АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Лектор – д.ф.-м.н. Гордиенко В. М.

1-й семестр

Предмет аналитической геометрии.
Аксиомы векторного пространства. Примеры векторных пространств. Следствия аксиом векторного пространства. Линейная зависимость и линейная независимость. Свойства линейной зависимости. Коллинеарные векторы. Компланарные векторы. Геометрический смысл коллинеарности и компланарности. Полные семейства векторов, базисы, размерность. Координаты вектора. Координаты суммы векторов и произведения вектора на число. Изоморфизмы линейных пространств. Координатные изоморфизмы. Изоморфность линейных пространств одной и той же размерности.

Аффинные пространства. Изоморфность аффинных пространств одной и той же размерности. Аффинные координаты.

Прямые в аффинном пространстве. Отрезки. Параметрическое уравнения прямой. Уравнения прямой на плоскости. Каноническое уравнение прямой на плоскости. Общее уравнение прямой на плоскости. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Доказательство постулата Евклида о параллельных.

Плоскости в пространстве. Параметрическое уравнение плоскости. Общее уравнение плоскости. Плоскость, проходящая через три неколлинеарные точки.

Переход от одного базиса к другому в векторном пространстве. Матрица перехода. Преобразование координат. Формулы преобразования аффинных координат точек. Примеры теорем и задач аффинной геометрии.

Скалярное произведение. Аксиомы скалярного произведения. Евклидово пространство. Длина вектора и угол между векторами. Неравенство Коши-Буняковского. Неравенство треугольника. Теорема о диагоналях параллелограмма. Ортогональные векторы и теорема Пифагора. Метрическая форма и метрические коэффициенты. Матрица Грама. Условие положительной определённости. Различные способы задания скалярного произведения. Выражение скалярного произведения через координаты векторов. Преобразование матрицы Грама. Ортонормированные базисы и прямоугольные координаты. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Разложение положительно определённых матриц.

Матрицы перехода и обратимые матрицы. Ортогональные матрицы — матрицы перехода ортонормированных базисов.

Ковариантные и контравариантные координаты. Использование ковариантных координат при вычислении скалярного произведения. Преобразование ковариантных координат. Геометрический смысл ковариантных координат. Сопряжённый базис. Основное свойство сопряжённого базиса. Преобразование сопряжённого базиса. Матрица Грама сопряжённого базиса.

Ориентации. Ориентация прямой. Ориентация плоскости и пространства. Площадь параллелограмма.

Векторное произведение. Свойства векторного произведения. Выражение векторного произведения в прямоугольных координатах. Тождество "бац минус цаб". Тождество Якоби.

Объём параллелепипеда. Ориентированный объём параллелепипеда. Геометрический смысл определителя матрицы. Геометрический смысл определителя матрицы перехода.

Смешанное произведение векторов. Свойства. Координаты векторного произведения в произвольном базисе.

Плоскости и прямые в евклидовом пространстве. Расстояние от точки до плоскости. Угол между двумя плоскостями, между прямой и плоскостью, между двумя прямыми. Расстояние от точки до прямой в пространстве. Расстояние между двумя прямыми в пространстве. Уравнение общего перпендикуляра двух скрещивающихся прямых в пространстве. Уравнение плоскости в пространстве.

Прямая и плоскость в случае многомерного аффинного пространства. Два способа задания. Связь между "геометрической" теорией плоскостей в аффинном пространстве и "алгебраической" теорией систем неоднородных линейных уравнений.

Аффинные преобразования аффинного пространства. Свойства аффинного преобразования. Собственные аффинные преобразования. Индуцированное преобразование векторного пространства. Сдвиги. Линейные преобразования. Ортогональные преобразование евклидова пространства. Основное свойство ортогональных преобразований. Геометрический смысл условия ортогональности матриц.

Группа вращений евклидова пространства. Изометрические преобразования плоскости.

Группа вращений трёхмерного пространства. Матрицы вращений вокруг координатных осей. Углы Эйлера. Матрица вращения вокруг произвольной оси. Существование оси вращения трёхмерного пространства. Расположение собственных чисел матрицы вращения трёхмерного пространства. Параметризация группы вращения трёхмерного пространства точками шара.

Кватернионы. Матричная реализация. Свойства. Сопряжённый кватернион. Модуль кватерниона. Единичные кватернионы. Скалярная и векторная части кватерниона. Описание вращения плоскости с помощью комплексных чисел. Описание вращений трёхмерного пространства с помощью кватернионов. Выражение оси вращения и угла вращения через кватернион. Описание вращений четырёхмерного пространства с помощью кватернионов.

2-й семестр

I. Кривые второго порядка на евклидовой плоскости. Примеры. Приведение к каноническому виду. Канонические уравнения 9-ти видов кривых второго порядка.

Эллипс, гипербола и парабола. Их оси, фокусы, вершины, эксцентриситет, фокальный параметр, директрисы. Асимптоты гиперболы.

Фокальное свойство эллипса и гиперболы как их характеристическое свойство. Директориальное свойство эллипса, гиперболы и параболы как их характеристическое свойство.

Уравнения эллипсов, гипербол и парабол, отнесённые к вершине и к фокусу . Уравнения эллипсов, гипербол и парабол в полярных координатах.

Эллипс, гипербола и парабола как конические сечения. Интерпретация эксцентриситета, фокусов и директрис в терминах конического сечения. Вывод первого закона Кеплера из второго закона Ньютона и закона всемирного тяготения. Взаимно расположение кривой второго порядка и прямой линии. Асимптотические и неасимптотические векторы. Касательная к кривой второго порядка. Уравнение касательной. Асимптота кривой второго порядка. Векторы сопряжённые относительно кривой второго порядка. Диаметры кривой второго порядка. Уравнение диаметра сопряжённого данному направлению. Касательная и диаметр, проведённые из одной точки кривой второго порядка. Биссекториальное свойство касательной для эллипса, гиперболы и параболы. Оптическое свойство эллипса, гиперболы и параболы.

Формулы преобразования уравнения кривой второго порядка при ортогональной замене переменных.

Ортогональные инварианты уравнения кривой второго порядка. Определение типа кривой второго порядка с помощью инвариантов. Классификации кривых второго порядка с помощью инвариантов. Нераспадающиеся и распадающиеся, центральные и нецентральные кривые второго порядка. Кривые эллиптического, гиперболического и параболического типов. Центр кривой второго порядка, уравнение центра и центр симметрии. Центр кривой второго порядка и её диаметры.

II. Поверхности второго порядка на евклидовой плоскости. Примеры поверхностей второго порядка, представление об их форме.

Формулы преобразования уравнения поверхности второго порядка при ортогональной замене переменных.

Ортогональные инварианты уравнения поверхности второго порядка.

Приведение уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду. Свойство столбцов матрицы, приводящей уравнение поверхности к каноническому виду. Канонические уравнения 17-ти видов поверхностей второго порядка.

Невырожденные и вырожденные поверхности. Центральные и нецентральные поверхности. Уравнение центра поверхности.

Пересечение поверхности второго порядка с прямой. Векторы асимптотического и неасимптотического направления. Прямые неасимптотического направления. Диаметральная плоскость, сопряжённая данному направлению. Диаметральная плоскость и центры поверхности. Прямая – касательная к поверхности. Плоскость – касательная к поверхности. Уравнение касательной плоскости. Прямые асимптотического направления. Асимптоты. Прямолинейные образующие. Существование прямолинейных образующих у гиперболического параболоида и однополостного гиперболоида .

III. Проективная геометрия. Необходимость пополнения аффинной прямой и аффинной плоскости. Модели проективной плоскости — аффинно-проективная и модель связка, связь между ними. Взаимосвязь между аффинной и проективной плоскостями.

Теорема Дезарга в проективной формулировке и аффинной. Окружность, как модель проективной прямой. Круг с отождествлёнными точками как модель проективной плоскости. Конструкция отождествления с использованием листа Мёбиуса. Множество ортогональных матриц $SO(3)$, как модель трёхмерного проективного пространства. Односторонность и неориентируемость проективной плоскости.

Однородные координаты на аффинной и аффинно-проективной плоскости. Координаты на проективной плоскости. Принцип двойственности.

Аффинные преобразования, свойства. Разложение аффинного преобразования. Сдвиг, эллиптический и гиперболический повороты. Проективное преобразование плоскости, свойства. Проективное преобразование на аффинной плоскости как дробно-линейное преобразование. Проективное отображение эллипса на гиперболу.

Литература

1. Постников М.М. Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1979.
2. Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 2002.
3. Ильин А.В., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М.: Физматлит, 2001.
4. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. М.: Наука, 1968.
5. Делоне Б.Н., Райков Д.А. Аналитическая геометрия. М.: Гостехиздат, 1948. Т. 1-2.
6. Смирнов Ю.М. Курс аналитической геометрии. М.: Едиториал УРСС, 2005.
7. Розенфельд Б.А. Многомерные пространства. М.: Наука, 1966.