеством $x^3 = 0$. Доказать, что алгебра A — специальная йорданова.

Упражнение. Пусть A — коммутативная алгебра с тождеством $x^3 = 0$ и I — аннулятор алгебры A. Доказать, что A/I — специальная йорданова алгебра.

Пример 2 [Шестаков]. Пусть M — алгебра с множеством порождающих $X = \{x_1, \ldots x_n, \ldots\}$ и определяющими соотношениями $x_i x_j = -x_j x_i$. На векторном пространстве M определим новое умножение правилом

$$(u + x_i)(v + x_j) = v x_i + u x_j,$$

где $u, v \in M \setminus \langle X \rangle$, а через $\langle X \rangle$ мы обозначаем линейную оболочку векторов из X. Ниже, все элементы вида u, v, v_t лежат в $M \setminus \langle X \rangle$.

Покажем, что полученная алгебра является йордановой. Для этого достаточно заметить, что она коммутативна и верно

$$((u + x_i)^{*2} * (v + x_j)) * (u + x_i) = 0 = (u + x_i)^{*2} * ((v + x_j) * (u + x_i)).$$

Отметим, что данная алгебра является ниль-алгеброй индекса 3, то есть выполнено следующее равенство

$$(v + x_i)^{*3} = (2vx_i) * (v + x_i) = 2vx_ix_i = 0 \text{ и } (x_i * x_i) * x_i = 0.$$

В тоже время, она является разрешимой индекса 2. Для этого достаточно заметить, что

$$((v_i + x_i) * (v_j + x_j)) * ((v_k + x_k) * (v_l + x_l)) = (v_i x_j + v_j x_i) * (v_k x_l + v_l x_k) = 0.$$

При всем выше перечисленном, данная алгебра не является нильпотентной. Это следует из следующего соотношения, которое справедливо при любом n,

$$(\ldots((x_1x_2) * x_3) * \ldots * x_{n+1}) = x_1x_2x_3\ldots x_{n+1} \neq 0.$$

Пример 3 [Шестаков, см [13]]. Рассмотрим супералгебру $J = J_0 + J_1$, где $J_0 = F \cdot a, J_1 = F \cdot x + F \cdot ax$ и все ненулевые произведения базисных элементов выписаны ниже:

$$a \cdot x = x \cdot a = ax, x \cdot ax = -ax \cdot x = -a.$$

Заметим, что J — специальная йорданова супералгебра: она вложима в супералгебру $A^{(+)s}$ для матричной супералгебры $A = M_3^{1,2}$, где

$$A_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a \in F, b \in M_2 \right\},$$

$$A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}, x \in M_{1,2}, y \in M_{2,1} \right\}.$$

Для доказательства достаточно положить

$$a = e_{23} \in A_0, x = e_{13} + 4e_{31} \in A_1, ax = a \cdot_s x,$$

и проверить таблицу умножения.

В тоже время супералгебра J является разрешимой индекса 2. Для этого достаточно заметить, что $J^2 \subseteq F \cdot ax + F \cdot a$. Откуда легко получить, что

$$(J^2)^2 \subseteq (F \cdot ax + F \cdot a)^2 = 0.$$

Также можно заметить, что каждый элемент супералгебры J является нильпотентным индекса 2.

Теперь покажем, что супералгебра J не является нильпотентной. Заметим, что

$$aR_x^{2n} = a, aR_x^{2n+1} = ax.$$

Упражнение. Показать, что $\Gamma(J)$ — грассманова оболочка супералгебры J является специальной йордановой разрешимой не нильпотентной алгеброй.

Литература

[1] Jacobson N., *Structure and reprsentations of Jordan algebras*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., v. 39, Providence, R. I., 1968.

[2] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И., *Кольца, близкие к ассоциативным,* М.: Наука, 1978.

[3] McCrimmon K., *Taste of Jordan Algebras*, Springer, 2004.

[4] Cheng S. J., Kac V. G., *A new N=6 superconformal algebra,* Comm. Math. Phys., 186, 1, 1997, 219–231.

[5] Kac V. G., *Classification of simple $\mathbb{Z}$-graded Lie superalgebras and simple Jordan superalgebras*, Comm. Algebra, 13, 1977, 1375–1400.

[6] King D., McCrimmon K., *The Kantor construction of Jordan Superalgebras*, Comm. Algebra, 20, 1, 1992, 109–126.

[7] Martines C., Zelmanov E., *Simple finite-dimensional Jordan superalgebras of prime characteristic*, J. of Algebra, 236, 2, 2001, 575–629.

[8] Racine M. L., Zelmanov E. I., *Simple Jordan superalgebras with semisimple even part*, J. Algebra, **270** (2003), №2, 374–444.

[9] Wall C. T. C., *Graded Brauer groups*, J. Reine und angew. Math., 213, 1964, 187–199.

[10] Zelmanov E., *Semisimple finite dimensional Jordan superalgebras*, (English) [A] Fong, Yuen (ed.) et al., Lie algebras, rings and related topics. Papers of the 2nd Tainan-Moscow international algebra workshop '97, Tainan, Taiwan, January 11–17, 1997. Hong Kong: Springer (2000), 227–243.

[11] Зельманов Е. И., *Йордановы алгебры с делением*, Алгебра и логика, 18, 3, 1979, 286–310.

[12] *Кантор И. Л., Йордановы и лиевы супералгебры, определяемые алгеброй Пуассона*, в сб. «Алгебра и анализ», Томск, изд-во ТГУ, 1989, 55–80.

[13] Шестаков И. П., *Супералгебры и контрпримеры*, Сиб. мат. ж., 32, 6, 1991, 187–196.

[14] Шестаков И. П., *Первичные альтернативные супералгебры произвольной характеристики*, Алгебра и логика, 36, 6, 1997, 701–731.